

Дифференциальные уравнения и их приложения
в математическом моделировании

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ



Саранск
2023

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Дифференциальные уравнения и их приложения
в математическом моделировании**

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Саранск
17 — 20 августа 2023 г.

Саранск
2023

УДК 510:004.5

ББК В1

Д503

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я :

член-корр. РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (отв. редактор):

д.ф.-м.н. профессор И.В. Бойков;

д.ф.-м.н. профессор П.А. Вельмисов;

д.ф.-м.н. профессор В.З. Гринес;

д.ф.-м.н. профессор В.К. Горбунов;

д.ф.-м.н. профессор Е.Б. Кузнецов;

д.ф.-м.н. профессор О.В. Починка.

Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании [Электронный ресурс]: Сборник материалов XVI Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (Саранск, 17-20 августа 2023 г.) / редкол.: В.Ф. Тишкин (отв. ред.) [и др.]. – Саранск: СВМО, 2023. – 290 с. Режим доступа: <https://conf.svmo.ru/files/2023/ProceedingsSVMO2023.pdf>

ISBN 978-5-901661-59-8

Настоящее издание содержит материалы докладов участников XVI Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании», проходившей в Национальном исследовательском Мордовском государственном университете им. Н.П. Огарева с 17 по 20 августа 2023 г.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

УДК 510:004.5

ББК В1

Публикуется на основании Устава Межрегиональной общественной организации «Средне-Волжское математическое общество» (п. 2.2) и по решению редакционно-издательского отдела СВМО.

ISBN 978-5-901661-59-8

© Коллектив авторов, 2023

© Оформление. СВМО, 2023

Предисловие

Настоящее издание содержит материалы докладов XVI Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании», которая проходит с 17 по 20 августа 2023 года в г. Саранск (Россия). Организаторами конференции выступили Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и Средне-Волжское математическое общество.

Научные конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании в Мордовском государственном университете им. Н.П. Огарёва проводятся регулярно с 1994 года. Основателем и идейным вдохновителем научных конференций и школ-семинаров являлся талантливый ученый и организатор д.ф.-м.н. профессор Е.В. Воскресенский. Он руководил этими мероприятиями до 2008 года. С 2009 года председателем конференций является член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (зав. отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва», г. Саранск).

Работа конференции проводится по секциям:

1. Качественные и асимптотические методы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения в практических задачах.
3. Уравнения в частных производных и их приложения в математическом моделировании.

Все доклады, представленные на конференции, были предварительно прорецензированы Программным комитетом.

Организаторы благодарны всем участникам конференции за интересные доклады и плодотворную дискуссию.

**Программный, организационный и редакционный комитеты
XVI Международной научной конференции «Дифференциальные
уравнения и их приложения в математическом моделировании»
Саранск, 17 — 20 августа 2023 года**

Председатель организационного комитета –

ректор Национального исследовательского Мордовского государственного университета Д. Е. Глушко (г. Саранск)

Председатель программного комитета –

член-корреспондент РАН д.ф.-м.н. профессор В. Ф. Тишкин (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва).

Ученый секретарь –

к.ф.-м.н. О. С. Язовцева (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, г. Саранск)

Программный комитет:

к.ф.-м.н., доцент	Р.В. Жалнин,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Андреев,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Д.В. Баландин,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	К.А. Баркалов,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.В. Бойков,	г. Пенза,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	П.А. Вельмисов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.К. Горбунов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.З. Гринес,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.М. Губайдуллин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ю.Н. Дерюгин,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.П. Жабко,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.М. Камачкин,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Козелков,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Кузьмичев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Е.Б. Кузнецов,	г. Москва,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	С.И. Мартынов,	г. Сургут,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Морозкин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	О.В. Починка,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.П. Рязанцева,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.В. Старостин,	г. Н. Новгород,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Л.А. Сухарев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.А. Титарев,	г. Москва,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	П.А. Шаманаев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ш.А. Алимов,	г. Ташкент,	Узбекистан.
д.ф.-м.н., профессор	А.А. Глуцюк,	г. Лион,	Франция.
д.ф.-м.н., профессор	А. Асанов,	г. Бишкек,	Кыргызстан.

Организационный комитет:

д.т.н., профессор	П.В. Сенин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.М. Давыдкин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	И.И. Чучаев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Ф. Мамедова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	С.М. Мурюмин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Д.К. Егорова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.Н. Тында,	г. Пенза,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.В. Десяев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.О. Сыромясов,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., с.н.с.	М.Н. Вишнякова,	г. Саров,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Е. Бадочкина,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.Е. Пескова,	г. Саранск,	Россия.
к.м.н., зам. декана	С.Х. Зинина,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	О.Е. Каледин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.А. Каледина,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	А.Ф. Карчиганов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	В.Е. Мальков,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	М.С. Нефедов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Н.Н. Чернышов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	А.А. Шалаева,	г. Саранск,	Россия.

Содержание

Абрашкин П.М. Топологическая и параметрическая оптимизация консоли крыла самолета	13
Андреев А.С., Сутыркина Е.А., Булдаковский П.А. О моделировании динамики многозвенных роботов-манипуляторов с вязкоупругими шарнирами	20
Балабина Т.Ю., Дерюгин Ю.Н. Применение открытопористых структур как ламинизатора потока в канале. Численная оценка влияния конструкции на однородность течения	25
Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Алексанин Н.Д., Анкилов Г.А. Асимптотический анализ математической модели системы «трубопровод – датчик давления»	31
Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Виль М.Ю. Математическое моделирование динамики метастазирования опухолей	39
Гринес В.З., Круглов Е.В., Починка О.В. О дуге, соединяющей грубый диффеоморфизм на 3-торе с растягивающимся аттрактором и гиперболический автоморфизм Аносова	48
Губайдуллин И.М., Коледина К.Ф. Дифференциальные уравнения в оптимизации каталитических процессов с использованием суперкомпьютерного моделирования	54
Данилова Е.В., Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А. Анализ распределения тепла в пленке нитрида ниобия на основе трехмерной модели при импульсном воздействии электрического тока	61
Жабко А.П., Жабко Н.А., Яковлев П.В. Применение метода оптимального демпфирования В. И. Зубова в задаче управления четырехкарданной гироскопической системой	66
Казанков В.К., Перегудин С.И., Холодова С.Е. Математическое моделирование динамических процессов в непрерывной электропроводящей среде	73
Калабкин Е.С., Мамедова Т.Ф. Универсальный алгоритм обработки сообщений из мессенджеров	79
Карачик В.В. Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре	83
Косов А.А., Семенов Э.И., Толстихин А.А. О моделировании и идентификации параметров распределенных формаций	90
Кудряшова Н.Ю., Первухина Ю.В. Исследование разностных методов решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами	96

Кузнецов Е.Б., Леонов С.С., Цапко Е.Д. Области абсолютной устойчивости явных методов семейства Рунге-Кутты для задачи Далквиста, преобразованной к наилучшему аргументу и его модификациям	101
Кузьмичев Н.Д. Дифференциальные уравнения для восстановления зависимости из ее гармоник	109
Кутыркина М.А., Мамедова Т.Ф. Математическое моделирование влияния инвазивных электрических полей на динамику нейронных сетей при болезни Паркинсона	116
Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете газодинамических ударных волн	121
Ладонкина М.Е., Повещенко Ю.А., Чжан Хаочэнь. Применение узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера на задаче Сода	129
Лашина Е.А., Чумакова Н.А., Чумаков Г.А. Математическое моделирование автоколебаний в реакции окисления метана на металлических катализаторах	135
Мазитов А.А., Губайдуллин И.М., Тишкин В.Ф. Математическое моделирование нестационарного течения однофазной жидкости в однопоровых коллекторах с использованием web-технологий	138
Мамедова Т.Ф., Десяев Е.В. Моделирование траектории и нормы накопления для модели Солоу	142
Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Динамика цепочки частиц в сдвиговом потоке жидкости	147
Мойко Н.В. Разработка новых методов оптимизации портфелей на основе стохастических дифференциальных уравнений	155
Морозкин Н.Д., Ткачев В.И., Морозкин Ю.Н. Оптимизация двумерных процессов нагрева с учетом фазовых ограничений	160
Морозов В.М., Журавлев В.М. Метод нелинейных функциональных подстановок для уравнений нелинейной диффузии и волновых уравнений	166
Морозов В.М., Журавлев В.М. Модель роста когерентных структур в среде с быстрой релаксацией и медленной диффузией	171
Мусафиров Э.В. О возмущениях автономных систем ОДУ, сохраняющих некоторые свойства решений	175
Переварюха А.Ю., Трофимова И.В., Михайлов В.В. Моделирование стохастически обусловленных популяционных инвазий в уравнениях с запаздывающим противодействием	184

Пескова Е.Е., Язовцева О.С., Макарова Е.Ю. О применении явно-итерационной схемы ЛИ-М к моделированию дозвуковых реагирующих газовых потоков	189
Попов В.Н., Гермидер О.В. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины	193
Рассадин А.Э. Двусторонние оценки решения одномерного уравнения теплопроводности	198
Садыхзаде Р.Ш., Мегралиев Я.Т. Линейные обратные задачи для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями	205
Сахаров А.Н. Структурно устойчивые линейные расширения квазипериодических потоков на торе	213
Стояновская О.П., Григорьев В.В., Савватеева Т.А. Подходы для повышения порядка аппроксимации метода гидродинамика сглаженных частиц (SPH) на гладких решениях	220
Сыромясов А.О., Еделева Ю.П. Задача о термодинамическом взаимодействии слоя частиц с параллельной плоскостью	227
Тарасов Д.В., Лапкин В.В. К вопросу о применении технологии OpenMP для численного решения интегральных уравнений	232
Узянбаев Р.М., Бобренёва Ю.О., Поляков С.В., Тишкин В.Ф. Выбор методов решения задачи флюидодинамического моделирования в коллекторе трещиновато-порового типа	240
Усманова А.А., Коледина К.Ф. Математическая модель каталитического синтеза метил-трет-бутилового эфира	248
Шалаева А.А., Мамедова Т.Ф., Егорова Д.К., Устойчивость математической модели развития леса	253
Шаманаев П.А., Осипов Д.А. К вопросу об исследовании вынужденных колебаний линейной системы двух связанных осцилляторов вблизи резонанса	256
Шамолин М.В. Инвариантные дифференциальные формы динамических систем с конечным числом степеней свободы со знакопеременной диссипацией	262
Шералиев Ш.Н. Об оценке снизу гиперсингулярного оператора перидинамики	265
Юрова Т.С., Попов И.Ю. Исследование явления резонанса при вытяжке стеклянного цилиндра	269
Язовцева О.С., Губайдуллин И.М., Иншакова А.С., Родькина Д.А. Исследование	

устойчивости динамики концентраций веществ в диффузионной модели зерна катализатора	277
V.L. Litvinov, K.V. Litvinova. Variational statement of the problem of vibrations of a beam with a moving boundary	283
O.S. Yazovtseva, I.M. Gubaydullin, A.N. Zagoruiko. Numerical simulation of oxidative regeneration of a spherical catalyst layer	286

Contents

P.M. Abrashkin. Topological and parametric optimization of the airplane wing console	13
A.S. Andreev, E.A. Sutyorkina, P.A. Buldakovskii. On the dynamic modelling of the multilink robot manipulators with viscoelastic joints	20
T.Yu. Balabina, Yu.N. Deryugin. The use of open-porous structures as a flow laminarizer in the channel. Numerical evaluation of the influence of the design on the uniformity of the flow	25
P.A. Velmisov, Yu.A. Tamarova, N.D. Aleksanin, G.A. Ankilov. Asymptotic analysis of the mathematical model of the system «pipeline – pressure sensor»	31
A.B. Goncharova, E.P. Kolpak, M.Yu. Vil'. Mathematical modeling of tumor cells metastasis dynamics	39
V.Z. Grines, E.V. Kruglov, O.V. Pochinka. On the arc connecting a rough diffeomorphism on a 3-torus with an expanding attractor and Anosov hyperbolic automorphism	48
I.M. Gubaydullin, K.F. Koledina. Differential Equations in the Optimization of Catalytic Processes by Supercomputer Simulation	54
E.V. Danilova, N.D. Kuzmichev, M.A. Vasyutin. Analysis of heat distribution in a niobium nitride membrane based on a three-dimensional model under pulsed electric current.	61
A.P. Zhabko, N.A. Zhabko, P.V. Yakovlev. Application of Zubov's method of optimal damping in the problem of controlling a four-gimbal gyroscopic system	66
S.K. Kazankov, S.I. Peregudin, S.E. Kholodova. Mathematical modeling of dynamic processes in a continuous electrically conductive medium	73
E.S. Kalabkin, T.F. Mamedova. Universal algorithm for processing messages from messengers	79
V.V. Karachik. The Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball	83
A.A. Kosov, E.I. Semenov, A.A. Tolstikhin. On modeling and identification of parameters of distributed formations	90
N.Y. Kudryashova, Y.V. Pervuhina. Investigation of difference methods for solving the problem of thermal conductivity with phase transitions	96
E.B. Kuznetsov, S.S. Leonov, E.D. Tsapko. Absolute stability domains of explicit methods of the Runge-Kutta family for the Dahlquist problem transformed to the best argument and its modifications	101

N.D. Kuzmichev. Differential equations for recovery of dependence from its harmonics	109
M.A. Kutyorkina, T.F. Mamedova. Mathematical modeling of the influence of invasive electric fields on the neural networks' dynamics in Parkinson's disease	116
M.E. Ladonkina, O.A. Nekliudova, V.V. Ostapenko, V.F. Tishkin. On the accuracy of discontinuous Galerkin method calculating gas-dynamic shock waves	116
M.E. Ladonkina, Yu.A. Poveschenko, H. Zhang. Application of viscous-filled nodal completely conservative difference schemes to the gas dynamics equations in Euler variables on the Soda problem	129
E.A. Lashina, N.A. Chumakova, G.A. Chumakov. Mathematical modeling of self-sustained oscillations in methane oxidation over metallic catalysts	135
A.A. Mazitov, I.M. Gubaydullin, V.F. Tishkin. Mathematical modeling of unsteady single-phase fluid flow in single-pore reservoirs using web-technologies	138
T.F. Mamedova, E.V. Desyaev. Modeling the trajectory and accumulation rate for the Solow model	138
S.I. Martynov, L.Yu. Tkach. Particle Chain Dynamics in a Shear Fluid Flow	147
N.V. Moiko. Development of new portfolio optimization methods based on stochastic differential equations	155
N.D. Morozkin, V.I. Tkachev, Y.N. Morozkin. Optimization of two-dimensional heating processes taking into account phase limitations	160
V.M. Morozov, V.M. Zhuravlev. Nonlinear functional substitutions method for nonlinear diffusion and wave equations	166
V.M. Morozov, V.M. Zhuravlev. Model of growth of coherent structures in a medium with fast relaxation and slow diffusion	171
E.V. Musafirov. On perturbations of autonomous ODE systems preserving some properties of solutions	175
A.Yu. Perevaryukha, I.V. Trofimova, V.V. Mikchailov. Modeling stochastically driven population invasions in equations by delayed counteraction	184
E.E. Peskova, O.S. Yazovtseva, E.Yu. Makarova. On the application of the explicit-iterative LI-M scheme to the modeling of subsonic reacting gas flows	189
V.N. Popov, O.V. Germider. Mathematical modeling of the stress-strain state of a thin isotropic plate	193
A.E. Rassadin. Double-sided bounds for solution of one-dimensional heat equation	198

R.Sh. Sadikhzada, Y.T. Mehraliyev. Linear inverse problems for third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions.	205
A.N. Sakharov. Structurally stable linear extensions	213
O.P. Stoyanovskaya, V.V. Grigoryev, T.A. Savvateeva. Approaches for increasing the order of approximation of the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method on smooth solutions	220
A.O. Syromyasov, Yu.P. Edeleva. On thermodynamic interaction of a particle stratum with a parallel plane	227
D.V. Tarasov, V.V. Lapkin. On the application of OpenMP technology for the numerical solution of integral equations	232
R.M. Uzyanbaev, Y.O. Bobreneva, S.V. Polyakov, V.F. Tishkin. Choice of Methods for Solving the Problem of Fluid Dynamic Modeling in a Fractured-Porous Reservoir ..	240
A.A. Usmanova, K.F. Koledina. Mathematical model of the catalytic synthesis of methyl-tert-butyl ether	248
A.A. Shalaeva, T.F. Mamedova, D.K. Egorova. Stability of the forest development's mathematical model	248
P.A. Shamanaev, D.A. Osipov. On the question of studying forced vibrations of a linear system of two coupled oscillators near resonance	256
M.V. Shamolin. Invariant differential forms of various dissipation dynamical systems with a finite number of degrees of freedom	262
Sh.N. Sheraliev. On the estimation from below of the hypersingular operator of peridynamics	265
T.S. Yurova, I.Yu. Popov. Investigation of the resonance phenomenon during the glass cylinder draw	277
O.S. Yazovtseva, I.M. Gubaydullin, A.S. Inshakova, D.A. Rodkina. Investigation of the stability for substances' concentrations' dynamics in the catalyst grain's diffusion model	277
V.L. Litvinov, K.V. Litvinova. Variational statement of the problem of vibrations of a beam with a moving boundary	283
O.S. Yazovtseva, I.M. Gubaydullin, A.N. Zagoruiko. Numerical simulation of oxidative regeneration of a spherical catalyst layer	286

УДК 517.91

Топологическая и параметрическая оптимизация консоли крыла самолета

Абрашкин П.М.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Рассматривается трехмерная модель консоли крыла летательного аппарата. На основе модели разрабатывается методика проектирования силового набора крыла с использованием методов топологической и параметрической оптимизации. В программе OptiStruct проведена топологическая оптимизация. Получен ряд конструкций силового набора, на базе выбранного оптимального варианта произведена параметрическая оптимизация в программном комплексе ANSYS Workbench.

Ключевые слова: полимерные композиционные материалы, авиационная промышленность, топологическая оптимизация, параметрическая оптимизация, целевая функция, математическое моделирование, оптимизация.

1. Топологическая оптимизация конструкции

Поиск силовой конструкции крыла самолета проводится на модели консоли крыла CASA C-295. Данная консоль была упрощена путем оставления аэродинамического профиля и стреловидности крыла. Затем на модели создается конечно-элементная (КЭ) сетка, в которой участвует только внутренняя часть (наполнение) крыла, выполненная из SOLID элементов. SHELL-элементы используются только для задания граничных условий при топологической оптимизации. Оптимизация проводилась с использованием программы КЭ анализа Altair OptiStruct. На подготовленной КЭ модели были заданы следующие граничные условия: закрепление крыла осуществляется на торце со стороны крепления к фюзеляжу, на нижнюю и верхнюю поверхность крыла действует равномерное давление, равное 0.01 МПа и 0.005 МПа соответственно (рис. 1). Крыло состоит из алюминия.

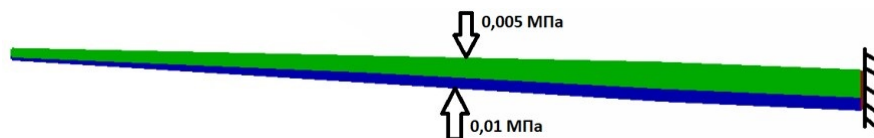


Рис. 1. Граничные условия.

Топологическая оптимизация проводится по реализованному в программе методу SIMP. В исследовании рассматривается два варианта выбора целевой функции и ограничений. Использовались следующие критерий и ограничения:

1. Критерий – минимизация массы (целевая функция – масса).
 2. Критерий – минимизация податливости (целевая функция – податливость).
- Ограничение – максимальная объемная доля материала, равная 30%.

Для каждого варианта были заданы технологические ограничения в виде максимально возможных перемещений законцовки крыла в диапазоне ± 500 мм и макси-

мально допустимых напряжений в конструкции, не превышающих 250 МПа.

Один из основных параметров, оказывающих влияние на конечный результат будущей конструкции – ограничение максимального и минимального диаметра силового пути.

Использование данной опции дает возможность моделировать конструкции, учитывающие производственные ограничения и исключаящие из них невоспроизводимые мелкие элементы. Однако стоит учитывать, что этот параметр чувствителен к размеру сетки КЭ, а программные возможности ограничивают применимость данной опции ($3d < mindim < 2d$, где d – средний размер КЭ). Поскольку средний размер сетки составляет 20 мм, представлены расчеты с минимальным/максимальным диаметром силового пути, равным 100, 150 и 200 мм. В результате топологической оптимизации был получен ряд вариантов конструкций силового набора консоли крыла.

Рассмотрим результаты оптимизации, представленные на рис. 2а), для случая минимизация массы с ограничением: максимальные напряжения по Мизесу не превышают 250 МПа, максимальные перемещения законцовки крыла не превышают ± 500 мм.

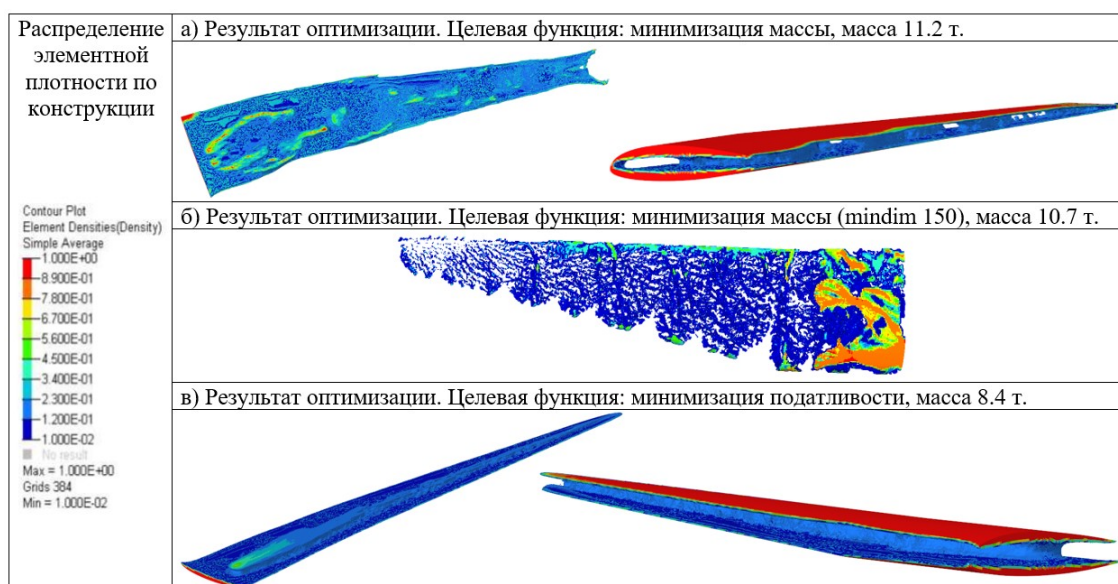


Рис. 2. Результат оптимизации.

Рассмотрим следующий вариант оптимизации с измененным дополнительным ограничивающим параметром – минимальный диаметр силового пути, равный 150 мм ($mindim = 150$) – рис. 2б).

Полученные результаты показывают, что расчетная картина не соответствует реальной. Если без добавления дополнительного ограничения можно с большой натяжкой сказать, что в конструкции присутствуют два маленьких лонжерона, расположенных так же, как на настоящих летательных аппаратах (ЛА), то при добавлении данного ограничения силовая конструкция не похожа на реальную, поскольку не просматриваются лонжероны и нервюры. Поэтому в рамках исследования вариант с данной целевой функцией рассматриваться не будет.

В варианте изображенном на рис. 2в), целевая функция – податливость – подлежит минимизации со следующими ограничениями:

- 1) максимальная объёмная доля материала в крыле равна 30%,
- 2) максимальные напряжения по Мизесу не превышают 250 Мпа,
- 3) максимальные перемещения законцовки крыла не превышают ± 500 мм.

Далее рассмотрим варианты с введением дополнительного параметра – минимального или максимального диаметра силового пути. На рис. 3 представлено распределение плотности материала по крылу для следующих вариантов:

- 1) $mindim = 100$, 2) $mindim = 150$, 3) $mindim = 200$, 4) $maxdim = 100$,
- 5) $maxdim = 150$, 6) $maxdim = 200$, 7) $mindim = 100$, $maxdim = 200$.

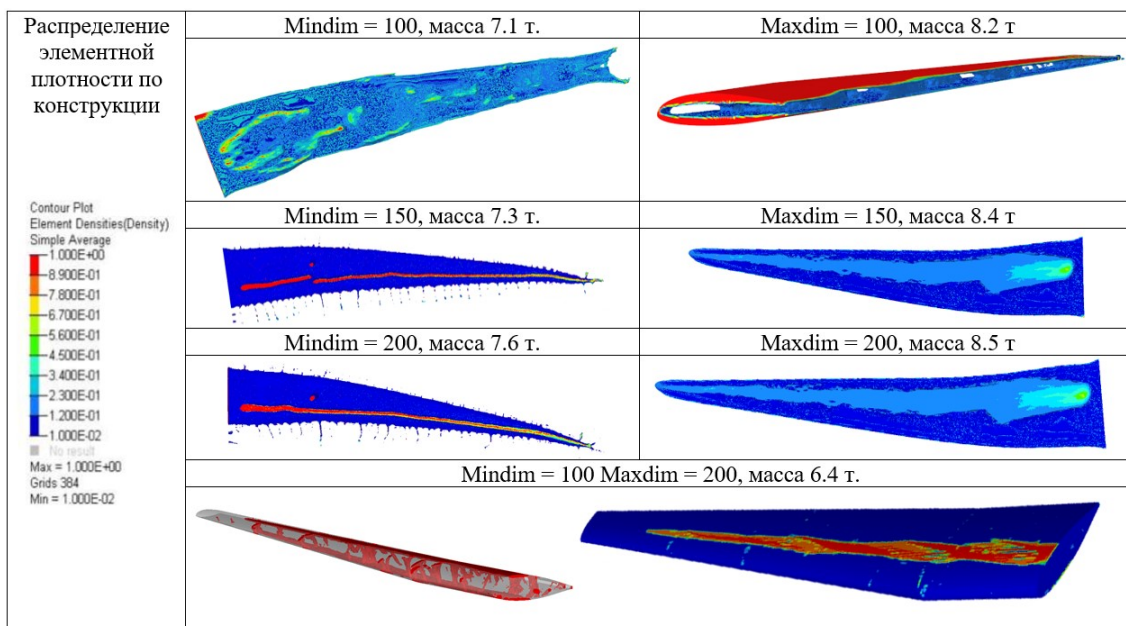


Рис. 3. Результат оптимизации

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что добавление дополнительного параметра – минимального диаметра силового пути – существенно изменяет результат оптимизации. Однако использование совместного дополнительного параметра – минимального и максимального диаметра силового пути – не только изменяет конструкцию, но и значительно облегчает её. Поэтому для дальнейшего исследования в качестве базовой модели будет взят именно этот вариант. На рис. 4а) желтым цветом показана примерная отрисовка соответствующей силовой конструкции крыла. На рис. 4б) представлена отрисованная модель крыла для параметрической оптимизации.

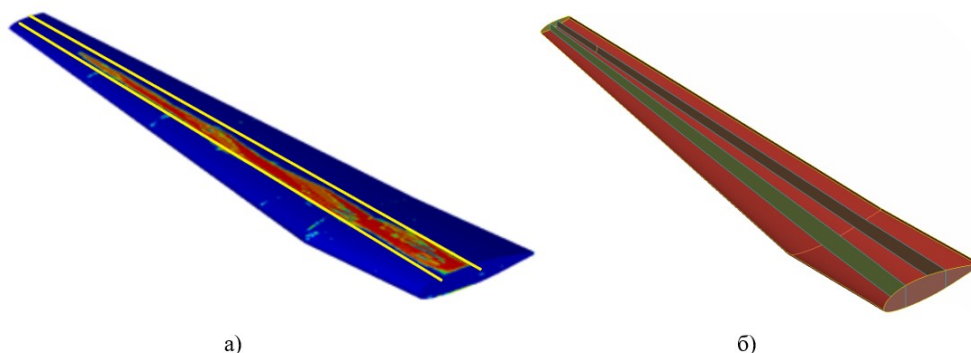


Рис. 4. Вариант отрисовки силовой конструкции

2. Параметрическая оптимизация конструкции

В данном разделе представлены результаты проведения параметрической оптимизации обшивки и силового набора консоли крыла самолета в программе ANSYS Workbench. Оптимизация консоли крыла проводилась при помощи метода поиска оптимального решения при помощи поверхности отклика – Response Surface Method. В качестве критерия выбрана минимизация массы и минимизация перемещений законцовки крыла. В качестве ограничений выступили максимальные напряжения, находящиеся в диапазоне от 200 до 300 МПа и стремящиеся к 250 МПа. Граничные условия не изменены. В качестве оптимизируемых параметров были выбраны:

1. Толщина одного слоя препрега из однонаправленного эпоксидного углеродного волокна в диапазоне от 0.28 мм до 28 мм с шагом 0.28 мм.

2. Количество пакетов углеродного волокна в элементе – от 1 до 3.

Направление выкладки слоев углеродного волокна в каждом четырех слойном пакете $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$. В качестве материала выбран эпоксидный карбон со свойствами:

- а) модуль Юнга в продольном направлении равен 121000 МПа;
- б) модуль Юнга в поперечном направлении – 8600 МПа;
- в) коэффициент Пуассона в продольном направлении равен 0.27;
- г) коэффициент Пуассона в поперечном направлении – 0.4;
- д) плотность равна 1490 кг/м³.

Для проведения параметрической оптимизации проводятся вычислительные эксперименты для построения поверхности отклика. На основе полученной поверхности программой предлагается три наилучших результата (таблица 1).

Таблица 1. Результаты параметрической оптимизации

Наименование параметра		Результат 1	Результат 2	Результат 3
Пакет обшивки	Толщина слоя, мм	1.4	2.24	0.84
	Количество пакетов	1	1	1
	Толщина элемента, мм	5.6	8.96	3.36
Пакет переднего лонжерона	Толщина слоя, мм	2.8	0.28	0.56
	Количество пакетов	2	3	3
	Толщина элемента, мм	22.4	3.36	6.72
Пакет заднего лонжерона	Толщина слоя, мм	0.56	3.92	26.04
	Количество пакетов	3	1	1
	Толщина элемента, мм	6.72	15.68	104.16
Максимальное перемещение крыла, мм		297.5	216	136.7
Максимальное напряжение, МПа		255.75	223.94	239.21
Масса, т		1.13	1.31	1.39

Анализируя полученные результаты, приходим к выводу, что первый вариант – наилучший, поскольку в данном случае самый тонкий элемент имеет толщину 5.6 мм. В других вариантах этот показатель меньше.

На следующем шаге была проведена проверка результата оптимизации. Это необходимо поскольку для построения поверхности отклика программой было произведе-

дено 55 численных экспериментов, этого количества недостаточно для построения подробной поверхности отклика. В результате проверки были получены следующие результаты: максимальные напряжения составили 275 МПа, перемещение законцовки крыла составило 370 мм (рис. 5). Отличие от полученного результата объясняется тем, что при проведении оптимизации требуется более сильная детализация при построении поверхности отклика.

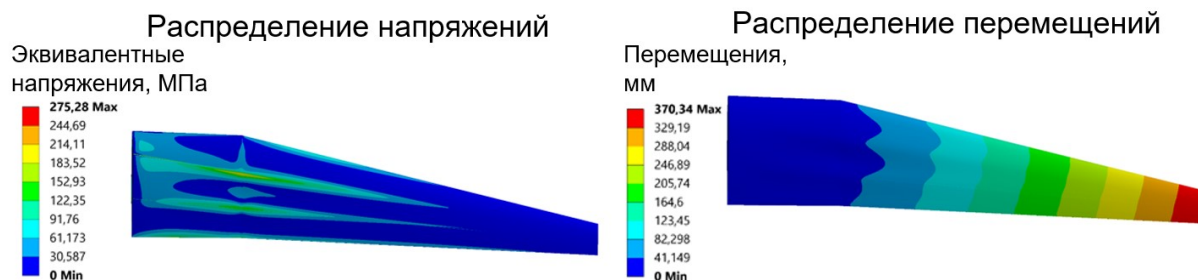


Рис. 5. Результаты проверки

Подводя итог, можно заключить, что процесс оптимизации существенно улучшил показатели консоли крыла самолета и позволил достичь массы, равной 1.13 т, по сравнению с настоящей консолью крыла самолета CASA C-295, масса которой составляет приблизительно 1.7 т (таблица 2). Это означает, что оптимизация значительно ускорила и улучшила процесс создания облегченной модели, который при ручном создании потребовал бы значительных затрат времени в связи с перебором различных вариантов дизайна.

Таблица 2. Результаты работы

Характеристика	После топологической оптимизации	После параметрической оптимизации	Конструкция крыла C-295
Максимальное перемещение крыла, мм	63.35	370.34	550
Максимальное напряжение, МПа	22.4	275.28	—
Масса, т	4.3	1.13	1.8

Благодаря применению оптимизации была быстро определена наилучшая концепция конструкции консоли крыла ЛА, без необходимости рассмотрения множества альтернативных вариантов. Таким образом, оптимизация представляется эффективным современным инструментом для разработки разнообразных конструкций, где целью является достижение наилучшего значения какой-либо определенной характеристики (например, минимизация или максимизация массы, объема, податливости и т. д.) при соблюдении заданных критериев (например, ограничений на перемещения, напряжение и т. п.).

Литература

1. Walke D., Liu D., Jennings A. Topology Optimization of an Aircraft Wing // 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference URL: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2015-0976>
2. Walke D., Liu D., Jennings A. Wing Design Utilizing Topology Optimization and Additive Manufacturing // 57th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference URL: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2016-1246>

MSC 34D20

Topological and parametric optimization of the airplane wing console

P.M. Abrashkin

Ulyanovsk state technical university

Abstract: The three-dimensional model of an aircraft wing cantilever is considered. On the basis of the model, a methodology for designing the wing force set using topological and parametric optimization methods is developed. Topological optimization is carried out in the OptiStruct program. A number of force set designs are obtained, and parametric optimization is performed in ANSYS Workbench on the basis of the selected optimal variant.

Keywords: polymer composite materials, aviation industry, topology optimization, parametric optimization, objective function, mathematical modeling, optimization.

References

1. Walke D., Liu D., Jennings A. Topology Optimization of an Aircraft Wing // 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference URL: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2015-0976>
2. Walke D., Liu D., Jennings D. Wing Design Utilizing Topology Optimization and Additive Manufacturing // 57th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference URL: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2016-1246>

УДК 531.36:62-50

О моделировании динамики многозвенных роботов-манипуляторов с вязкоупругими шарнирами*

Андреев А.С., Сутыркина Е.А., Булдаковский П.А.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: Исследуется проблема влияния наследственных свойств механической системы на устойчивость ее положений равновесия. Рассмотрено управление многозвенным манипулятором с цилиндрическими вязкоупругими шарнирами наследственного действия по классическому определению В. Вольтерра. Представлены некоторые новые модели управления многозвенным манипулятором с вязкоупругими цилиндрическими шарнирами. Уравнения динамики манипулятора выводятся на основе концепции математической модели механической системы с вязкоупругими элементами. Обоснованы законы управления, решающие задачу стабилизации положения манипулятора без измерения скорости, а также задачу отслеживания траектории. Решается задача управления трехзвенным манипулятором с вязкоупругими цилиндрическими шарнирами.

Ключевые слова: многозвенный робот-манипулятор, вязкоупругие шарниры, стабилизация движения.

1. Введение

Несмотря на многочисленные исследования, проблема управления манипулятором с вязкоупругими шарнирами по-прежнему актуальна. Это связано как с преимуществом вязкоупругих соединений по точности, плавности, надежности и другим свойствам, так и со стремлением разработать модели роботов-манипуляторов с человекоподобным двигательным механизмом. Среди работ последних лет в этом направлении можно выделить работы [1–3].

Целью данной работы является исследование задачи управления многозвенным манипулятором с цилиндрическими вязкоупругими шарнирами наследственного действия по классическому определению В. Вольтерра. В разделе 2 представлена математическая модель манипулятора с вязкоупругими шарнирами. В разделе 3 представлено решение одной из трех решенных задач, а именно задачи о стабилизации положения манипулятора без измерения скорости. В докладе также будут представлены результаты решения данной задачи о стабилизации вращательного движения и отслеживания траектории движения манипулятора. В качестве конкретного примера решается задача управления трехзвенным роботом-манипулятором с вязкоупругими шарнирами.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-71-00062, <https://rscf.ru/project/22-71-00062/>).

2. Математическая модель манипулятора с вязкоупругими шарнирами и постановка задачи

Манипуляторы с абсолютно жесткими звеньями моделируются как механическая система с конечным числом степеней свободы. Можно предположить, что такой математической моделью является система с N материальными точками, положение которых определяется радиус-векторами

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \dots, \mathbf{r}_N = (x_N, y_N, z_N). \quad (1)$$

Предположим, что к j -ой точке приложены вязкоупругие элементы с реакциями \mathbf{f}_{jk} ($j = \overline{1, N}$; $k = \overline{1, \mu_N}$), которые определяются по свойству наследственности механических систем согласно В. Вольтерра [4]

$$\mathbf{f}_{jk} = f_{jk} \mathbf{e}_{jk}^0 = -(\rho_{jk} l_{jk}(\mathbf{r}_j(t)) + \int_{-\infty}^t g_{jk}(\nu - t) l_{jk}(\mathbf{r}_j(\nu)) d\nu) \mathbf{e}_{jk}^0, \quad (2)$$

где l_{jk} – удлинение k -го элемента с учетом остаточной деформации при перемещении $\mathbf{r}_j(t)$, ρ_{jk} и g_{jk} – соответствующие коэффициенты жесткости и релаксации, \mathbf{e}_{jk}^0 – единичный вектор соответствующего направления.

Виртуальную работу реакций \mathbf{f}_{jk} ($j = \overline{1, N}$; $k = \overline{1, \mu_N}$) на элементарном перемещении $\delta \mathbf{e}_{jk} = \delta e_{jk} \mathbf{e}_{jk}$ можно найти, используя равенства:

$$\begin{aligned} \delta' A &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\mu_j} (\mathbf{f}_{jk} \cdot \delta \bar{\mathbf{e}}_{jk}) = \mathbf{f}' \delta \mathbf{l}, \\ \mathbf{l}' &= (l_1, l_2, \dots, l_{1\mu_1}, \dots, l_{N\mu_N}) = (l_1, l_2, \dots, l_p), \\ \mathbf{f}' &= (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1\mu_1}, \dots, f_{N\mu_N}) = (f_1, f_2, \dots, f_p) = -p \mathbf{l}(\mathbf{r}(t)) - \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(\nu - t) \mathbf{l}(\mathbf{r}(\nu)) d\nu, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p = \sum_{j=1}^N \mu_j, \mathbf{P} = \text{diag}(\rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_p), \mathbf{G} = \text{diag}(g_{11}, g_{12}, \dots, g_p).$$

Пусть на механическую систему наложены идеальные стационарные связи, так что ее положение описывается n обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_n . Из (2) и (3) находим обобщенные силы, определяющие действие вязкоупругих элементов

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} \right) \mathbf{f}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{q}), \quad \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial (l_1, l_2, \dots, l_p)}{\partial (q_1, q_2, \dots, q_n)}. \quad (4)$$

Рассмотрим задачу управления n -звенным электромеханическим манипулятором с вязкоупругими соединениями типа (2). Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)'$ – вектор углов между звеньями манипулятора, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)'$ – вектор углов поворота выходных валов электроприводов. Тогда для каждого из n соединений круговое удлинение определяется как $l_j = r_j(\varphi_j - \psi_j)$, где r_j – радиус вала.

Уравнения управляемого движения манипулятора можно записать в виде уравнений Лагранжа [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\varphi)\ddot{\varphi} + \mathbf{C}(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi} + \mathbf{s}(\varphi - \psi) + \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(\nu - t)(\varphi(\nu) - \psi(\nu))d\nu + \mathbf{g}(\varphi) = 0, \\ \mathbf{J}\ddot{\psi} - \mathbf{s}(\varphi - \psi) - \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(\nu - t)(\varphi(\nu) - \psi(\nu))d\nu = \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$ – матрица инерции жестких звеньев, $\mathbf{J} \in R^{n \times n}$ – диагональная матрица инерции приводов, $\mathbf{J} = \text{diag}(j_1, j_2, \dots, j_n) > 0$, кориолисовы и центробежные моменты инерции описываются как $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$, функция $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ представляет гравитационные моменты, а $\mathbf{u} \in R^n$ – входной крутящий момент, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)'$, $\mathbf{G} = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$, при этом $s_k + \int_{-\infty}^0 G_k(\gamma)d\gamma > 0$ ($k = \overline{1, n}$).

В статье дано решение задачи о стабилизации положения и установившегося вращательного движения, а также получен закон управления, позволяющий отслеживать траектории движения манипулятора.

3. Решение задачи о стабилизации положения манипулятора без измерения скорости

Пусть $\varphi = \varphi_0$ – заданное положение манипулятора, $\psi = \psi_0$ – соответствующие положения выходных валов, определяемые по формуле:

$$\psi_0 = \left(\mathbf{s} + \int_{-\infty}^0 \mathbf{G}(\gamma)d\gamma \right)^{-1} \mathbf{g}(\varphi_0) + \varphi_0. \quad (6)$$

Доказано, что задача о стабилизации положения манипулятора решается управлением вида

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{g}(\varphi_0) - \mathbf{B}(\psi - \psi_0) + \int_{t-h}^t \mathbf{H}(\nu - t)(\psi(\nu) - \psi_0)d\nu, \\ \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \mathbf{H} = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_n), H_j > 0 (j = \overline{1, n}), \\ h > 0, b_j - \int_{-h}^0 H_j(\gamma)d\gamma > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что вторая составляющая закона управления (7) аналогична структуре вязкоупругого крутящего момента.

4. Заключение

В работе получены новые модели управления многозвенным роботом-манипулятором с вязкоупругими шарнирами. Моделирование манипулятора на основе физического

принципа В. Вольтерра позволяет утверждать определенное сходство моделей таких роботов-манипуляторов с действием многосуставной руки человека. Проведены численные эксперименты с двухзвенным и трехзвенным манипуляторами, которые подтверждают обоснованность построенных моделей управления.

Литература

1. Garcia-Rodriguez R., Parra-Vega V., Ramos-Velasco L. E., Dominguez-Ramirez O. A. Neuro-controller for antagonistic bi-articular muscle actuation in robotic arms based on terminal attractors, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2020, vol. 42 (11). P. 2031-2043.
2. Machida K., Kimura S., Suzuki R., Yokoyama K., Okui M., Nakamura T. Variable Viscoelastic Joint Module with Built-in Pneumatic Power Source, 2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Boston, MA, USA, 2020. P. 1048-1055, doi: 10.1109/AIM43001.2020.9158861.
3. Yamamoto K., Murotani K., Ko T., Nakamura Y. Resolved viscoelasticity control for robust walking of a humanoid with knee-stretched posture considering singularity, Robotics and Autonomous Systems, 2022, vol. 157. 104218 p.
4. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Dover Publications, New York, 1959.
5. Andreev A.S., Peregudova O.A. Lyapunov Functional Method in the Stability Problem of Volterra Integro-Differential Equations with Infinite Delay, Mechanics of Solids, 2021, vol. 56 (8). P. 1514-1533.

MSC 39A30

On the dynamic modelling of the multilink robot manipulators with viscoelastic joints

A.S. Andreev, E.A. Sutyorkina, P.A. Buldakovskii

Ulyanovsk State University

Abstract: We study the problem of the influence of the mechanical system hereditary properties on the stability of its equilibrium positions. We consider the control of the multilink manipulator with cylindrical viscoelastic joints of hereditary action according to the classical definition of V. Volterra. Some new control models for a multilink manipulator with viscoelastic cylindrical joints are presented. The manipulator dynamics equations are derived based on the concept of the mathematical model for a mechanical system with viscoelastic elements. The control laws are substantiated that solve the position stabilization problem of the manipulator without measuring velocity measurements as well as the trajectory tracking control problem. The control problem of the three-link manipulator with viscoelastic cylindrical joints is solved.

Keywords: multilink robot manipulator, viscoelastic joints, motion stabilization.

References

1. Garcia-Rodriguez R., Parra-Vega V., Ramos-Velasco L. E., Dominguez-Ramirez O. A. Neuro-controller for antagonistic bi-articular muscle actuation in robotic arms based on terminal attractors, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2020, vol. 42 (11). P. 2031-2043.
2. Machida K., Kimura S., Suzuki R., Yokoyama K., Okui M., Nakamura T. Variable Viscoelastic Joint Module with Built-in Pneumatic Power Source, 2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Boston, MA, USA, 2020. P. 1048-1055, doi: 10.1109/AIM43001.2020.9158861.
3. Yamamoto K., Murotani K., Ko T., Nakamura Y. Resolved viscoelasticity control for robust walking of a humanoid with knee-stretched posture considering singularity, *Robotics and Autonomous Systems*, 2022, vol. 157. 104218 p.
4. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations.* Dover Publications, New York, 1959.
5. Andreev A.S., Peregudova O.A. Lyapunov Functional Method in the Stability Problem of Volterra Integro-Differential Equations with Infinite Delay, *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56 (8). P. 1514 - 1533.

УДК 517.91

Применение открытопористых структур как ламиниризатора потока в канале. Численная оценка влияния конструкции на однородность течения

Балабина Т.Ю., Дерюгин Ю.Н.

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский
научно-исследовательский институт экспериментальной физики

Аннотация: В работе приводятся результаты численного исследования влияния открытопористой структуры (ОПС) на ламинирзацию потока в канале. Для моделирования ОПС использовалась модель Форхгеймера-Бринкмана, в которой вязкостной и инерционный коэффициенты были получены путем сквозного расчета этой структуры. Распределение параметров в потоке было получено из результатов моделирования поворота канала. Количественным критерием влияния ОПС на однородность потока является уровень завихренности. Расчеты течений выполнены в стационарной постановке по комплексу «ЛОГОС» с использованием параллельных вычислений на суперкомпьютере. Из анализа полученных результатов сделан вывод о том, что с применением ОПС уровень завихренности существенно снижается и непосредственно влияет на профиль скорости вниз по потоку

Ключевые слова: открытопористая структура, модель Форхгеймера-Бринкмана, завихренность.

1. Проблематика исследуемого вопроса

Рассматривая проблему выравнивания профиля скорости потока, следует учитывать, что каждый источник генерации возмущений порождает определенный вид неоднородности. В рамках данной работы рассмотрен профиль скорости за поворотным участком канала на угол 90° (колесо). Результаты моделирования такого источника возмущения представлены в [1]. Для оценки ламинирзации потока рассмотрены результаты расчетов, которые максимально близко соответствуют экспериментальным данным [2]. Поскольку анализируемое течение является сугубо турбулентным, в качестве оценочных параметров рассматривается осредненный показатель модуля завихренности [3,4]. Оценка уровня завихренности, которая рассчитывалась в прямолинейном канале за поворотом в поперечных сечениях с периодичностью одного диаметра трубы показывает, что порожденное поле завихренности исследуемым конструкционным изменением сохраняется на расстоянии 20 калибров. В качестве одного из возможных способов выравнивания профиля скорости потока могут быть использованы вставки конструктивных элементов из открытопористых материалов. Наибольший интерес представляют материалы с высокой пористостью ввиду их малого веса и небольшого гидравлического сопротивления [5]. Математическая модель в общей постановке достаточно сложна и не имеет точного аналитического решения. Численное моделирование для описания характеристик течения является сложной и дорогостоящей процедурой. Для решения задачи вводятся различного рода допущения и полуэмпирические зависимости для коэффициентов переноса, ис-

пользуемые в математической модели. Для определения указанных коэффициентов необходим прямой эксперимент, дающий информацию о гидравлическом сопротивлении при движении среды в пористых структурах. В рамках работы [6] был проведен численный эксперимент, в котором была получена зависимость отношения градиента давления к толщине открытопористой структуры (ОПС) от скорости потока. Точками на графике отмечены данные, которые были получены в ходе прямого численного моделирования. Из графика видно, что зависимость $\frac{\Delta P}{\Delta l} = f(u)$ на исследуемом образце нелинейна (что означает отклонение от ламинарного режима). Толщина исследуемого образца равна 1.68 мм. Полученная зависимость в исследуемом диапазоне (скорость потока 0-10 м/с) аппроксимируется квадратичной зависимостью, что соответствует модели Форхгеймера-Бринкмана:

$$\frac{\Delta P(u)}{\Delta l} = \tilde{A}u + \tilde{B}u^2, \quad (1)$$

где u – скорость потока, \tilde{A} и \tilde{B} – вязкостной и инерционный коэффициенты, найденные с помощью метода наименьших квадратов (МНК): $\tilde{A} = 14965$, $\tilde{B} = 717.71$. Полученные коэффициенты используются для описания пористого региона.

2. Обсуждение результатов

Для проведения численного моделирования использовалась цилиндрическая труба с блочно-структурированной сеткой с учетом призматического слоя, масштаб ячейки составляет 0.85 мм, количество ячеек ~ 7106 . Численный расчет проводился в модуле «Аэро-Гидро» комплекса «ЛОГОС» [7] методом моделирования турбулентных течений на основе двухпараметрической модели турбулентности Ментера (SST) в стационарном режиме (рис. 1). Анализируемая неоднородность имеет значительный градиент скорости, который оказывает существенное влияние на однородность потока на протяжении порядка 50 характерных диаметров трубы [1]. Создавая дополнительное гидравлическое сопротивление в потоке в виде ОПС, можно оказать существенное влияние на профиль скорости. Из представленного на рис. 1а распределения отношения модуля скорости к массовой (K_{mass}) в продольном сечении канала видно, что градиент скорости существенно снижается за регионом открытопористой структуры.

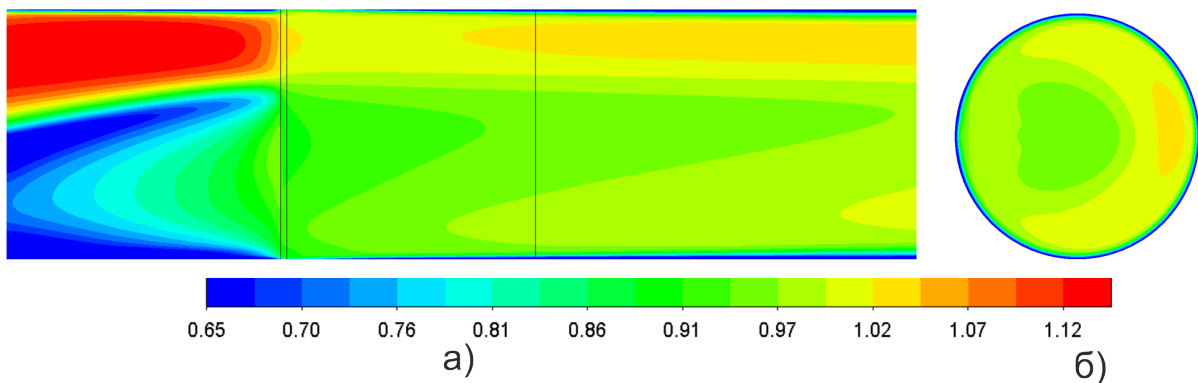


Рис. 1. Распределение отношения модуля скорости к массовой скорости: а) в продольном сечении канала; б) в поперечном сечении канала.

На расстоянии одного характерного диаметра трубы, представленного на рис. 16, диапазон изменения K_{mass} составляет от 0.89 до 1.02, что существенно ниже чем диапазон изменения K_{mass} для модели без пористого региона. Сравнительный анализ относительно оси симметрии K_{mass} для моделей с пористым регионом и без него представлен на рис. 2.

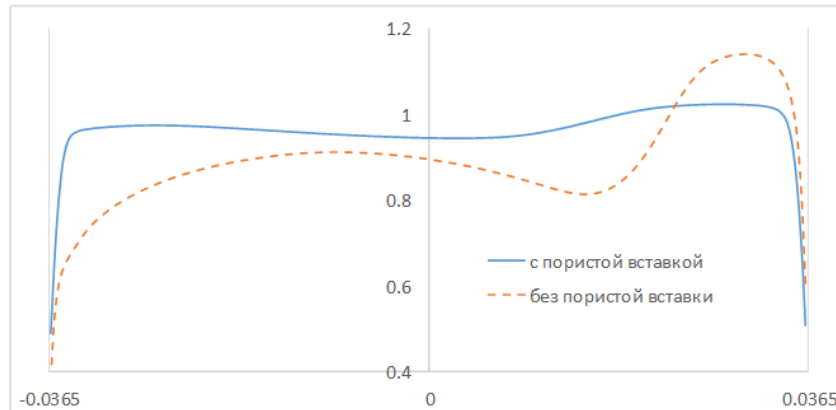


Рис. 2. График распределения отношения модуля скорости к массовой скорости по оси симметрии для расчетов с пористым регионом и без него.

В моделировании трехмерного турбулентного течения на основе модели турбулентности используется тензорно-инвариантные величины завихренности и деформации, которые являются составляющими тензора градиента скорости. Для задач расчета внутренних течений предпочтительно использовать тензор завихренности, поскольку такой параметр наглядно показывает характер турбулентного потока [3].

Как уже отмечалось выше, порожденное поле завихренности для исследуемого профиля скорости сохраняется на расстоянии 20 калибров, но с применением открытопористой структуры наблюдается резкий спад уровня завихренности до значений аналогичных цилиндрической трубы с однородным профилем скорости.

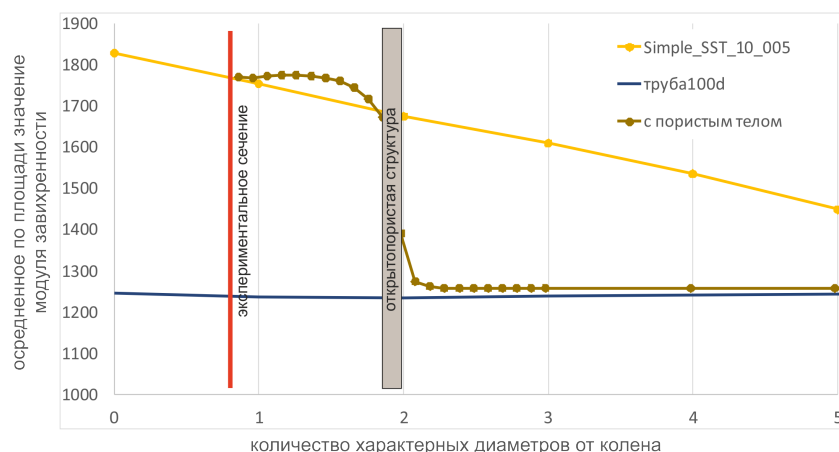


Рис. 3. График распределения уровня завихренности вниз по потоку для расчетов трубы с неоднородным профилем скорости на входе с учетом ОПС и без нее, а также цилиндрической трубы с однородным потоком.

Литература

1. Балабина Т.Ю., Дерюгин Ю.Н., Кудряшов Е.А. Некоторые результаты расчетов турбулентных течений в криволинейных каналах с использованием выхреразрешающего подхода В тезисах докладов X Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022). Саранск.: СВМО, 2022.
2. Аношкин Ю.И., Добров А.А., Кузьма М.М. Разработка и обоснование экспериментального стенда ФТ-18 для исследования процессов смешения в моделях различной геометрии // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. № 2 (125). С. 94-104.–DOI 10.46960/1816-210X2019 2 94
3. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Визуализация данных физического и математического моделирования в газовой динамике // Под ред. Волкова К.Н., Емельянова В.Н. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 338 с.
4. Юдов Ю.В. Численное моделирование теплогидравлических процессов в циркуляционных контурах реакторных установок с водяным теплоносителем: дисс. докт. физ.-мат. наук: 01.04.14 // Юдов Юрий Васильевич; науч. Рук. Ю.А. Мигров; НИТИ. – Сосновый Бор, С. 2021–277.
5. Попов И.А. Гидродинамика и теплообмен в пористых теплообменных элементах и аппаратах. Интенсификация теплообмена: монография // под общ. ред. Ю.Ф. Гортышова. Казань: Центр инновационных технологий, 2007. 240 с.
6. Балабина Т.Ю. К вопросу о методах построения расчетных моделей пористых структур, применяемых в ядерных и изотопных установках, и оценке их неоднородности // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2021. № 4. С. 43-52. DOI: 10.46960/1816-210X 2021 4 43
7. Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Полищук С.Н., Лашкин С.В., Жучков Р.Н., Глазунов В.А., Яцевич С.В., Курулин В.В. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС: физико-математические модели расчета задач аэро-, гидродинамики и тепломассопереноса. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. 67 с.

MSC 65B25

The use of open-porous structures as a flow laminarizer in the channel. Numerical evaluation of the influence of the design on the uniformity of the flow

T.Yu. Balabina, Yu.N. Deryugin

FSUE RFNC – VNIIEF

Abstract: The paper presents the results of a numerical study of the effect of the open-pored structure (OPS) on the laminarization of the flow in the channel. The Forchheimer-Brinkman model was used to model OPS, in which the viscosity and inertia coefficients were obtained by end-to-end calculation of this structure. The distribution of parameters in the flow was obtained from the results of modeling the rotation of the channel. The quantitative criterion for the influence of OPS on the uniformity of the flow is the level of vorticity. The calculations of the flows were performed in a stationary setting according to the multifunctional software package LOGOS on a parallel supercomputer. From the analysis of the results obtained, it is concluded that with the use of OPS, the level of vorticity is significantly reduced and directly affects the velocity profile downstream.

Keywords: porous media, Forchheimer-Brinkman model, vorticity.

References

1. Balabina T.Y., Deryugin Yu.N., Kudryashov E.A. Some results of turbulent flows calculations in curved channels using a vortex-resolving approach. Mathematical modeling, numerical methods and complexes of programs [Electronic resource]: Collection of materials of the X International Scientific Youth School-Seminar named after E.V.Voskresenskoe (Saransk, July 14-18, 2022)/editor: V.F. Tishkin (ed.) [et al.]. Saransk: SVMO, 2022. 3. P. 24-26
2. Anoshkin Yu.I., Dobrov A.A., Kuzma M.M. Development and justification of the FT-18 experimental stand for the study of mixing processes in models of various geometries, Proceeding of the R.E. Alekseev NSTU, 2019, No.2 (125), 3. P. 94-104. DOI 10.46960/1816-210X2019 2 94
3. Volkov K.N., Emelyanov V.N. Modeling of large vortices in calculations of turbulent flows, M, FIZMATLIT, 2008.
4. Yudov Yu.V. Numerical modeling of thermohydraulic processes in the circulation circuits of reactor installations with a water coolant: diss. Doctor of Physical and Mathematical Sciences: 01.04.14 /Yuri Vasilyevich Yudov: Yu.A.Migrov, scientific director: THREDS. - Sosnovy Bor, 2021. 277 p.
5. Popov I.A. Hydrodynamics and heat transfer in porous heat exchange elements and apparatuses. Intensification of heat exchange: a monograph / under the general editorship of Yu.F.Gortyshov. - Kazan: Center of Innovative Technologies, 2007. 240 p.

6. Balabina T.Yu. On the question of methods for constructing computational models of porous structures used in nuclear and isotope installations and assessing their heterogeneity. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2021. No.4. P. 43-52. DOI: 10.46960/1816-210X 2021 4 43
7. Kozelkov A.S., Deryugin Yu.N., Zelensky D.K., Polischuk S.N., Lashkin S.V., Zhuchkov R.N., Glazunov V.A., Yatsevich S.V., Kurulin V.V. Multifunctional software package LOGOS: physico-mathematical models for calculating problems of aerohydrodynamics and mass transfer, Sarov, RFNC-VNIIEF, 2013. 67 p.

УДК 517.9:539.3

Асимптотический анализ математической модели системы «трубопровод – датчик давления»*

Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Алексанин Н.Д., Анкилов Г.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: В статье рассматриваются математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенные для контроля давления рабочей среды в камерах сгорания двигателей. Получены асимптотические уравнения, описывающие совместную динамику упругого чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Разработаны методы решения соответствующих начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Ключевые слова: датчик, упругий элемент, трубопровод, динамика, дифференциальные уравнения.

Пусть на одном конце трубопровода задан закон изменения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), а на другом расположен датчик [1, 2], предназначенный для измерения этого давления и содержащий в качестве составной части чувствительный упругий элемент в виде пластины (рис. 1)

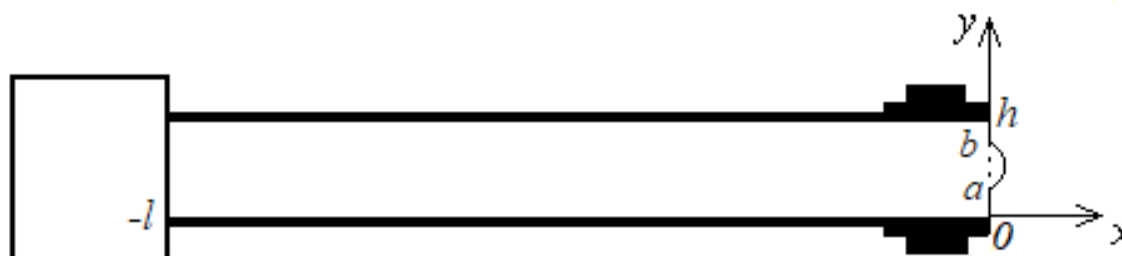


Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления».

Рассмотрим математическую постановку задачи, соответствующую модели системы «трубопровод – датчик давления» с учетом сжимаемости рабочей среды:

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + 2\Phi_y\Phi_{yt} + \Phi_x^2\Phi_{xx} + 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_y^2\Phi_{yy} = a_0^2(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}), \quad x, y \in G, \quad (1)$$

$$\Phi_y(x, 0, t) = \Phi_y(x, h, t) = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad (2)$$

$$\Phi_x - \Phi_y w_y = w_t, \quad x = w(y, t), \quad y \in (a, b), \quad (3)$$

$$\Phi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, h) \quad (4)$$

$$L(w(y, t)) = P - \bar{P}, \quad x = w(y, t), \quad y \in (a, b), \quad (5)$$

$$P(-l, y, t) = \tilde{P}(y, t), \quad y \in (0, h). \quad (6)$$

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00517

В (1)-(6) x, y – декартовы координаты; t – время; $\Phi(x, y, t)$ – потенциал скорости рабочей среды (газа или жидкости); $w(y, t)$ – поперечная деформация (прогиб) упругого элемента датчика, занимающего в недеформированном состоянии положение $x = 0, a < y < b$; $\tilde{P}(y, t)$ – закон изменения давления на выходе $x = -l$ из камеры сгорания двигателя (на левом конце трубопровода); \bar{P} – внешнее воздействие (например, давление окружающей среды); G – область в трубопроводе и в полости датчика, занятая рабочей средой. Давление $P(x, y, t)$, плотность $\rho(x, y, t)$, скорость звука $a(x, y, t)$ в рабочей среде выражаются через потенциал скорости из интеграла Лагранжа-Коши

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\chi-1} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 - \frac{\chi-1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2\right), \quad (7)$$

где индекс 0 соответствует параметрам рабочей среды в состоянии покоя. Дифференциальный (интегро-дифференциальный) оператор $L(w(y, t))$ в уравнении (5), который описывает динамику упругого элемента, можно задать различным способом в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(y, t)) = L^*(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(w, \dot{w}), \quad (8)$$

$$L(w(y, t)) \equiv L^*(w(y, t)) - w'' \left(\mu \int_a^b w'^2(y, t) dy + \eta \frac{d}{dt} \int_a^b w'^2(y, t) dy \right), \quad (9)$$

$$L(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + \left[Dw'' \left(1 - \frac{3}{2}w'^2 \right) \right]'' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(w, \dot{w}), \quad (10)$$

$$L(w(y, t)) \equiv mw_{tt} + \left[Dw_{yy} \left(1 - \frac{3}{2}w_y^2 \right) \right]_{yy} + Nw_{yy} + \beta \left[Dw_{yy} \left(1 - \frac{3}{2}w_y^2 \right) \right]_{yyt} + f(w, w_t), \quad (11)$$

$$L(w(y, t)) \equiv mw_{tt} + D \left(\frac{w_{yy}}{(1+w_y^2)^{3/2}} \right)_{yy} + \beta \left(\frac{w_{yy}}{(1+w_y^2)^{3/2}} \right)_{yyt} + Nw_{yy} + f(w, w_t), \quad (12)$$

$$L(w(y, t)) \equiv -EF \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right]' + m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(w, \dot{w}). \quad (13)$$

Математическую модель с использованием оператора (13) следует дополнить уравнением

$$-EF \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' + m\ddot{u} + g(u, \dot{u}) = 0. \quad (14)$$

В (8)-(14) $u(y, t)$ – продольная деформация упругого элемента; m, D – погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента датчика, представляющего собой деформируемую пластину и расположенного на правом конце трубопровода; N – сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β, η – коэффициенты внутреннего демпфирования (материала элемента); μ – коэффициент, зависящий от прочностных и геометрических характеристик элемента и типа его закрепления; E – модуль упругости материала элемента; F – площадь поперечного сечения элемента; $f(w, \dot{w}), g(u, \dot{u})$ – некоторые линейные или нелинейные функции, зависящие от поперечной или продольной деформации $w(y, t)$ или $u(y, t)$ и скорости деформации $\dot{w}(y, t), \dot{u}(y, t)$;

индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t , точка сверху – частную производную по t , штрих сверху – частную производную по y .

Уравнение (1) описывает движение газа или жидкости в трубопроводе с прямолинейными стенками $y = 0, y = h$; уравнение (5) описывает динамику упругого элемента; условие (6) задает закон изменения давления на входе в трубопровод ($x = -l$); (3), (4) – условия непротекания поверхности элемента ($y \in (a, b)$) и прямолинейной вертикальной части стенки трубопровода ($y \in (0, a) \cup (b, h)$); условия (2) – условия непротекания горизонтальных стенок трубопровода. Имеем нелинейную задачу (1)-(6) для функций $\Phi(x, y, t), w(y, t)$, которую следует дополнить начальными условиями для Φ, w и граничными условиями для w .

Для решения задачи (1)-(6) используем метод малого параметра ε . Таким параметром может служить отношение толщины упругого элемента h_* к его длине $\left(\varepsilon = \frac{h_*}{b-a}\right)$, или отношение ширины трубопровода h к его длине l $\left(\varepsilon = \frac{h}{l}\right)$. Представим функции Φ, P, \tilde{P}, w в виде разложений:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \varepsilon\varphi_1(x, y, t) + \dots, & P(x, y, t) &= P_0 + \varepsilon P_1(x, y, t) + \dots, \\ \tilde{P}(y, t) &= P_0 + \varepsilon P_*(y, t), & w(y, t) &= w_0(y) + \varepsilon w_1(y, t) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Из интеграла Лагранжа-Коши (7) получим асимптотическую формулу для давления

$$P = P_0 - \varepsilon\rho_0\varphi_{1t} + o(\varepsilon). \quad (16)$$

Оставляя старшие члены порядка ε в уравнении (1), получим уравнение для φ_1

$$\varphi_{1tt} = a_0^2(\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy}). \quad (17)$$

Здесь $a_0^2 = \frac{\chi P_0}{\rho_0}$ – квадрат скорости звука в покоящейся среде. Граничное условие (3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ запишется в виде

$$\varphi_{1x}(w_0(y), y, t) - \varphi_{1y}(w_0(y), y, t) \cdot w_0'(y) = \dot{w}_1(y, t). \quad (18)$$

Подставляя (15) в (5) и выбирая $L(w(y, t))$ в виде (8), будем иметь

$$Dw_0'''' + Nw_0'' + f(w_0, 0) = P_0 - \bar{P}, \quad (19)$$

$$m\ddot{w}_1 + Dw_1'''' + Nw_1'' + \beta\dot{w}_1'''' + \frac{\partial f}{\partial w}(w_0, 0)w_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{w}}(w_0, 0)\dot{w}_1 = -\rho_0\varphi_{1t}(w_0, y, t). \quad (20)$$

При выборе $L(w(y, t))$ в виде (11) аналогичная система уравнений будет иметь вид

$$\left[Dw_0'' \left(1 - \frac{3}{2}w_0'^2 \right) \right]'' + Nw_0'' + f(w_0, 0) = P_0 - \bar{P}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{w}_1 + \left[D \left(1 - \frac{3}{2}w_0'^2 \right) w_1'' - 3Dw_0'w_0''w_1' \right]'' + \left[D \left(1 - \frac{3}{2}w_0'^2 \right) \dot{w}_1'' - 3Dw_0'w_0''\dot{w}_1' \right] + \\ + Nw_1'' + \frac{\partial f}{\partial w}(w_0, 0)w_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{w}}(w_0, 0)\dot{w}_1 = -\rho_0\varphi_{1t}(w_0, y, t). \end{aligned} \quad (22)$$

Если $L(w(y, t))$ взять в виде (12), то получим

$$\left(\frac{Dw_0''}{(1+w_0'^2)^{3/2}} \right)'' + Nw_0'' + f(w_0, 0) = P_0 - \bar{P}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{D}{(1+w_0'^2)^{3/2}} \left(w_1'' - \frac{3w_0'w_0''}{1+w_0'^2} w_1' \right) \right]'' + \left[\frac{D}{(1+w_0'^2)^{3/2}} \left(\dot{w}_1'' - \frac{3w_0'\dot{w}_0''}{1+w_0'^2} \dot{w}_1' \right) \right]'' + \\ & + m\ddot{w}_1 + Nw_1'' + \frac{\partial f}{\partial w}(w_0, 0)w_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{w}}(w_0, 0)\dot{w}_1 = -\rho_0\varphi_{1t}(w_0, y, t). \end{aligned} \quad (24)$$

На основе полученных приближенных асимптотических уравнений построены математические модели систем измерения давления в газожидкостных средах. Разработаны методы решения начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными, соответствующих этим моделям [3-9]. Разработан программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [10]. Он предназначен для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющем камеру сгорания двигателя с датчиком, и позволяет получать графики функции $w(y, t)$, характеризующей деформацию упругого элемента датчика, при различном задании механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения давления рабочей среды в двигателе.

Для несжимаемой среды уравнение, описывающее движение газа или жидкости в трубопроводе, имеет вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, h). \quad (25)$$

Тогда математическая постановка задачи в модели несжимаемой среды включает уравнения (2)-(6), (25). Решение этой задачи представим в виде разложения (15). Оператор $L(w(y, t))$ возьмем в виде (8), где функция $f(w, \dot{w}) = \gamma w + \alpha \dot{w}$ (γ – коэффициент жесткости основания, α – коэффициент демпфирования основания). Тогда асимптотическая модель задачи в первом приближении имеет вид

$$\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} = 0, \quad (26)$$

$$\varphi_{1y}(x, 0, t) = \varphi_{1y}(x, h, t) = 0, \quad (27)$$

$$Dw_0'''' + Nw_0'' + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}, \quad (28)$$

$$m\ddot{w}_1 + Dw_1'''' + Nw_1'' + \beta \dot{w}_1'''' + \gamma w_1 + \alpha \dot{w}_1 = -\rho_0\varphi_{1t}(w_0(y), y, t), \quad (29)$$

$$\varphi_{1x}(w_0(y), y, t) - \varphi_{1y}(w_0(y), y, t)w_0'(y) = \dot{w}_1(y, t), \quad (30)$$

$$-\rho_0\varphi_{1t}(-l, y, t) = P_*(y, t), \quad (31)$$

где $P_*(y, t)$ – избыточное давление на входе в трубопровод (в сечении $x = -l$). Предполагая $a = 0$, $b = h$, $P_*(y, t) = P_*(t)$, потенциал $\varphi_1(x, y, t)$ представим в виде

$$\varphi_1(x, y, t) = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^t P_*(z) dz + (x+l)\psi(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(t) \cos \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n (x+l), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{h}. \quad (32)$$

Функция (32) удовлетворяет уравнению (26) и условиям (27), (31).

Функция $w_1(y, t)$ отыскивается в виде разложения в ряд по полной на отрезке $[0, h]$ системе функций $\{q_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

При шарнирном закреплении концов упругого элемента ($w(0, t) = w''(0, t) = 0$, $w(h, t) = w''(h, t) = 0$) функцию $w_1(y, t)$ будем искать в виде

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{h}.$$

Для жесткого защемления концов упругого элемента ($w(0, t) = w'(0, t) = 0$, $w(h, t) = w'(h, t) = 0$) функция $w_1(y, t)$ ищется в виде

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y),$$

где $\xi_n(y) = \operatorname{ch}(\mu_n y) - \cos(\mu_n y) - \frac{\operatorname{ch}(\mu_n h) - \cos(\mu_n h)}{\operatorname{sh}(\mu_n h) - \sin(\mu_n h)} (\operatorname{sh}(\mu_n y) - \sin(\mu_n y))$ и μ_n находятся из уравнения $\operatorname{ch}(\mu_n h) \cos(\mu_n h) = 1$.

Литература

1. Аш Ж. и соавторы Датчики измерительных систем: В 2-х книгах, Мир, М., 1992.
2. Эткин Л.Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, М., 2004. 408 с.
3. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод - датчик давления Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
4. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем, Ульяновск: УлГТУ, 2018. 152 с.
5. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings, 2021. 2333. 120004.
6. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2021. 255(5). P. 587-594.
7. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества, 2020. Т. 22. № 3. С. 352-367.
8. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Алексанин Н.Д., Нуруллин Н.И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал Средневолжского математического общества, 2021. Т.23. № 4. С. 461-471.

9. Вельмисов П.А., Покладова Ю.А. Математическое моделирование систем измерения давления // Вестник Ульяновского государственного технического университета, 2020. № 2-3 (90-91). С. 10-19.
10. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Анкилов А.В. Комплекс программ для математического моделирования механической системы "трубопровод - датчик давления". Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022615319, 30.03.2022, заявка №2022615014 от 28.03.2022.

MSC 35Q35 35Q74

Asymptotic analysis of the mathematical model of the system «pipeline - pressure sensor»

P.A. Velmisov, Yu.A. Tamarova, N.D. Aleksanin, G.A. Ankilov

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: Mathematical models of the mechanical system «pipeline - pressure sensor», designed to control the pressure of the working medium in the combustion chambers of engines, are considered. Asymptotic equations are obtained that describe the joint dynamics of the elastic sensitive element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline. Methods for solving the corresponding initial-boundary value problems for systems of differential equations with partial derivatives are developed.

Keywords: sensor, elastic element, pipeline, dynamics, differential equations.

References

1. Ash ZH. i soavtory Datchiki izmeritel'nykh sistem: V 2-kh knigakh, Mir, M., 1992.
2. Etkin L.G. Vibrochastotnyye datchiki. Teoriya i praktika. Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, M., 2004. 408 p.
3. Ankilov A.V., Vel'misov P.A., Gorbokonenko V.D., Pokladova Yu.V. Matematicheskoye modelirovaniye mekhanicheskoy sistemy "truboprovod - datchik davleniya Ul'yanovsk: UIGTU, 2008. 188 p.
4. Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V. Issledovaniye dinamiki deformiruyemykh elementov nekotorykh aerogidrouprugikh sistem, Ul'yanovsk: UIGTU, 2018. 152 p.
5. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings, 2021. 2333. 120004.
6. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2021. 255(5). P. 587-594.
7. Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Matematicheskoye modelirovaniye sistem izmereniya davleniya v gazozhidkostnykh sredakh // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 2020. 22. 3. P. 352–367.
8. Tamarova Yu.A., Velmisov P.A., Aleksanin N.D., Nurullin N.I. Issledovaniye dinamicheskikh protsessov v sistemakh izmereniya davleniya gazozhidkostnykh sred // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 2021. 23. 4. P. 461–471.
9. Velmisov P.A., Pokladova Y.V. Matematicheskoye modelirovaniye sistem izmereniya davleniya // Vestnik Ul'yanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2020. №2-3(90-91). P.10-19.

10. Tamarova Yu.A., Velmisov P.A., Ankilov A.V. The software package for mathematical modeling of the mechanical system «pipeline - pressure sensor». Certificate of registration of the computer program 2022615319, 30.03.2022. Application No. 2022615014 dated 03/28/2022.

УДК 001.891.57

Математическое моделирование динамики метастазирования опухолей*

Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Виль М.Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация: Процесс распространения опухоли по пораженному органу представляет собой интерференционную конкуренцию опухолевых и здоровых клеток и учитывает ангиогенез опухоли. Представлено расширение построенной модели, основанное на компартментном моделировании, которое имитирует способность злокачественных опухолей к метастазированию и образованию новых очагов поражения. Предполагается, что вторичные опухоли обладают теми же свойствами, что и первичное поражение. В модели с метастазированием рассматриваются два варианта доставки лечения: осуществление постоянного непрерывного лечения и осуществление дискретной доставки лекарств с использованием повторных или запланированных доз. В обеих моделях лечения предполагается, что лекарства потребляются только для подавления злокачественных клеток, а их побочными эффектами пренебрегают. Результаты имитационного моделирования с метастазированием проведены в приложении MATLAB SimBiology Model Analyzer.

Ключевые слова: раковое заболевание, ангиогенез, метастазы, модель лечения, MATLAB SimBiology, математическое моделирование, компартмент-модель.

1. Введение

По оценкам Всемирной организации здравоохранения, рак является второй по частоте причиной смерти в мире, уступая только сердечно-сосудистым заболеваниям. В 2020 году во всем мире было зарегистрировано более 19 миллионов новых случаев рака и почти 10 миллионов смертей, вызванных раком. Между тем, если нынешние тенденции сохранятся, ожидается, что к 2040 году число новых случаев рака в год возрастет до 28 миллионов, что на 47 % больше, чем в 2020 году [1]. В борьбе с раком важны не только ранняя диагностика и своевременная эффективная медицинская помощь пациенту, но и прогнозирование динамики заболевания. Для этой цели используются математические модели заболеваний с последующим имитационным моделированием [2]. Вводя контроль в виде функции, описывающей лечение (например, введение лекарственного средства) в модель заболевания [3], можно оценить его эффективность, рассчитать необходимые дозировки, спрогнозировать влияние лечения на опухоль и сократить время на доклинические исследования новых лекарств и методов лечения.

2. Материалы и методы

Для оценки адекватности построенной модели, сопоставления результатов ее моделирования со статистическими данными, а также анализа построенных моделей используются программные средства, специально разработанные для этих целей. Од-

*Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета, идентификатор проекта: 94062114

ним из таких инструментов является программное обеспечение MATLAB SimBiology, которое предоставляет приложения и программные инструменты для моделирования и анализа динамических систем, уделяя особое внимание количественной системной фармакологии (QSP), фармакокинетике на физиологической основе (PBPK), фармакокинетике/фармакодинамике (PK/PD) и приложениям для биологических систем [4]. Этот пакет предоставляет возможность создавать модели программно с использованием языка MATLAB или интерактивно с помощью редактора блок-схем SimBiology в приложении SimBiology Model Builder.

3. Математическая модель онкологического заболевания

Процесс распространения опухоли по пораженному органу можно рассматривать как конкуренцию двух типов клеток (нормальных и злокачественных) за функциональное пространство [5, 6]. Следует принимать во внимание интенсивное прорастание злокачественных новообразований новыми капиллярами (ангиогенез) [7]. Такой процесс можно рассматривать как появление источника питания, доступного только для опухолевых клеток. Математическая модель, разработанная в [8], представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \mu_u u \left(1 + a_1 \frac{E}{d + E} - \frac{v + u}{K} \right), \\ \frac{dv}{dt} = \mu_v v \left(1 - \frac{v + u}{K} \right), \\ \frac{dE}{dt} = C_E (E_0 - E) - \mu_u u a_2 \frac{E}{d + E}, \end{cases} \quad (1)$$

где u и v – количество злокачественных и нормальных клеток соответственно, K – размер функционального пространства, μ_u и μ_v – параметры, характеризующие темпы роста клеточных популяций, E – объем питания. В правой части системы уравнений (1) выражения $-\frac{\mu_u u^2}{K}$ и $-\frac{\mu_v v^2}{K}$ описывают ограниченную скорость размножения опухолевых и нормальных клеток, соответственно, из-за ограниченного размера функционального пространства K , термины $-\frac{\mu_u uv}{K}$ и $-\frac{\mu_v vu}{K}$ – конкурирующее влияние делящихся и нормальных клеток друг на друга в одном и том же функциональном пространстве. Третье уравнение в этой модели описывает потребление питательных веществ. В этом уравнении E_0 – это количество «резервного» питания, присутствующего в системе при отсутствии опухолевых клеток, a_2 – параметр, характеризующий скорость потребления питательных веществ, C_E – скорость, с которой дополнительное питание поступает в функциональное пространство, $\mu_u u a_1 \frac{E}{d + E}$ – скорость пролиферации опухолевых клеток за счет дополнительного питания, рассчитанная по формуле Моно, $\mu_u u a_2 \frac{E}{d + E}$ – скорость потребления питательных веществ, d – параметр. Предполагается, что $K = 1$, тогда u и v определяются как доли от общего размера функционального пространства.

4. Реализация модели в приложении MATLAB SimBiology

Для реализации системы (1) в приложении SimBiology Model Builder u , v и E , соответствующие одноименным объектам модели, добавляются в созданный по умол-

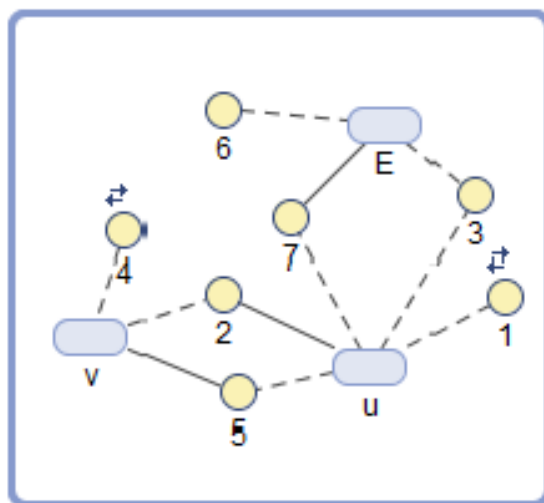


Рис. 1. Блок-схема модели в приложении SimBiology Model Builder

чанию отсек (рис. 1).

Разновидности в SimBiology – это объекты, представляющие количества, концентрации или фракции. Задаются параметры системы уравнений (1): $\mu_u, \mu_v, a_1, a_2, d, C_E$, а также E_0 . Процессы, происходящие с видом или группами видов в результате взаимодействия, описываются в SimBiology с помощью реакций. Члены правых частей системы уравнений (1), также реализуются с помощью реакций. В зависимости от типа реакции и роли в ней того или иного вида [9] формируется уравнение динамики для этого вида с учетом скорости этой реакции. Реакции, реализующие систему уравнений (1) в SimBiology, а также их скорости приведены в таблице 1.

Таблица 1. Записи реакций и их скоростей для модели онкологического заболевания

№	Запись реакции	Скорость реакции	№	Запись реакции	Скорость реакции
1	$u \longleftrightarrow 2u$	$\mu_u u - \mu_u u^2$	5	$u + v \rightarrow v$	$\mu_v uv$
2	$u + v \rightarrow v$	$\mu_v uv$	6	$E \rightarrow 2E$	$C_E(E_0 - E)$
3	$u + E \rightarrow 2u + E$	$\mu_u u a_1 \frac{E}{d + E}$	7	$u + E \rightarrow u$	$\mu_u u a_2 \frac{E}{d + E}$
4	$v \longleftrightarrow 2v$	$\mu_v v - \mu_v v^2$			

5. Метастазирование

Одной из особенностей злокачественного новообразования, отличающей его от доброкачественных новообразований, является его способность к метастазированию. Метастазирование рассматривается как процесс образования вторичных опухолевых очагов (метастазов) в результате распространения злокачественных клеток из первичного очага в другие ткани с образованием в них новых очагов. Распространение раковых клеток происходит после их механического отделения от основного очага

поражения через кровеносную или лимфатическую систему. Этот процесс является одной из наиболее серьезных проблем в лечении рака, поскольку в 90 % случаев в результате образуются метастазы, приводящие к смерти онкологического больного [10, 11]. Способность опухолевых клеток проникать в кровь или лимфу в математической модели метастазирования рассматривается как процесс непрерывного «перелива» доли раковых клеток c ($c \ll 1$) из первичного очага во вторичный. Считается, что клетки могут распространяться по всему организму, образуя новые очаги роста опухолевых клеток. При этом учитывается вероятность s ($s \ll 1$) выживаемости этих клеток вне «материнской» опухоли и возможность их прикрепления к отдаленным органам. Для случая n очагов метастазов, начиная с первого по n -ый, опухолевые клетки последовательно распределяются по ним. С учетом сделанных предположений модель распространения опухолевых клеток по отсекам-очагам с учетом (1) принимает вид ($i = \overline{1, n}$). В уравнениях (2) $c_0 = 0$, $s_0 = 0$ (поток клеток в первый отсек отсутствует), $c_n = 0$ (отток клеток из n -ого отсека отсутствует).

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = \mu_{u_i} u_i \left(1 + a_1 \frac{E_i}{d + E_i} - u_i - v_i \right) + c_{i-1} s_{i-1} u_{i-1} - c_i u_i, \\ \frac{dv_i}{dt} = \mu_{v_i} v_i (1 - u_i - v_i), \\ \frac{dE_i}{dt} = C_E (E_0 - E_i) - \mu_{u_i} u_i a_2 \frac{E_i}{d + E_i}. \end{cases} \quad (2)$$

В системе уравнений (2) предполагается равенство параметров метастазирования и первичной опухоли. В клинической практике онкологические заболевания в зависимости от размера опухоли делятся на четыре стадии, которые можно сравнить с четырьмя равными частями функционального пространства для опухолевых клеток. Из системы (1) следует:

$$0 < u < 1 + a_1 \frac{E_0}{d + E_0} = u_\infty, \quad (3)$$

т. е. объем функционального пространства для u не превышает u_∞ . Поэтому стадии заболевания могут быть заданы следующим образом: $0 < u \leq 0.25u_\infty$ – I стадия; $0.25u_\infty < u \leq 0.5u_\infty$ – II стадия; $0.5u_\infty < u \leq 0.75u_\infty$ – III стадия; $0.75u_\infty \leq u$ – IV стадия. Из анализа статистических данных [7, 8, 12, 13] следует, что наиболее вероятное начало метастазирования – достижение третьей стадии заболевания. С учетом этого в модели (2) принимается, $c_i = 0$ ($i = \overline{1, n-1}$), если $u_i < 0.5u_\infty$.

Из приведенной выше системы уравнений (2), описывающей динамику в отсеках 1-4, мы можем видеть, что они похожи друг на друга, за исключением членов уравнения, учитывающих переход опухолевых клеток между отсеками. Поэтому, чтобы построить модель метастазирования, описанную выше, дублируется модель, структурная схема которой показана на рис. 1. Для систем уравнений (2) создается единый отсек, содержащий отсеки 1-4 и связывающий их.

Химиотерапия проводится путем периодического введения препаратов, которые воздействуют на злокачественные клетки при контакте с ними. В клинической практике лекарственные препараты вводят в течение двух-трех недель [14]. В то же время лечение с периодическим применением методов, отличных от химиотерапии, может длиться от нескольких месяцев до нескольких лет. Это говорит о том, что лекарства непрерывно вводятся во время лечения, их концентрация поддерживается постоян-

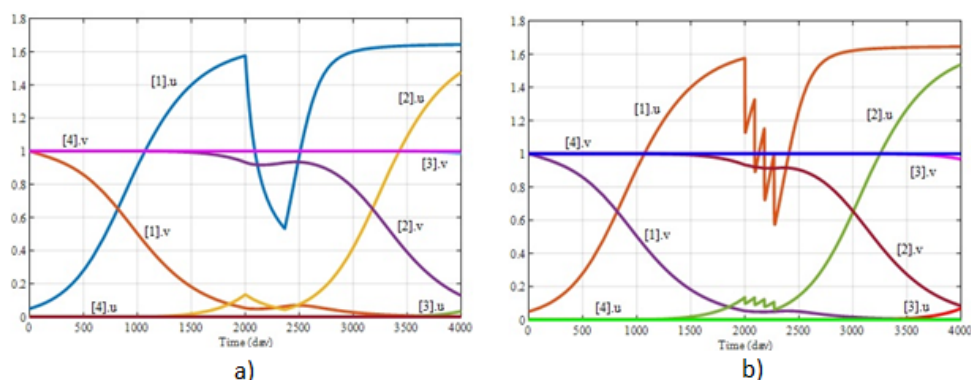


Рис. 2. Результаты имитационного моделирования с непрерывной (а) и дискретной (б) обработкой

ной, а потребление лекарств идет только на подавление раковых клеток.

$$Drug = \begin{cases} Drug_0, & \text{если } t \in [t_1; t_2], \\ 0, & \text{если } t \notin [t_1; t_2], \end{cases} \quad (4)$$

где t_1 – время начала лечения, t_2 – время окончания лечения. В то же время в систему уравнений (2) будет добавлен новый член для уравнений динамики злокачественных клеток: $-u_i l_i Drug$. Этот термин описывает скорость потребления лекарственного средства для подавления злокачественных клеток в i -ом отсеке, l_i – параметр, отражающий эффективность действия лекарственного средства на злокачественные клетки в i -ом компартменте.

На рис. 2 показаны результаты моделирования для непрерывной (2а) и дискретной (2б) моделей. Предполагается, что непрерывное лечение проводится в течение года (от 2000-го до 2365-го дня заболевания), $Drug = 0.007$. Дискретное лечение предполагает, что препарат в дозе $Drug = 0.5$ вводится один раз в три месяца – 4 раза, начиная с 2000-го дня заболевания.

6. Заключение

В работе представлен механизм построения модели онкологического заболевания, ее модификации для метастазирования и два вида лечения. Другие математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, могут быть реализованы с использованием этого механизма. Основываясь на построенных моделях, можно изучать влияние различных лекарств на заболевание и оценивать эффективность новых экспериментальных препаратов в доклинических исследованиях. Варьируя исходные данные, можно смоделировать динамику заболевания не с момента возникновения, а с момента постановки диагноза. Модель метастазирования в данной работе рассматривается как линейное распространение опухоли по органам, но может быть изменена с учетом информации о заболевании.

Литература

1. Sung H., Ferlay J., Siegel R.L., Laversanne M., Soerjomataram I., Jemal A., Bray F. Global Cancer Statistics 2020: GLOBOCAN Estimates of Incidence and Mortality

- Worldwide for 36 Cancers in 185 Countries // *CA Cancer J Clin.* 2021. Vol.71(3). P. 209–249. DOI: 10.3322/caac.21660.
2. Cook S.F., Fiandalo M.V., Watt D.S., Wu Y., Mohler J.L., Bies R.R. Mathematical modeling of intracrine androgen metabolism in prostate cancer: Methodological aspects // *Prostate.* 2018. Vol.78(14). P. 1069-1076. DOI: 10.1002/pros.23665.
 3. Liu P., Liu X. Dynamics of a tumor-immune model considering targeted chemotherapy// *Chaos, Solitons and Fractals.* 2017. Vol.98. P. 7-13. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.03.002.
 4. SimBiology documentation: URL:
<https://www.mathworks.com/products/simbiology.html>.
 5. Pang L., Shen L., Zhao Z. Mathematical Modeling and Analysis of the Tumor Treatment Regimens with Pulsed Immunotherapy and Chemotherapy// *Computational and Mathematical Methods in Medicine.* 2016. P. 1–12. DOI: 10.1155/2016/6260474.
 6. Mahlbacher G.E., Reihmer K.C., Frieboes H.B. Mathematical modeling of tumor-immune cell interactions// *Journal of Theoretical Biology.* 2019. Vol.469(6). P. 47–60. DOI: 10.1016/j.jtbi.2019.03.002.
 7. Busko E.A., Semiglazov V.V., Mishchenk A.V., Kozubova K.V., Shishova A.S., Arabachyan M.I., Kostromina E.V., Krivorotko P.V. The effectiveness of multiparametric ultrasound and compressive elastography in the early diagnosis of breast cancer// *Diagnostic radiology and radiotherapy.* 2019. Vol.4(10). P. 6–13. DOI: 10.22328/2079-5343-2019-10-4-6-13.
 8. Goncharova A.B., Kolpak E.P., Rasulova M.M., Abramova A.V. Mathematical modeling of cancer treatment // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2020. Vol.16(4). P. 437–446. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2020.408.
 9. Goncharova A.B., Vil' M.Y. Simulation of cancer treatment using the MATLAB SimBiology application, modeling of systems and processes. 2021. Vol.14(3). P. 90-96. DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-3-90–96.
 10. Chitty J.L., Filipe E.C., Lucas M.C., Herrmann D., Cox T.R., Timpson P. Recent advances in understanding the complexities of metastasis // *F1000Research.* 2018. Vol.7. P. 1–18. DOI: 10.12688/f1000research.15064.2.
 11. Xiangming G. Cancer metastases: challenges and opportunities// *Acta Pharmaceutica Sinica B.* 2015. Vol.5(5). P. 402–418. DOI:10.1016/j.apsb.2015.07.005.
 12. Yates L.R., Knappskog S., Wedge D., Farmery J.H.R., Gonzalez S. et. al. Genomic Evolution of Breast Cancer Metastasis and Relapse // *Cancer Cell.* 2017. Vol. 32(2). DOI:10.1016/j.ccell.2017.07.005.
 13. Gerlinger M., Rowan A.J., Horswell S. et al. Intratumor heterogeneity and branched evolution revealed by multiregion sequencing// *The New England Journal of Medicine.* 2012. Vol.366(10). P 883–892. DOI: 10.1056/NEJMoa1113205.

14. Chu E., Devita V.T.Jr. A history of cancer chemotherapy. // Cancer Res. 2008. Vol.68(21). P. 8643–8653.

MSC 92C45

Mathematical modeling of tumor cells metastasis dynamics

A.B. Goncharova, E.P. Kolpak, M.Yu. Vil'

St. Petersburg State University

Abstract: The process of tumor spread through the affected organ is an interference competition of tumor and healthy cells and takes into account the angiogenesis of the tumor. An extension of the constructed model based on compartment modeling, which simulates the ability of malignant tumors to metastasize and form new lesions, is presented. It is assumed that secondary tumors have the same properties as the primary lesion. In the metastasis model, two treatment delivery options are considered: the implementation of continuous continuous treatment and the implementation of discrete drug delivery using repeated or scheduled doses. In both treatment models, it is assumed that drugs are used only to suppress malignant cells, and their side effects are neglected. The results of simulation with metastasis were carried out in the MATLAB SimBiology Model Analyzer application.

Keywords: cancer, angiogenesis, metastases, treatment model, MATLAB SimBiology, mathematical modeling, compartment model.

References

1. Sung H., Ferlay J., Siegel R.L., Laversanne M., Soerjomataram I., Jemal A., Bray F. Global Cancer Statistics 2020: GLOBOCAN Estimates of Incidence and Mortality Worldwide for 36 Cancers in 185 Countries // CA Cancer J Clin. 2021. Vol.71(3). P. 209–249. DOI: 10.3322/caac.21660.
2. Cook S.F., Fiandalo M.V., Watt D.S., Wu Y., Mohler J.L., Bies R.R. Mathematical modeling of intracrine androgen metabolism in prostate cancer: Methodological aspects // Prostate. 2018. Vol.78(14). P. 1069-1076. DOI: 10.1002/pros.23665.
3. Liu P., Liu X. Dynamics of a tumor-immune model considering targeted chemotherapy// Chaos, Solitons and Fractals. 2017. Vol.98. P. 7-13. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.03.002.
4. SimBiology documentation: URL: <https://www.mathworks.com/products/simbiology.html>.
5. Pang L., Shen L., Zhao Z. Mathematical Modeling and Analysis of the Tumor Treatment Regimens with Pulsed Immunotherapy and Chemotherapy// Computational and Mathematical Methods in Medicine. 2016. P. 1–12. DOI: 10.1155/2016/6260474.
6. Mahlbacher G.E., Reihmer K.C., Frieboes H.B. Mathematical modeling of tumor-immune cell interactions// Journal of Theoretical Biology. 2019. Vol.469(6). P. 47–60. DOI: 10.1016/j.jtbi.2019.03.002.
7. Busko E.A., Semiglazov V.V., Mishchenk A.V., Kozubova K.V., Shishova A.S., Arabachyan M.I., Kostromina E.V., Krivorotko P.V. The effectiveness of

- multiparametric ultrasound and compressive elastography in the early diagnosis of breast cancer // Diagnostic radiology and radiotherapy. 2019. Vol.4(10). P. 6–13. (in Russian). DOI: 10.22328/2079-5343-2019-10-4-6-13.
8. Goncharova A.B., Kolpak E.P., Rasulova M.M., Abramova A.V. Mathematical modeling of cancer treatment // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2020. Vol.16(4). P. 437–446. (in Russian). DOI: 10.21638/11701/spbu10.2020.408.
 9. Goncharova A.B., Vil'M. Y. Simulation of cancer treatment using the MATLAB SimBiology application // Modeling of systems and processes. 2021. Vol.14(3). P. 90-96. (in Russian). DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-3-90–96.
 10. Chitty J.L., Filipe E.C., Lucas M.C., Herrmann D., Cox T.R., Timpson P. Recent advances in understanding the complexities of metastasis // F1000Research. 2018. Vol.7. P. 1–18. DOI: 10.12688/f1000research.15064.2.
 11. Xiangming G. Cancer metastases: challenges and opportunities // Acta Pharmaceutica Sinica B. 2015. Vol.5(5). P. 402–418. DOI:10.1016/j.apsb.2015.07.005.
 12. Yates L.R., Knappskog S., Wedge D., Farmery J.H.R., Gonzalez S. et. al. Genomic Evolution of Breast Cancer Metastasis and Relapse // Cancer Cell. 2017. Vol.32(2). DOI:10.1016/j.ccell.2017.07.005.
 13. Gerlinger M., Rowan A.J., Horswell S. et al. Intratumor heterogeneity and branched evolution revealed by multiregion sequencing // The New England Journal of Medicine. 2012. Vol. 366(10). P. 883–892. DOI: 10.1056/NEJMoa1113205.
 14. Chu E., DeVita V.T.Jr. A history of cancer chemotherapy. // Cancer Res. 2008. Vol.68(21). P. 8643–8653.

УДК 517.91

О дуге, соединяющей грубый диффеоморфизм на 3-торе с растягивающимся аттрактором и гиперболический автоморфизм Аносова*

Гринес В.З.¹, Круглов Е.В.², Починка О.В.¹

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»¹,
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского²

Аннотация: Хирургия Смейла [1] на трехмерном торе позволяет получить из аносовского автоморфизма коразмерности 1 так называемый DA-диффеоморфизм. При этом в классической модели DA-диффеоморфизм имеет единственное нетривиальное базисное множество, являющееся двумерным растягивающимся аттрактором, а остальные базисные множества являются тривиальными источниками. Динамика произвольного структурно устойчивого 3-диффеоморфизма с таким нетривиальным базисным множеством является обобщением динамики классического DA-диффеоморфизма: обобщенный DA-диффеоморфизм, как и классический, существует только на трехмерном торе и имеет единственное нетривиальное базисное множество, при этом тривиальным базисным множеством такого диффеоморфизма, кроме источниковой, может быть еще и седловая орбита. Однако, соответствующая хирургической операции Смейла дуга диффеоморфизмов не является даже умеренно устойчивой. Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом и Ф. Такенсом [2] высказана гипотеза о построении умеренно устойчивой дуги между диффеоморфизмом Аносова и DA-диффеоморфизмом. Настоящая работа посвящена построению умеренно устойчивой дуги, проходящей через простые бифуркации типа седло-узел или удвоения периода, соединяющей структурно устойчивый 3-диффеоморфизм с двумерным растягивающимся аттрактором и гиперболический автоморфизм Аносова.

Ключевые слова: диффеоморфизм Аносова, бифуркация седло-узел, удвоение периода

1. Формулировка результатов

В работе рассматриваются A-диффеоморфизмы f , заданные на замкнутом трехмерном многообразии M^3 . В силу спектральной теоремы Смейла неблуждающее множество такого диффеоморфизма состоит из конечного числа базисных множеств. Если размерность базисного множества равна трем ($\dim \Lambda = 3$), то, в силу [3, 4], $\Lambda = M^3 = \mathbb{T}^3$, индуцированный диффеоморфизмом f изоморфизм $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^3) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^3)$ определяется унимодулярной гиперболической (не имеющей собственных значений,

*Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ (проект 23-71-30008).

по модулю равных единице) матрицей $A_f \in GL(3, \mathbb{Z})$

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и f топологически сопряжен алгебраическому автоморфизму $\widehat{A}_f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, определенному формулой

$$\widehat{A}_f(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \pmod{1}.$$

Если размерность базисного множества равна двум ($\dim \Lambda = 2$), то, в силу [5], Λ является аттрактором (либо репеллером), т. е. обладает замкнутой окрестностью $U_\Lambda \subset M^3$ такой, что $f(U_\Lambda) \subset \text{int } U_\Lambda$, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^k(U_\Lambda) = \Lambda$ ($f^{-1}(U_\Lambda) \subset \text{int } U_\Lambda$, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(U_\Lambda) = \Lambda$). В этом случае $\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x)$ ($\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x)$). При этом

1) если $\dim W^u(x) = 2$ ($\dim W^s(x) = 2$), то аттрактор (репеллер) Λ называется *растягивающимся (сжимающимся)* и, в силу [5], имеет локальную структуру прямого произведения канторова множества на 2-диск;

2) если $\dim W^u(x) = 1$ ($\dim W^s(x) = 1$), то, согласно [6, Теоремы 1, 2] и [7, Corollary 1.2], каждая компонента связности аттрактора (репеллера) Λ гомеоморфна 2-тору.

В настоящей работе рассматривается класс G структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор Λ . Из результатов работ [8, 9] следует, что остальные базисные множества любого диффеоморфизма $f \in G$ являются тривиальными, а несущее многообразие M^3 диффеоморфно трехмерному тору \mathbb{T}^3 . В работах [10, 11] доказано, что для любого диффеоморфизма $f \in G$ индуцированный изоморфизм $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^3) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^3)$ определяется унимодулярной гиперболической матрицей A_f .

Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов (дугу) $\varphi_t : M^3 \rightarrow M^3$, $t \in [0, 1]$. Дуга φ_t называется *гладкой*, если отображение $F : M^3 \times [0, 1] \rightarrow M^3$, заданное формулой $F(x, t) = \varphi_t(x)$, является *диффеотопией* – гладким отображением, которое при каждом фиксированном t является диффеоморфизмом.

Согласно [2], гладкие дуги φ_t, φ'_t называются *умеренно сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $H_t : M^3 \rightarrow M^3$ такие, что $H_t \varphi_t = \varphi'_{\tau(t)} H_t, t \in [0, 1]$. Если, при этом, семейство гомеоморфизмов H_t непрерывно зависит от t , то дуги называются *сопряженными*.

Гладкая дуга φ_t называется *(умеренно) устойчивой*, если она имеет открытую окрестность в пространстве диффеотопий такую, что любая дуга из этой окрестности (умеренно) сопряжена дуге φ_t .

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует умеренно устойчивая дуга $\xi_t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, $t \in [0, 1]$, соединяющая $\xi_0 = f$ с гиперболическим автоморфизмом $\xi_1 = \widehat{A}_f$.*

2. Схема построения дуги

Пусть $f \in G$. Согласно [3], среди гомотопных тождественному непрерывных отображений тора \mathbb{T}^3 существует единственное отображение $h_f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, полусопрягающее диффеоморфизм f с диффеоморфизмом \widehat{A}_f . В силу [10, 11] $h_f(\Lambda) = \mathbb{T}^3$, и множество $B_f = \{x \in \mathbb{T}^3 : h_f^{-1}(x) \text{ состоит из более, чем одной точки}\}$ есть объединение периодических седловых точек $P_f^i, i \in \{1, \dots, k_f\}$ диффеоморфизма \widehat{A}_f и их двумерных неустойчивых многообразий, причем $h_f^{-1}(P_f^i) = l_f^i \cup b_f^i$.

Обозначим через F^s одномерное слоение тора \mathbb{T}^3 , состоящее из устойчивых многообразий неблуждающих точек диффеоморфизма \widehat{A}_f .

Обозначим через $G_0 \subset G$ множество таких диффеоморфизмов f , для которых множество T_f^i состоит из единственной источниковой точки α_f^i и дуга l_f^i является гладкой.

Пусть $f \in G$. В настоящем разделе мы опишем этапы построения умеренно устойчивой дуги $\xi_t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3, t \in [0, 1]$, соединяющей диффеоморфизм $\xi_0 = f$ с гиперболическим автоморфизмом тора $\xi_1 = \widehat{A}_f$.

Шаг 1. Тривиализация регулярной динамики диффеоморфизма f .

Предложение 1 ([12]). *Для каждого диффеоморфизма $f \in G$ существует умеренно устойчивая дуга $\zeta_t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3, t \in [0, 1]$, соединяющая диффеоморфизм $\zeta_0 = f$ с некоторым диффеоморфизмом $\zeta_1 = g \in G_0$.*

Шаг 2. Построение модельного диффеоморфизма $g_0 \in G_0$, топологически сопряженного диффеоморфизму g .

Лемма 1. *Существует умеренно устойчивая дуга $\eta_t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3, t \in [0, 1]$, соединяющая диффеоморфизм $\eta_0 = \widehat{A}_f$ с некоторым диффеоморфизмом $\eta_1 = g_0 \in G_0$ и обладающая следующими свойствами:*

1) *устойчивое многообразие любой неблуждающей точки диффеоморфизма $\eta_t, t \in [0, 1]$ является подмножеством слоя слоения F^s ;*

2) *любой диффеоморфизм $\eta_t, t \in [0, 1]$ совпадает с диффеоморфизмом \widehat{A}_f вне множества $U = \bigcup_{i=1}^{k_f} U_i$, где U_i – некоторая окрестность точки P_f^i .*

Шаг 3. Приведение связок в каноническое положение.

Лемма 2. *Существует дуга без бифуркаций $\nu_t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3, t \in [0, 1]$, соединяющая диффеоморфизм $\nu_0 = g$ с некоторым диффеоморфизмом $\nu_1 \in G_0$ таким, что*

$$(l_{\nu_1}^i \cup b_{\nu_1}^i) \cap U_i = (l_{g_0}^i \cup b_{g_0}^i) \cap U_i.$$

Лемма 3. *Существует дуга без бифуркаций $\mu_t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3, t \in [0, 1]$, соединяющая диффеоморфизм $\mu_0 = \nu_1$ с некоторым диффеоморфизмом $\mu_1 \in G_0$ таким, что*

$$\mu_1|_U = g_0|_U.$$

Лемма 4. *Существует дуга без бифуркаций $\lambda_t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3, t \in [0, 1]$, соединяющая диффеоморфизм $\lambda_0 = \mu_1$ с некоторым диффеоморфизмом $\lambda_1 \in G_0$ таким, что*

1) $\lambda_t|_U = g_0|_U$;

2) *пересечение устойчивого многообразия любой неблуждающей точки диффеоморфизма λ_1 с множеством U является подмножеством слоя слоения F^s .*

Обозначим через $\beta_t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, $t \in [0, 1]$ гладкую дугу, совпадающую с $\lambda_1^{-1}\eta_{1-t}$ на множестве U и тождественную вне этого множества. Тогда дуга $\lambda_1\beta_t$ соединяет диффеоморфизм λ_1 с некоторым аносовским диффеоморфизмом $a = \lambda_1\beta_1$, локально совпадающим с гиперболическим автоморфизмом \hat{A}_f . Из результатов работы [13] следует, что существует дуга без бифуркаций, связывающая диффеоморфизм a с автоморфизмом \hat{A}_f .

Литература

1. Smale S., Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73, No.1. P. 741-817. Имеется перевод: *Успехи мат. наук* 25(1970), 113-185.
2. Newhouse S.H., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications mathématiques de l'I.H.E.S., 57(1983), P. 5-71.
3. Franks J., "Anosov Diffeomorphisms," Global Analysis. Proc. Simp. in Pure Math., **14**, P. 61-94 (1970).
4. Newhouse S.H., "On codimension one Anosov diffeomorphisms," Amer. J. Math., **92**, 3 (1970), P. 761-770.
5. Плыкин Р.В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла // Матем. сб. 1971. 84(126). 2. P. 301-312.
6. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях // Мат. зам. 2005. 78, No.6. P. 813-826.
7. Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds // Journ. of Modern Dyn. 2010. 3, No.4. P. 517-548.
8. Гринес В.З., Жужома Е.В. Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Известия РАН, серия математическая // 2002. 66(2). С. 3-66.
9. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V., "On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors," Transactions of the American Mathematical Society, 357(2), С. 617 -667 (2005).
10. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V. "The topological classification of orientable attractors on the n-dimensional torus" Russ. Math. Surv. 1979, 34(4), С. 163-164.
11. Гринес В.З., Жужома Е.В. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности ориентируемых аттракторов на трехмерном торе // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. Горький, ГГУ, 1981. С. 89-93.
12. Гринес В.З., Круглов Е.В., Починка О.В. Сценарий простого перехода от структурно устойчивого 3-диффеоморфизма с двумерным растягивающимся аттрактором к DA-диффеоморфизму // Дифференциальные уравнения и динамические системы: Сборник статей. Труды МИАН, 2020. 308. С. 152-166.
13. Gogolev A. Smooth conjugacy of Anosov diffeomorphisms on higher dimensional tori. arXiv:0804.3901v3 [math.DS] 27 Sep 2008, 51 p.

MSC 34D20

On the arc connecting a rough diffeomorphism on a 3-torus with a expanding attractor and Anosov hyperbolic automorphism

V.Z. Grines¹, E.V. Kruglov², O.V. Pochinka¹

National Research University Higher School of Economics¹,
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod²

Abstract: Smale's surgery on a three-dimensional torus makes it possible to obtain a so-called DA-diffeomorphism from an Anosov automorphism of codimension 1. Moreover, in the classical model, the DA-diffeomorphism has a single nontrivial basis set, which is a two-dimensional expanding attractor, and the remaining basis sets are trivial sources. The dynamics of an arbitrary structurally stable 3-diffeomorphism with such a nontrivial basis set is a generalization of the dynamics of classical DA-diffeomorphism: a generalized DA-diffeomorphism, like the classical one, exists only on a three-dimensional torus and has a single nontrivial basis set, while a saddle orbit can also be a trivial basis set of such a diffeomorphism, in addition to the source one. However, the arc of diffeomorphisms corresponding to Smale's surgical operation is not even mildly stable. By S. Newhouse, J. Palis and F. Takens, a hypothesis was proposed about the construction of a mildly stable arc between the Anosov diffeomorphism and the DA-diffeomorphism. In this paper, we discuss the construction of a mildly stable arc passing through simple saddle-node or flip bifurcations, connecting a structurally stable 3-diffeomorphism with a two-dimensional expanding attractor and an Anosov hyperbolic automorphism.

Keywords: Anosov diffeomorphism, saddle-node bifurcation, flip bifurcation

References

1. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73, No.1. P. 741-817. Имеется перевод: Успехи мат. наук 25, 1970. С. 113-185.
2. Newhouse S.H., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications mathematiques le I.H.E.S., 57(1983). P. 5-71.
3. Franks J. "Anosov Diffeomorphisms," Global Analysis. Proc. Simp. in Pure Math., 1970. P. 61-94.
4. Newhouse S.H. On codimension one Anosov diffeomorphisms // Amer. J. Math., 92, 3 (1970). P. 761-770.
5. Plykin R. V. The topology of basis sets for Smale diffeomorphisms // Mathematics of the USSR-Sbornik, 1971. Vol. 13. Issue 2. P. 297-307.
6. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V., Medvedev V.S. On Morse-Smale Diffeomorphisms with Four Periodic Points on Closed Orientable Manifolds // Mathematical Notes, 2003. Vol.74, Issue 3. P. 352-366.
7. Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds // Journ. of Modern Dyn. 2010. 3, No.4. P. 517-548.

8. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V. Structurally stable diffeomorphisms with basis sets of codimension one *Izvestiya: Mathematics*, 2002. Vol.66, Issue 2. P. 223-284.
9. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V. “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors,” *Transactions of the American Mathematical Society*, 2005, 357 (2), P. 617-667.
10. Grines V.Z., E.V.Zhuzhoma. “The topological classification of orientable attractors on the n -dimensional torus” *Russ. Math. Surv.*, 34 (4), 1979. P. 163-164
11. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V. “Necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of orientable attractors on an n - dimensional torus,” *Differential and Integral Equations*. Gorkiy State University, 1981. P. 89-93. [in Russian].
12. Grines V.Z., Kruglov E.V., Pochinka O.V. Scenario of a Simple Transition from a Structurally Stable 3-Diffeomorphism with a Two-Dimensional Expanding Attractor to a DA Diffeomorphism. *Proc. Steklov Inst. Math.* 308, 2020. P. 141–154.
13. Gogolev A. Smooth conjugacy of Anosov diffeomorphisms on higher dimensional tori. arXiv:0804.3901v3 [math.DS] 27 Sep 2008, 51 p.

УДК 519.63

Дифференциальные уравнения в оптимизации каталитических процессов с использованием суперкомпьютерного моделирования*

Губайдуллин И.М.^{1,2}, Коледина К.Ф.^{1,2}

Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН¹,
Уфимский государственный нефтяной технический университет²

Аннотация: В работе представлены результаты исследования двух промышленно важных процессов с научными группами из других регионов. Показаны общие подходы и преимущества каждой из групп: 1) МГТУ им. Н.Э. Баумана – полимеризация, т. е. процесс образования высокомолекулярного вещества (полимера) путём многократного присоединения молекул низкомолекулярного вещества (мономера) к активным центрам в растущей молекуле полимера; 2) ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – течение углеводородного флюида в проточном химическом реакторе со слоем катализатора. В результате совместной работы получены: комплексные математические модели, учитывающие сверхжесткость дифференциальных уравнений и включающие квазигидродинамическую систему уравнений, дополненную уравнениями теплопроводности и уравнениями конвекции-диффузии-реакции для концентраций компонент флюида; специализированная методика решения систем дифференциальных уравнений на основе сеточных методов; параллельная реализация численных алгоритмов на базе технологий MPI и OpenMP; комплекс программ для решения выбранных класса задач; цифровая платформа для проведения масштабных вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: математическое моделирование, полимеризация, сверхжесткие дифференциальные уравнения, углеводородный флюид, численные методы.

1. Постановка задачи

В последнее время предприятия нефтегазовой отрасли (буровые установки добычи, транспортировки, первичная и вторичная переработка, нефтехимия) преимущественно использовали иностранные компьютерные программы для хранения и анализа данных, а также математического моделирования технологических процессов. Зачастую эти программные комплексы работают по принципу «чёрного ящика» – неизвестны математическое описание и алгоритмы решения задач, пользователю доступны только входные и выходные (результаты работы программ) информационные потоки. Опыт работы с такими комплексами показал, что у них имеются свои плюсы и минусы. Из плюсов на сегодняшний день – бесспорно использование компьютерных программ позволяет оперативно принимать оптимальные технические решения химикам-технологам на заводах, что в свою очередь, влияет на качество и масштабы выпускаемых продукции.

Очевидно, что доля программ на основе математического описания в виде систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (СОНДУ), а также в виде уравнений в частных производных постоянно растет. Например, ужесточа-

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема № FMRS-2022-0078).

ются требования к компонентному составу выпускаемых автомобильных бензинов и топлив специального назначения. Если по стандарту Евро-6 требования к содержанию бензола было 1%, то в Евро-7 – уже 0.8 %. Требования к плотности реактивного топлива военного назначения – значения должны превышать 900 кг/м^3 при 20°C . Таких показателей можно добиться только на основе учёта быстрых и медленных химических реакций. Математическое описание таких реакций представляет собой сверхжёсткие СОНДУ, размерности которых порой достигает 100 тысяч уравнений. Описание процессов тепломассопереноса на зерне катализатора с учётом химических процессов в нелинейном многофазном потоке на основе эллиптических, гиперболических и параболических уравнений в частных производных до сих пор нерешённая практическая задача.

В данной работе представлены предварительные результаты совместного математического моделирования двух промышленно важных процессов с нашими коллегами. Первый процесс – полимеризация – процесс образования высокомолекулярного вещества (полимера) путём многократного присоединения молекул низкомолекулярного вещества (мономера) к активным центрам в растущей молекуле полимера исследован совместно с МГТУ им. Н.Э. Баумана. Второй процесс – течения углеводородного флюида в проточном химическом реакторе со слоем катализатора – совместно с коллегами из ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

2. Математическая постановка задачи моделирования процесса полимеризации

Молекула мономера, входящая в состав полимера, образует так называемое мономерное (структурное) звено. Элементный состав (молекулярные формулы) мономера и полимера приблизительно одинаков. При описании кинетики полимеризации возникает трудность в решении СОНДУ, так как число таких полимеров, а следовательно и уравнений в СОНДУ, в общем случае, бесконечно.

Обычно исследователи прибегают к различным методам сокращения размерности, например – применению моментов. Однако есть исследования, где решение таких СОНДУ осуществляется с большим числом уравнений напрямую. В настоящей работе предлагается решать СОНДУ напрямую, ограничить систему и рассмотреть число звеньев в полимере i до 8000.

Число уравнений в системе СОНДУ оценивается по формуле: $2 + (2 \cdot i + 3 \cdot j)$, где i – количество звеньев мономера, j – количество активных центров (АЦ). Требуется рассчитать систему СОНДУ для $i = 8000$, $j = 6$, т. е. с числом дифференциальных уравнений: $2 + (2 \cdot 8000 + 5) \cdot 6 = 96032$ уравнений. Решатели систем СОНДУ [1,2], разработанные группой Маничева Владимира Борисовича, к.ф.-м.н. доцента кафедры РК6 (САПР) МГТУ им. Н. Э. Баумана предназначены для решения систем сверхжёстких СОНДУ очень большой размерности. Написана программа «MANZHUK» (скрипт) на языке С для генерации систем дифференциальных уравнений в программы, описывающих процесс полимеризации. Получен достоверный результат для количества уравнений порядка 2000. Выполнено сравнение с зарубежным математическим пакетом MATLAB Octave. Сравнение показало улучшение результат почти на два порядка точности.

3. Математическая постановка задачи для течения углеводородного флюида в проточном химическом реакторе со слоем катализатора

В данном исследовании ИНК УФИЦ РАН представляют сотрудники лаборатории математической химии и приготовления катализаторов, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – сотрудники отдела № 16 «Проблемы математического моделирования и высокопроизводительных вычислений» во главе д.ф.-м.н. Поляковым Сергеем Владимировичем.

В математической модели процесса необходимо как минимум иметь описание четырех ее составляющих [3, 4]:

- 1) сплошной среды для анализа поля течения флюида;
- 2) химических превращений;
- 3) пористого остова с разной степенью разрешения;
- 4) граничных эффектов.

Современные предлагаемые подходы к моделированию включают в себя: единое осредненное описание всех процессов на основе закона Дарси с учетом упрощенной химической кинетики и раздельное описание всех процессов и стадий на основе методов расщепления и многомасштабности.

Таким образом, итоговый выбор многомасштабного подхода, сочетающий методы сплошной среды и методы частиц заключается в разделении процессов на 4 блока:

- 1) течение двухфазной вязкой теплопроводной жидкости в пористой среде;
- 2) химические превращения;
- 3) деформации пористых материалов под действием давления и тепла;
- 4) граничные эффекты.

В первом приближении были следующие допущения [5]: несущей средой является жидкая часть флюида; продукт реакции также является в основном жидкостью; пористое тело не деформируется; граничные эффекты описываются на макроскопическом уровне. В этих предположениях в модели будут присутствовать две системы уравнений – гидродинамическая и химическая, сопрягаемые в рамках схемы расщепления по физическим процессам. В качестве первой системы выбрана квазигидродинамическая (КГиД) система уравнений, развиваемая в работах Б.Н. Четверушкина, Т.Г. Елизаровой, Ю.В. Шеретова, А.А. Злотника (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, ТГУ, НИУ ВШЭ), дополненная уравнениями теплопроводности и уравнениями конвекции-диффузии-реакции (КДР) для концентраций компонент флюида. В качестве второй системы используется система уравнений химической кинетики [6], описывающая процесс изомеризации в присутствии металлического катализатора, предложенная группой И.М. Губайдуллина и К.Ф. Колединой (ИНК УФИЦ РАН), она уточняет уравнения КДР.

В работе использованы следующие вычислительной математики:

- 1) сеточный метод конечных объемов;
- 2) гибридные нерегулярные сетки;
- 3) треугольные и четырехугольные ячейки;
- 4) явные и неявные схемы по времени;
- 5) итерации для нелинейности.

Для реализации представленных методов применены следующие технологии:

- ◇ Расчетное ядро кода – язык программирования: ANSI C/C++;
- ◇ Параллельные технологии – метод разделения области на домены и параллель-

ные стандарты MPI, OpenMP.

Разработанные алгоритмы легли в основу созданной цифровой платформы, которая включает в себя [7]:

- 1) сервер управления (**Linux**);
- 2) Клиент (интерфейс пользователя) на Python (**Windows, Linux**);
- 3) переносимое расчетное ядро;
- 4) систему визуализации.

4. Заключение

Для исследования двух промышленно важных процессов полимеризации и изомеризации углеводородного флюида, стимулируемого катализатором в проточном реакторе разработаны:

1. Комплексные математические модели, учитывающие сверхжесткость СОНДУ и включающие квазигидродинамическую систему уравнений, дополненную уравнениями теплопроводности и уравнениями конвекции-диффузии-реакции для концентраций компонент флюида.

2. Методика решения систем дифференциальных уравнений на основе сеточных методов.

3. Параллельные реализации численных алгоритмов на базе технологий MPI и OpenMP.

4. Комплекс программ для решения выбранных класса задач.

5. Цифровая платформа для проведения масштабных вычислительных экспериментов.

По разным причинам промышленность отказалась от использования не отечественных программных продуктов практически полностью. Для оперативного создания отечественных программных продуктов необходима консолидация узких специалистов из разных регионов, из разных школ.

Сейчас сложилась патовая ситуация: университеты загружены в основном ненужными бумажными отчётами, часовая нагрузка с каждым годом увеличивается в сторону аудиторных часов. Ведущим преподавателям некогда налаживать тесные контакты с производством, да и менталитет таков: «если кому-то надо – придут». В последнее время на публикации преподавателей, у которых основное место работы университет, введен «мораторий». Академические институты переживают «молодежный голод». При этом маленькие стипендии и точечные гранты – не самая большая проблема, наиболее остро стоит вопрос о перспективе работы молодых кандидатов и докторов наук. Зарплаты остепенённых ученых и преподавателей не позволяют вести качественную научную и образовательную деятельность. Крупные нефтегазовые компании г. Уфы создали свои научные центры, которые столкнулись со следующей проблемой – раздутые штаты и низкая наукоемкость разработанных проектов. На сегодняшний день единственным выходом из сложившейся ситуации видится объединение лучших научных кадров вокруг решения конкретных производственных задач и заключение прямых хозяйственных договоров с предприятиями. Эти работы позволят также подключить будущих молодых ученых – студентов вузов.

Литература

1. Жук Д.М., Кожевников Д.Ю., Маничев В.Б. Проблемы разработки математического ядра для программ моделирования динамики технических

- систем // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС), 2020. № 4. С. 31-38.
2. Маничев В.Б., Митенкова Е.Ф., Фельдман Э.О., Кожевников Д.Ю., Соловьева Е.В. Достоверность и точность решения задач нуклидной кинетики // Информационные технологии, 2020. Т.26. № 4. С. 231-238.
 3. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О квазигазо- и гидродинамических уравнениях бинарных смесей газов // Доклады Академии наук, 2014. Т.459. № 4. 395 с.
 4. Антонов А.Н., Елизарова Т.Г., Четверушкин А.Н., Шеретов Ю.В. Численное моделирование пульсационных режимов при сверхзвуковом обтекании полого цилиндра // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1990. Т.30. № 4. 548 с.
 5. Поляков С.В., Подрыга В.О., Тарасов Н.И. // Материалы VII Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы теории и практики гетерогенных катализаторов и адсорбентов». 28 июня – 1 июля 2023 года. Россия. Владимирская область, г. Суздаль.
 6. Коледина К.Ф., Зайнуллин Р.З., Губайдуллин И.М., Мугаллимова Р.С. // Материалы VII Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы теории и практики гетерогенных катализаторов и адсорбентов». 28 июня – 1 июля 2023 года. Россия. Владимирская область, г. Суздаль.
 7. Тарасов Н.И., Поляков С.В., Подрыга В.О. // Материалы VII Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы теории и практики гетерогенных катализаторов и адсорбентов». 28 июня – 1 июля 2023 года. Россия. Владимирская область, г. Суздаль.

MSC 00A71

Differential Equations in the Optimization of Catalytic Processes by Supercomputer Simulation

I.M. Gubaydullin^{1,2}, K.F. Koledina^{1,2}

Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS ¹, Ufa State Oil Technical University ²

Abstract: The paper presents the results of a study of two industrially important processes with scientific groups from other regions. The general approaches and advantages of the groups are shown: 1) Bauman Moscow State Technical University – polymerization, the process of formation of a high molecular weight substance (polymer) by repeated attachment of molecules of a low molecular weight substance (monomer) to active centers in a growing polymer molecule; 2) Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS – hydrocarbon fluid flow in a flow chemical reactor with a catalyst bed. As a result of the joint approach, the following have been developed: complex mathematical models that take into account the superrigidity of differential equations and include a quasi-hydrodynamic system of equations, supplemented by heat conduction equations and convection-diffusion-reaction equations for fluid component concentrations; technique for solving systems of differential equations based on grid methods; parallel algorithms for the implementation of numerical schemes based on MPI and OpenMP technologies; a set of programs for solving the selected class of problems; digital platform for conducting large-scale computational experiments.

Keywords: mathematical modeling, polymerization, superstiff differential equations, hydrocarbon fluid, numerical methods.

References

1. Zhuk D.M., Kozhevnikov D.Yu., Manichev V.B. Problems of developing a mathematical kernel for programs for modeling the dynamics of technical systems // Problems of developing promising micro- and nanoelectronic systems (MES), 2020. No.4. P. 31-38.
2. Manichev V.B., Mitenkova E.F., Feldman E.O., Kozhevnikov D.Yu., Solovieva E.V. Reliability and accuracy of solving problems of nuclide kinetics // Information technologies. 2020. Vol.26. No.4. P. 231-238.
3. Elizarova T.G., Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N. On quasi-gas- and hydrodynamic equations of binary mixtures of gases // Reports of the Academy of Sciences, 2014. Vol.459. No.4. 395 p.
4. Antonov A.N., Elizarova T.G., Chetverushkin A.N., Sheretov Yu.V. Numerical simulation of pulsation regimes in supersonic flow around a hollow cylinder // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1990. Vol.30. No.4. 548 p.
5. Polyakov S.V., Podryga V.O., Tarasov N.I. Proceedings of the VII All-Russian Scientific Conference "Actual Problems of Theory and Practice of Heterogeneous Catalysts and Adsorbents". June 28 - July 1, 2023. Russia. Vladimir region, Suzdal.

6. Koledina K.F., Zainullin R.Z., Gubaidullin I.M., Mugallimova R.S. Proceedings of the VII All-Russian Scientific Conference "Actual Problems of Theory and Practice of Heterogeneous Catalysts and Adsorbents". June 28 - July 1, 2023. Russia. Vladimir region, Suzdal.
7. Tarasov N.I., Polyakov S.V., Podryga V.O. Proceedings of the VII All-Russian Scientific Conference "Actual Problems of Theory and Practice of Heterogeneous Catalysts and Adsorbents". June 28 - July 1, 2023. Russia. Vladimir region, Suzdal.

УДК 519.633.6 536.21 538.945

Анализ распределения тепла в пленке нитрида ниобия на основе трехмерной модели при импульсном воздействии электрического тока.

Данилова Е.В., Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В работе рассматривается процесс распространения тепла в пленке NbN при прохождении через нее импульса тока на основе неоднородного трехмерного уравнения теплопроводности. Построена 3D модель системы «контакты-пленка-подложка-окружение». Оценен максимальный нагрев пленки. Показано, что материал контактов (бериллиевая бронза) обеспечивает эффективный теплоотвод от сверхпроводящей пленки, находящейся в резистивном состоянии, при протекании через нее тока большой плотности.

Ключевые слова: распределение тепла, неоднородное уравнение теплопроводности, 3D модель, краевая задача, контакты-пленка-подложка-окружение, пленка NbN .

1. Введение

Сверхпроводящие пленки нитрида ниобия (NbN) имеют температуру перехода в сверхпроводящее состояние (T_c) равную 12-17 К и являются одними из наиболее перспективных и исследуемых материалов. За счет простоты изготовления, механической прочности и радиационной устойчивости, пленки NbN активно используются в прикладных целях и фундаментальной науке. Математическое моделирование процесса теплопереноса в системе «контакты-пленка-подложка-окружение» позволяет определить максимальный нагрев пленки при заданной скважности импульса электрического тока амплитудой близкой к критической плотности тока сверхпроводящего состояния NbN . В работе представлены расчеты 3D модели в ПО Comsol Multiphysics на основе трехмерного неоднородного уравнения теплопроводности с учетом расположения теплоотводящих контактов на поверхности пленки NbN , а также длительности и амплитуды импульса тока.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему «контакты-пленка-подложка-термостат» на примере пленки нитрида ниобия, напыленной на кварцевую (SiO_2) подложку (рис. 1).

Образец пленки NbN имеет размеры 9 мм×5 мм×400 нм. Толщина кварцевой подложки равна 1 мм. Прижимные контакты из бериллиевой бронзы имеют ширину 1 мм, толщину 0.13 мм, длину 5 мм и плотно прижаты к пленке. Они имеют высокую теплопроводность при низких температурах. Теплообмен пленки в области контакта происходит по закону Ньютона. Область контакта пленки с кварцевой подложкой остается постоянной поддерживаемой в эксперименте и равной температуре медной подложки (термостат). Для анализа системы использовалось неоднородное

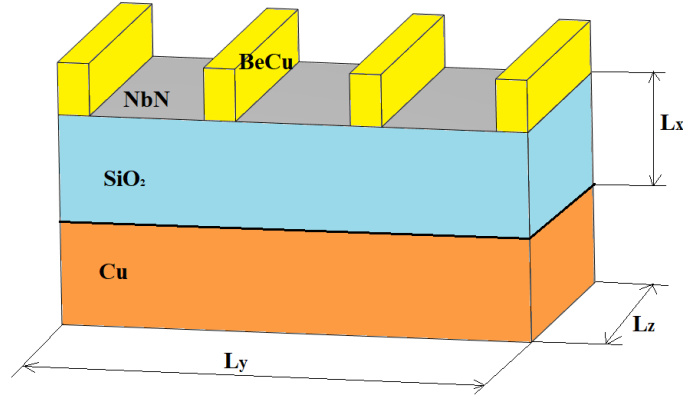


Рис. 1. Модель системы «контакты-пленка-подложка».

трехмерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \Delta T = Q, \quad (1)$$

где T – температура пленки, t – время, x, y, z – координаты системы (рис. 1), $a^2 = \frac{\lambda}{\rho C}$ – коэффициент температуропроводности, C – теплоемкость пленки, ρ – ее плотность, λ – ее коэффициент теплопроводности. Тепловыделение Q вычисляется в соответствии с формулой

$$Q(x, y, z, t) = \frac{P(x, y, z, t)}{c_{NbN} \cdot \rho_{NbN}},$$

$P(x, y, z, t)$ – объёмная плотность мощности источника тепла (плёнки), $c_{NbN} = 17$ Дж/(кг·К) – удельная теплоёмкость плёнки при $T = 14$ К, $\rho_{NbN} = 8400$ кг/м³ – плотность плёнки [3]. В нашем случае сила тока линейно возрастает за время t_0 от 0 до I_{max} . Величина $P(x, y, z, t)$, определяемая законом Джоуля-Ленца:

$$P(x, y, z, t) \equiv P(t) = \begin{cases} \rho \cdot j_0^2 \cdot t^2, & x \leq d, t \leq t_0; \\ 0, & x > d, t > t_0, \end{cases}$$

где $\rho \approx 440 \mu\omega \cdot cm$ – удельное сопротивление плёнки в нормальном состоянии, $j_0 = \frac{I_{max}}{d\omega t_0}$, $t_0 = 0.25$ мс, $I_{max} = 1.12$ А. Данные параметры взяты из условий реального эксперимента по исследованию вольт-амперных характеристик пленок нитрида ниобия, находящихся в резистивном состоянии 1-4, например, выше T_c . Начальное условие определяет начальную температуру системы «контакты-пленка-подложка-окружение» и в нашем случае мы задали равным: $T(x, y, z, 0) = T_0 = 14$ К. Граничное условие при $x = 0$ определялось с учетом закона Ньютона для теплообмена между пленкой и контактами (третья краевая задача):

$$\frac{dT}{dx}(0, y, z, t) = H(y)[T(0, y, z, t) - T_0]$$

В межконтактной области $H = 0$, в области контакта $H = H_0 = 50$ мм⁻¹ [4]. Граничное условие при $x = L_x$ имеет вид: $T(L_x, y, z, t) = T_0 = 14$ К (первая краевая

задача), L_x – толщина подложки вместе с пленкой. Боковые поверхности пленки находятся при $T = 14$ К.

3. Методы и результаты решения

Для решения поставленной задачи использовалось ПО Comsol Multiphysics. Первым шагом делаем построение модели с помощью блока Geometry (Геометрия). При построении следует учитывать, что толщина пленки достаточно мала, а количество элементов расчетной сетке в ней должна быть большое. С учетом этого фактора необходимо связывать все элементы геометрии узлом Form Assembly и выключить Create imprints. Вторым шагом приступаем к заданию материалов. Электросопротивление пленки NbN слабо зависит от температуры и поэтому в расчетах эту зависимость можно не учитывать. Далее выставляем начальные условия. Для моделирования джоулевого нагрева следует использовать связку процедур Electric currents с Heat transfer in solids через интерфейс Electromagnetic heating. Помимо стандартных интерфейсов Current Conservation, Electric Insulation, Initial Values и Continuity добавляем интерфейс Terminal и задаем в него эффективное значение тока в импульсе, отметим области, которые должны быть источником тока – крайние контакты. Переходя к интерфейсу Heat transfer in solids, добавляем Temperature и задаем значение температуры, указывая все охлаждаемые поверхности. Один из самых сложных моментов расчета и построения является задание расчетной сетки. Самым оптимальным вариантом является построение квадратной сетки на поверхности пленки. Необходимо протянуть ее по всей длине до изоляции через Swept, отметить через Distribution количество слоев в доменах. Сетку на лапках можно оставить призматической. Заключительный этап – настройка решателя. В Comsol есть особенные встроенные решатели для таких задач: Frequency-Stationary и Frequency-Transient. Их особенность заключается в том, что потери электрической энергии система считает в частотном режиме, т. е. среднюю за период, а тепловой расчет проводит либо в стационарном, либо во временном диапазоне. Такой решатель допустимо использовать в том случае, если нам надо узнать распределение температуры в момент, сильно больший по сравнению с периодом импульса. Это позволяет получить достаточно хорошее решение за короткое время. Если использовать просто временной диапазон для таких задач, она резко станет гораздо сложнее. В настройках Frequency-Stationary выставляем частоту колебаний. Выполнив все необходимые настройки получаем 3D модель распределения тепла в исследуемой системе (рис. 2-3).

4. Выводы

Как видно из результатов (рис. 2-3) максимальная температура нагрева составляет 14.76 К, и достигается в точке между 2 и 3 контактами. Данная работа подтверждает, что контакты из бериллиевой бронзы являются достаточным теплоотводом. Нагреванием самих контактов можно пренебречь так как масса и теплопроводность контактов много больше, чем пленки. Исследуемая модель показывает, что токи высокой плотности ($10^4 - 10^5$ А/см²) незначительного (~ 0.8 К) нагревают исследуемые образцы пленок, находящихся в резистивном состоянии благодаря контактам из выбранного материала.

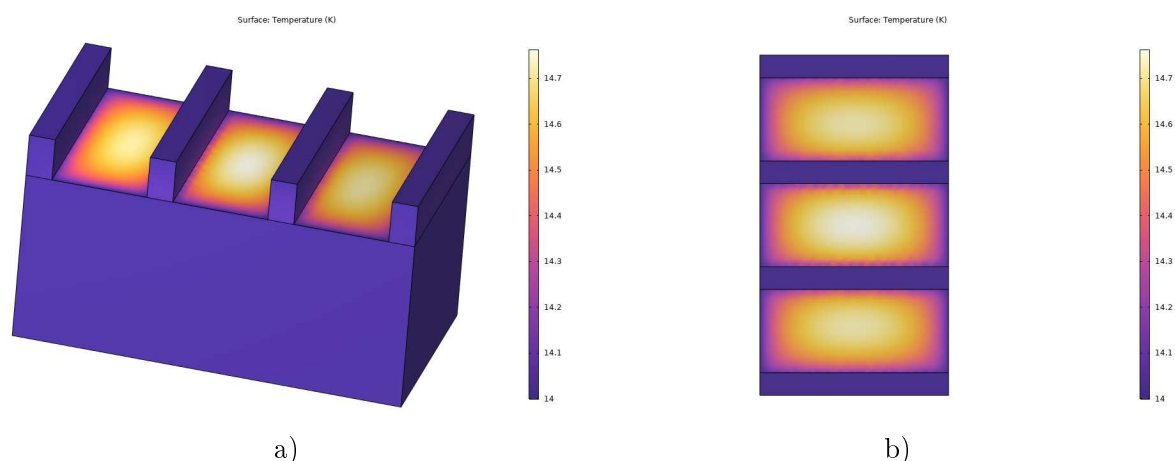


Рис. 2. Распределение тепла в пленке NbN после подачи импульса тока при $t = t_0 = 0.25$ мс:
а) общий вид, б) вид сверху.

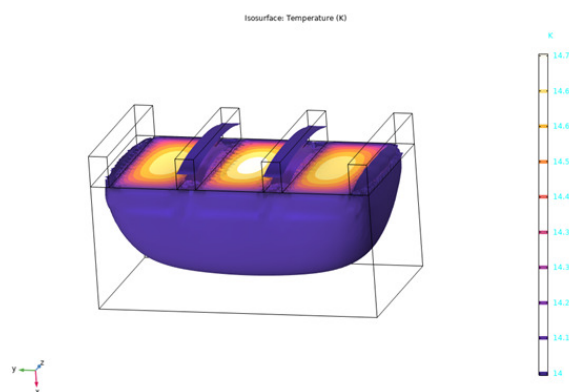


Рис. 3. Изоповерхность температуры исследуемой модели.

Литература

1. Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А., Данилова Е.В., Лапшина Е.А. Математическое моделирование переноса тепла в системе плёнка-подложка-термостат при нагреве электропроводящей плёнки импульсным током высокой плотности // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т.23. №1. С. 82–90.
2. Васютин М.А., Данилова Е.В., Кузьмичев Н.Д. Оценка максимального нагрева пленки NbN токовым импульсом при низких температурах на основе уравнения теплопроводности // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т.29. №3. С. 473–480.
3. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
4. Васютин М.А., Кузьмичев Н.Д., Шилкин Д.А. Моделирование процесса теплоотдачи сверхпроводящих пленок в резистивном состоянии // Журн. техн. физики. 2021. Т.91, Вып. 3. С. 538–541.

MSC 35K200

Analysis of heat distribution in a niobium nitride membrane based on a three-dimensional model under pulsed electric current.

E.V. Danilova, N.D. Kuzmichev, M.A. Vasyutin
National Research Mordovian State University

Abstract: The paper considers the process of heat propagation in an NbN membrane when a current pulse passes through it based on an inhomogeneous three-dimensional thermal conductivity equation. A 3D model of the "contacts–membrane–substrate–environment" system is constructed. The maximum heating of the membrane is estimated. It is shown that the contact material (beryllium bronze BeCu) provides an effective heat sink from a superconducting membrane in a resistive state when a high-density current flows through it.

Keywords: heat transfer, inhomogeneous heat equation, boundary value problem, beryllium bronze, NbN membrane.

References

1. Kuzmichev N.D., Vasyutin M.A., Danilova E.V., Lapshina E.A. Mathematical modeling of heat transfer in a film–substrate–thermostat system when an electrically conductive film is heated by a high-density pulsed current // Journal of the Middle Volga Mathematical Society. 2021. Vol.23. No.1. P. 82-90.
2. Vasyutin M.A., Danilova E.V., Kuzmichev N.D. Estimation of the maximum heating of the NbN film by a current pulse at low temperatures based on the thermal conductivity equation // Thermophysics and aeromechanics. 2022. Vol.29. No.3. P. 473–480.
3. Tables of physical quantities. Guide / Edited by I.K. Kikoin. M.: Atomizdat, 1976. 1008 p.
4. Vasyutin M.A., Kuzmichev N.D., Shilkin D.A. Modeling of the heat transfer process of superconducting films in a resistive state // Journal of Technology. physics. 2021. Vol.91. Issue 3. P. 538-541.

УДК 517.91

Применение метода оптимального демпфирования В.И. Зубова в задаче управления четырёхкарданной гироскопической системой*

Жабко А.П., Жабко Н.А., Яковлев П.В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация: Рассматривается задача построения управления четырёхкарданной гироскопической системой, связанной с кабиной тренажера самолета. Четырёхкарданная система позволяет избежать проблемы наличия в стандартной трёхкарданной гироскопической системе так называемой «мертвой зоны» в случае, когда оси двух карданов системы становятся коллинеарными или близкими к таковым. Такие системы рассматриваются в работах разных авторов. Актуальным остается вопрос выбора критерия оптимальности и построения соответствующего оптимального управления. На основании связей между углами Эйлера движения кабины, угловыми скоростями координатных осей кабины и углами вращения карданов определены достаточные условия разрешимости задачи управления. Предложен алгоритм построения управления карданной системой, оптимальный по отношению к демпфированию переходных процессов движения, по методу В.И. Зубова.

Ключевые слова: демпфирование, оптимальное управление, управление вращением, гироскоп.

1. Введение

Данная работа посвящена описанию управлению тренажером, который можно использовать при тренировке летчиков, космонавтов, спортсменов и цирковых акробатов. Имеется в виду кабина самолета, допускающая реализацию произвольного вращательного движения, которое является кусочно-гладким, т. е. непрерывным и кусочно-непрерывно дифференцируемым. С этой целью рассматривается четырёхкарданная гироскопическая система [1, 2]. В качестве метода оптимизации динамики вращательного движения выбран метод оптимального демпфирования [3, 4], поскольку он позволяет в режиме реального времени минимизировать необходимые изменения скоростей вращения карданов и, следовательно, минимизировать нагрузки на карданные кольца. Исследование является продолжением работы [5].

2. Основные понятия и обозначения

Введем следующие обозначения.

ЗСК – земная система координат, ось X – продольная ось, W_X – угловая скорость поворота вокруг оси X (крен); ось Y – поперечная ось, W_Y – угловая скорость поворота вокруг оси Y (тангаж); ось Z – нормальная ось, W_Z – угловая скорость поворота вокруг оси Z (рысканье).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00531 А)

Орты (i, j, k) обозначают правую систему координат ЗСК, причем $i = X, j = Y, k = Z$.

ССК – связанная с кабиной система координат

Рассмотрим систему из четырех карданов и связанные с ними системы координат:

- ◇ внутренний (Inner) – (i_4, j_4, k_4) , i_4 совпадает с продольной осью кабины самолета;
- ◇ средний (Middle) – (i_3, j_3, k_3) ;
- ◇ внешний (Outer) – (i_2, j_2, k_2) ;
- ◇ дополнительный (Redundant) – (i_1, j_1, k_1) , $k_1 = k$ – совпадает нормальной осью ЗСК, причем, условия вложенности задаются равенствами: $k_1 = k, j_2 = j_1, k_3 = k_2, i_4 = i_3$.

Учитывая вложенность карданов введем в рассмотрение углы Эйлера:

$$\begin{aligned} \phi &= \angle(i, i_1) = \angle(j, j_1), & \psi &= \angle(i_1, i_2) = \angle(k_1, k_2), \\ \theta &= \angle(i_2, i_3) = \angle(j_2, j_3), & \nu &= \angle(j_3, j_4) = \angle(k_3, k_4). \end{aligned}$$

Тогда матрицы преобразования координат определяются равенствами:

$$\begin{aligned} (i_1, j_1, k_1) &= (i, j, k) \cdot S_1, & S_1(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (i_2, j_2, k_2) &= (i_1, j_1, k_1) \cdot S_2, & S_2(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \\ (i_3, j_3, k_3) &= (i_2, j_2, k_2) \cdot S_3, & S_3(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (i_4, j_4, k_4) &= (i_3, j_3, k_3) \cdot S_4, & S_4(\nu) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем связь ЗСК и ССК:

$$(i_4, j_4, k_4) = (i, j, k) \cdot S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu) = (i, j, k) \cdot H(t). \quad (1)$$

Замечание 1. Далее считаем, что координаты $(i_4(t), j_4(t), k_4(t))$ заданы непрерывными и кусочно-непрерывно дифференцируемыми функциями. Тогда нетрудно заме-

туть, что преобразование координат карданов удовлетворяет равенству

$$(i_4(t), j_4(t), k_4(t)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -W_Z(t) & W_Y(t) \\ W_Z(t) & 0 & -W_X(t) \\ -W_Y(t) & W_X(t) & 0 \end{pmatrix} = (i, j, k) \cdot \frac{d}{dt}(H(t)),$$

где матрица перехода $H(t)$ определена равенством (1).

3. Постановка задачи

Задача построения управления четырехкарданной системой заключается в определении углов поворотов карданов $\phi(t), \psi(t), \theta(t), \nu(t)$ по заданному положению кабины, т. е. по заданной матрице $H(t)$, на интервале времени $t \in [0, T]$.

Обозначим через h_1, h_2, h_3 столбцы матрицы H и e_1, e_2, e_3 – стандартный базис в R^3 .

Лемма 1. Если найдены непрерывные и кусочно-непрерывно дифференцируемые функции $(\phi(t), \psi(t), \theta(t))$, обеспечивающие равенство

$$S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot e_1 = h_1, \quad (2)$$

то существует единственное решение $\nu(t)$ уравнения

$$S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu) = H(t). \quad (3)$$

Причем функция $\nu(t)$ определяется из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \end{pmatrix} \cdot S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot \begin{pmatrix} e_2, e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu \\ -\sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Таким образом, исходная задача построения управления гироскопической системой сводится к задаче о разрешимости системы (2).

Введем векторную функцию $\begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) & \gamma(t) \end{pmatrix}^T = S_1^T(\phi(t)) \cdot h_1$.

Лемма 2 (достаточное условие разрешимости). Если $|\beta(t)| < 1$, то существует непрерывное и кусочно-непрерывно дифференцируемое решение $(\psi(t), \theta(t))$ системы (2).

4. Алгоритм построения законов вращения

С учетом условий разрешимости необходимо определить функцию $\phi(t)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|\beta(t)| < 1$. Очевидно, что, в силу ортонормированности матрицы $H(t)$, таких функций имеется бесчисленное множество. Поэтому можно предложить следующий алгоритм построения управлений:

- 1) выбираем необходимую программу тренировок в виде матрицы $H(t)$;
- 2) определяем решение $\phi(t)$ неравенства $|\beta(t)| < 1$;
- 3) опираясь на лемму 2, ищем решение системы (2);
- 4) определяем функцию $\nu(t)$ из системы (4).

5. Демпфирование динамики системы по отношению к изменению углов вращения карданов

В работе [6] используется среднеквадратическое сглаживание скоростей изменения углов карданов. В нашей работе мы предлагаем минимизировать максимальное изменение скорости изменения углов, чтобы уменьшить вероятность критической нагрузки на кардан.

Матрица $H(t)$ является ортогональной, и ее элементы предполагаются непрерывными и кусочно-непрерывно дифференцируемыми функциями. Будем считать также, что на рассматриваемом временном отрезке $[0, T]$ имеется конечное число разрывов первого рода. Тогда можно построить оптимальную демпфирующую функцию по отношению к изменению углов вращения карданов в точках разрыва производной элементов матрицы $H(t)$.

Обозначим

$$\delta\dot{\phi} = \dot{\phi}(\hat{t} + 0) - \dot{\phi}(\hat{t} - 0), \quad \delta\dot{\psi} = \dot{\psi}(\hat{t} + 0) - \dot{\psi}(\hat{t} - 0), \quad (5)$$

$$\delta\dot{\theta} = \dot{\theta}(\hat{t} + 0) - \dot{\theta}(\hat{t} - 0), \quad \delta\dot{\nu} = \dot{\nu}(\hat{t} + 0) - \dot{\nu}(\hat{t} - 0). \quad (6)$$

При выполнении условий леммы 2, а именно, $|\beta(t)| < 1$, существует решение системы уравнений (3).

Тогда демпфирующий функционал суть $V(\phi(t), H(t)) = \max\{|\dot{\delta}\psi|, |\dot{\delta}\theta|, |\dot{\delta}\nu|\}$,

$$V(\phi(t), H(t)) \rightarrow \min_{\phi(t): |\beta(t)| < 1}, \quad t \in [0 : T].$$

Замечание 2. В случае реализации алгоритма, описанного в п. 4, функцию $\phi(t)$ можно выбрать непрерывной, получив тем самым верхнюю оценку оптимального решения от количества разрывов и величины скачков производной матрицы $H(y)$.

Ниже приведены рисунки, иллюстрирующие моделирование работы четырехкарданной системы.

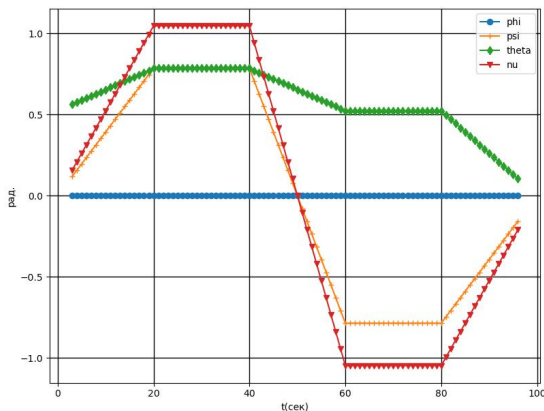


Рис. 1. Углы карданов. Фиксированный дополнительный кардан.

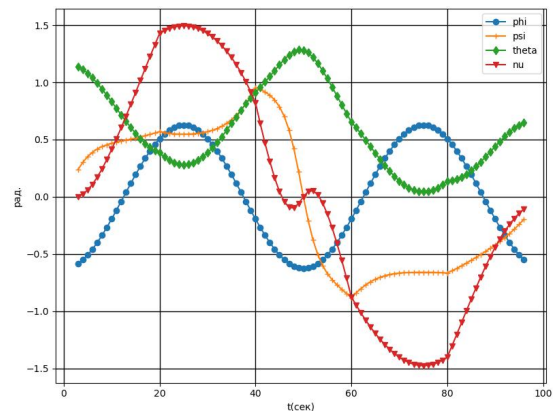


Рис. 2. Углы карданов. Активный дополнительный кардан.

На рис. 1 изображена работа карданов при фиксированном положении дополнительного кардана, $\phi(t) = 0$. На рис. 2 видно, что плавное изменение положения дополнительного кардана существенно влияет на положение остальных трех карданов. Рис. 3 и 4 демонстрируют поведение первых производных (скоростей изменения)

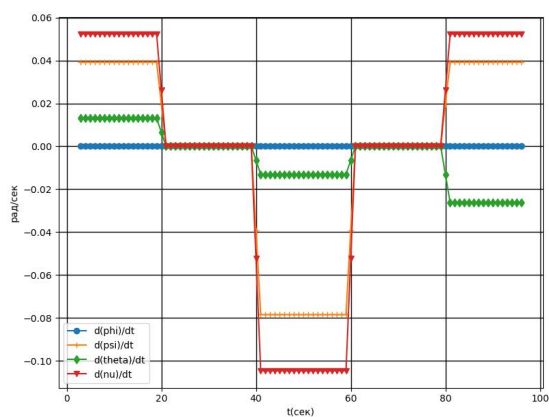


Рис. 3. Первая производная. Фиксированный дополнительный кардан.

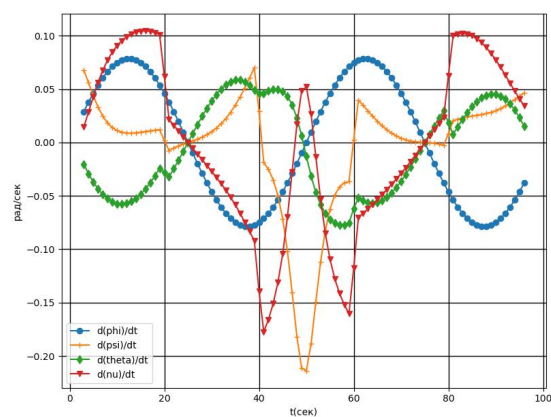


Рис. 4. Первая производная. Активный дополнительный кардан.

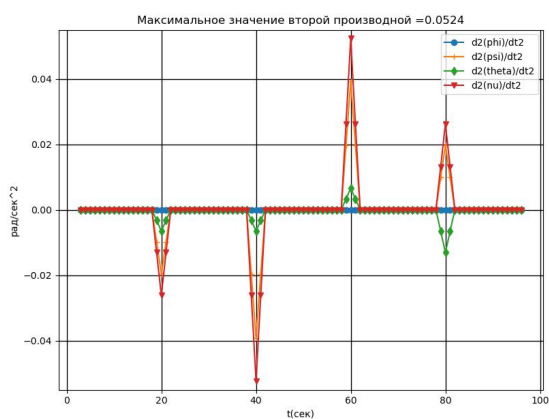


Рис. 5. Вторая производная. Фиксированный дополнительный кардан.

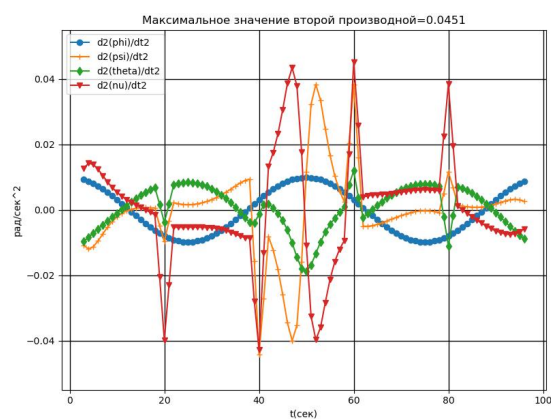


Рис. 6. Вторая производная. Активный дополнительный кардан.

углов карданов. Видно, что в случае активного дополнительного кардана изменение скоростей углов карданов происходит более плавно, что подтверждается графиками вторых производных, показанных на рис. 5 и 6. Максимальное значение второй производной при пассивном дополнительном кардане составила 0.524, а при активном – 0.451.

Литература

1. Jie M., Qinbei X. Four-axis gimbal system application based on gimbal self-adaptation adjustment // Proceedings of the Chinese Control Conference. Hangzhou, China. July 28-30, 2015. P. 8866-8871.
2. McConnel K.G. Kinematic of three-axis gimbal system // Proceedings of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics. S. Carolina, Columbia. March 31-April 01, 1966. P. 515-541
3. Veremey E. I. On practical application of Zubov's optimal damping concept // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы

- управления, 2020. Т.16. Вып.3. С. 293-315.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.307>
4. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975. 496 с.
 5. Жабко А.П., Жабко Н.А., Яковлев П.В. Метод оптимального демпфирования В.И. Зубова в задаче управления одной гироскопической системой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2022. Т.18. Вып. 2. С. 278-284.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.208>
 6. Carter D.R., Duffey P., Bachorski S., Kägi M., Havlicsek H. Weighted least-squares based control for a four axis gimbal set // Technologies for Synthetic Environments: Hardware-in-the-Loop Testing XV, Apr. 2010. P. 76630I-1–76630I-12,
<https://doi.org/10.1117/12.851344>

MSC 34D20

Application of Zubov's method of optimal damping in the problem of controlling a four-gimbal gyroscopic system

A.P. Zhabko, N.A. Zhabko, P.V. Yakovlev
St. Petersburg State University

Abstract: The article considers the control problem of the aircraft cabin simulator with a four-axis gimbal gyroscopic system. The difficulty of the control problem of standard three-axis gimbal gyroscopic system is the presence of the phenomena "gimbal lock" when the two axes of the system become collinear or close to collinear. One of the applied solutions to avoid "gimbal lock" is to use of the fourth additional gimbal. Such fore-axis gimbal systems are presented in the works of various authors. However, the problem of criteria and an optimal control of four-axis gimbal gyroscopic system is still under the question. Optimal dumping algorithm for constructing a control of the gimbal system according to Zubov's method, is proposed.

Keywords: dumping, optimal control, gyroscope, rotation control.

References

1. Jie M., Qinbei X. Four-axis gimbal system application based on gimbal self-adaptation adjustment. *Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hangzhou, China, July 28-30, 2015.* P. 8866-8871.
2. McConnel K.G. Kinematic of three-axis gimbal system. *Proceedings of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics. S. Carolina, Columbia. March 31-April 01, 1966.* P. 515-541
3. Veremey E. I. On practical application of Zubov's optimal damping concept. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes, 2020. Vol.16, iss.3.* P. 293-315.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.307>
4. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya.* M.: Nauka. Publ., 1975. 496 p. (In Russian)
5. Zhabko A.P., Zhabko N.A., Yakovlev P.V. Metod optimalnogo demppirovania V.I. Zubova v zadache upravlenia odnoy giroskopicheskoy sistemy. *Zubov's optimum damping method in the control problem of one gyroscope system. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes, 2022. Vol. 18, iss. 2.* P. 316-325. (In Russian)
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308>
6. Carter D.R., Duffey P., Bachorski S., Kägi M., Havlicsek H. Weighted least-squares based control for a four axis gimbal set *Technologies for Synthetic Environments: Hardware-in-the-Loop Testing XV, Apr. 2010, P. 76630I-1-76630I-12,*
<https://doi.org/10.1117/12.851344>

УДК 532.591

Математическое моделирование динамических процессов в непрерывной электропроводящей среде

Казанков В.К.¹, Перегудин С.И.², Холодова С.Е.¹

Университет ИТМО¹,
Санкт-Петербургский государственный университет²

Аннотация: Представлена математическая модель, описывающая динамику геофизических процессов в электропроводящей несжимаемой жидкости, ограниченной свободной и твёрдой непроницаемой поверхностями с учетом эффектов диффузии магнитного поля, гравитации и силы Кориолиса. Математическая модель строится на основе решения краевой магнитогидродинамической задачи для уравнений в частных производных, учитывающей эффекты длинных волн малой амплитуды. Посредством соответствующих преобразований система дифференциальных уравнений векторного типа в частных производных может быть приведена к одному скалярному уравнению для модифицированной функции возмущения свободной поверхности океана. Проведённый математический анализ представленной модели, используемой для исследования магнитогидродинамических процессов в океане северного полушария, демонстрирует возникновение явления инверсии индуцированного магнитного поля.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, геофизика, океан, электропроводящая жидкость, несжимаемая жидкость, математическое моделирование, инверсия магнитного поля.

1. Введение

Мировой океан играет огромную роль в жизни человечества, поэтому задача определения характеристик динамики морской среды является важной проблемой комплекса океанологических исследований. Поскольку в океане, обладающем относительно малой проводимостью и находящемся в земном магнитном поле, проявляются такие магнитогидродинамические эффекты, как изменения магнитного поля Земли морскими течениями, возникает возможность определения гидродинамических параметров течений и волн по индуцированному ими магнитному полю. Поэтому знания о характере индуцированного магнитного поля могут способствовать получению информации о динамике морской среды, параметрах волнового источника, физических характеристиках морских пород, в частности, электрической проводимости, что и указывает на актуальность изучения морских магнитных полей для океанологических и морских геологических исследований динамических процессов в геосредах. Представленное исследование посвящено теоретическому изучению динамики магнитных полей, индуцированных крупномасштабными гидродинамическими волновыми возмущениями, а именно, рассматривается модель океана, основанная на задаче магнитной гидродинамики, которая в приближении длинных волн малой амплитуды редуцируется к интегрированию одного скалярного уравнения для модифицированной функции, описывающей возмущение свободной поверхности жидкого слоя [1–5]. В работах [5, 6] проведены качественные и численные исследования геофизических процессов во вращающейся электропроводящей жидкости с учётом топографических

особенностей и диссипативных факторов диффузии магнитного поля, а также представлен анализ и способ определения параметров источников гидродинамических возмущений в зависимости от магнитного числа Рейнольдса.

В работе [6] в рамках кинематической теории динамо проводится моделирование инверсий магнитного поля галактического диска с использованием планарного приближения, учитывающего, что галактический диск достаточно тонкий. Возникает интерес к выяснению возможности существования инверсий магнитного поля морской среды, что и проводится в данном исследовании, причём при построении соответствующей модели используется не только уравнение индукции магнитного поля, но и полная система трёхмерных магнитогидродинамических уравнений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим вращающийся слой идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью $z = h_B(x, y, t)$, снизу – твердой непроницаемой поверхностью $z = Z(x, y)$. Используя прямоугольную декартову систему координат, под объемной силой будем понимать вектор, перпендикулярный невозмущенной поверхности и направленный в сторону, противоположную вертикальной оси. Полагая, что ось вращения жидкости совпадает с вертикальной осью, динамика исследуемой сплошной среды будет определяться решением системы дифференциальных уравнений с частными производными [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] - \mathbf{g}z + \frac{1}{\mu\rho} [\text{rot } \mathbf{b}, \mathbf{b}],$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \text{rot } [\mathbf{b}, \mathbf{v}] + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{b}, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

с граничными условиями на поверхностях $z = h_B(x, y, t)$, $z = Z(x, y)$:

$$v_z(x, y, Z, t) = v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + v_y \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad v_z(x, y, h_B, t) = \frac{\partial h_B}{\partial t} + v_x \frac{\partial h_B}{\partial x} + v_y \frac{\partial h_B}{\partial y},$$

$$b_z(x, y, h_B, t) = b_{z0}(x, y, t), \quad b_z(x, y, Z, t) = b_{z0}^{(e)}(x, y, t), \quad p(x, y, h_B, t) = p_0, \quad \mathbf{b}(x, y, h_B, t) = \mathbf{b}_0,$$

где v – скорость жидкости, p – давление, h_B – свободная океаническая поверхность слоя, вращающегося со скоростью $\boldsymbol{\omega}$, g – величина ускорения силы тяжести, ρ – плотность, \mathbf{b} – вектор индукции магнитного поля, μ – магнитная проницаемость, σ – электропроводность среды, b_{z0} , $b_{z0}^{(e)}$ – известные функции, p_0 и \mathbf{b}_0 – заданные константы.

В приближении длинных волн малой амплитуды решение изначальной краевой задачи сводится к решению уравнения

$$\mathcal{D} (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \left(\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - \frac{\mathcal{D}^2}{\mu\rho} \right) \Delta_2 \xi = \frac{b_{z0}^{(e)} - b_{z0}}{(\mu\rho)^2 H_0}$$

для некоторой модифицированной функции возмущения свободной поверхности жидкости ξ , существование решения которого в виде гармонической волны

$$\xi = \text{Im} (A \exp (i(kx + ly - \sigma t)))$$

обосновано в работе [3] как для конечных, так и бесконечного значений магнитного числа Рейнольдса, причём частота волновых возмущений σ является решением дисперсионного уравнения

$$P_n(\sigma) = \sum_{k=0}^n c_k \sigma^k,$$

где $c_k \in \mathcal{C}$ определяются из соотношений для физических величин.

3. Моделирование

В работе [4] рассматривается метод и представляется алгоритм решения дисперсионного уравнения, созданный на основе машинного обучения и итерационного численного метода, что позволило провести анализ эволюции магнитогидродинамических характеристик в зависимости от магнитного числа Рейнольдса [5]. Примем далее значения волновых чисел $k = l = 1$, а проекции внешнего магнитного поля на оси x и y – $b_{0x} = 0$ и $b_{0y} = 1$ соответственно. Тогда с учётом представленных в работе [5] результатов компоненты вектора скорости примут вид

$$\begin{aligned} v_x &= \sigma(\eta + \tilde{b}_x) + i\alpha(\eta + \tilde{b}_y), & v_y &= \sigma(\eta + \tilde{b}_y) - i\alpha(\eta + \tilde{b}_x), \\ v_z &= \left(-\frac{b\sigma}{gH_0}(\sigma^2 + \alpha^2)\eta + v_z \frac{\partial H_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) (z - Z) + v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + v_y \frac{\partial Z}{\partial y}, \end{aligned}$$

где H_0 – функция невозмущенной глубины, а функции $\eta, \tilde{b}_x, \tilde{b}_y$ имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\alpha^2 + \left(\mu\rho(\alpha^2 - \sigma^2) \left(-i\sigma + \frac{2\alpha^2}{R_m} \right) \right)^2 \right) \xi, \\ \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \sigma^2) \left(\mu\rho(\alpha \cdot i\sigma) \left(-i\sigma + \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi \\ (\alpha^2 - \sigma^2) \left(\mu\rho(\alpha \cdot i\sigma) \left(i\sigma - \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Компоненты вектора магнитной индукции выражаются посредством модифицированной функции возмущения свободной поверхности жидкости следующим образом:

$$\begin{aligned} b_x &= \mu\rho(\alpha^2 - \sigma^2)^2 \left(\mu\rho(\alpha \cdot i\sigma) \left(-i\sigma + \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi, \\ b_y &= \mu\rho(\alpha^2 - \sigma^2)^2 \left(\mu\rho(\alpha \cdot i\sigma) \left(i\sigma - \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi, \\ b_z &= i(h_B - Z)(b_x + b_y). \end{aligned}$$

Графическая визуализация проведенного вычислительного эксперимента позволяет утверждать, что динамический процесс имеет выраженную периодическую структуру, при этом через регулярный промежуток времени происходит резкая смена направления течения силовых линий. Это явление, как правило, регистрируется в тонком слое, прилегающем к границе подобластей с разными знаками векторного поля магнитной индукции. Именно в этом пограничном слое градиент поля имеет большое значение и меняет знак. В теории нелинейных параболических уравнений математической физики решения, обладающие такими свойствами, принято называть

контрастными структурами [7]. Подобное поведение магнитного поля описывается, например, в работе [6], где рассматривается кинематическая модель, представляющая структуру планарного галактического магнитного поля, в которой также возникает инверсия магнитного поля. Анализ построенной математической модели также демонстрирует существование у векторного поля магнитной индукции особых точек двух типов, а именно, узла и седла, причем узел, будучи устойчивым в некоторый момент времени, переходит с течением времени в неустойчивое состояние.

4. Заключение

В представленном исследовании предложена математическая модель воспроизведения магнитогидродинамических процессов в океане северного полушария. Продемонстрирован аналитический вид поля скорости и поля магнитной индукции. Проведенный анализ результатов математического моделирования эволюции магнитного поля демонстрирует возникновение явления инверсии индуцированного магнитного поля с некоторой периодичностью. Результаты и методы представленных исследований могут быть использованы с целью определения магнитогидродинамических характеристик океана и морской среды, для оценки параметров источника волнений по имеющейся информации об электромагнитном поле, индуцированном соответствующим гидродинамическим волновым возмущением, содержащему знания о физических характеристиках шельфовой зоны, что является важным аспектом знаний для морских геологоразведочных изысканий и исследований. Представленные исследования могут позволить решать многие технические проблемы гидрофизики, связанные, например, с навигацией подводных аппаратов, поиском полезных ископаемых на морском дне, изучением электромагнитных явлений в океане с возможным установлением их взаимосвязи с динамическими процессами, протекающими в геофизических средах.

Литература

1. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. On integration of the system of MHD equations modeling wave processes in a rotating liquid with arbitrary magnetic Reynolds number // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1268. No 1. P. 012055.
2. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. The influence of dissipative effects on dynamic processes in a rotating electrically conductive liquid medium // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1359. No 1. P. 012118.
3. Холодова С. Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // *Вычислительная математика и математическая физика*. 2008. Т. 48. No 5. 882–898.
4. Казанков В. К., Холодова С. Е. Исследование и анализ уравнения теории идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости // *Процессы управления и устойчивость*. 2021. Т. 8. No 1. 131-137.
5. Холодова С. Е., Казанков В. К., Перегудин С. И. Математический и численный анализ динамических процессов в электропроводящей сплошной среде // *Процессы в геосредах*. 2021. Т. 30. No 4. 1345-1356.

6. Андреасян Р. Р., Михайлов Е. А., Андреасян А. Р. Структура и особенности формирования инверсий галактического магнитного поля // *Астрономический журнал*. 2020. Т. 97. No 3. 179-189.
7. Бутузов В. Ф. О сингулярно возмущенных системах типа реакция-диффузия-перенос // *Дифференциальные уравнения*. 1993. Т. 29. No 5. 833-845.

MSC 34D20

Mathematical modeling of dynamic processes in a continuous electrically conductive medium

S.K. Kazankov¹, S.I. Peregudin², S.E. Kholodova¹
University IFMO¹, Saint-Petersburg State University²

Abstract: A mathematical model describing the dynamics of geophysical processes in an electrically conductive incompressible fluid bounded by free and solid impermeable surfaces is presented, taking into account the effects of magnetic field diffusion, gravity and Coriolis force. The mathematical model is based on the solution of the boundary magnetohydrodynamic problem for partial differential equations, taking into account the effects of long waves of small amplitude. By means of appropriate transformations, the system of differential equations of vector type and partial derivatives can be reduced to one scalar equation for the modified function perturbation of the free surface of the ocean. The mathematical analysis of the presented model used to study magnetohydrodynamic processes in the ocean of the northern hemisphere demonstrates the occurrence of the phenomenon of inversion of the induced magnetic field.

Keywords: magnetic hydrodynamics, geophysics, ocean, electrically conductive fluid, incompressible fluid, mathematical modeling, magnetic field inversion.

References

1. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. On integration of the system of MHD equations modeling wave processes in a rotating liquid with arbitrary magnetic Reynolds number // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1268. No 1. P. 012055.
2. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. The influence of dissipative effects on dynamic processes in a rotating electrically conductive liquid medium // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1359. No 1. P. 012118.
3. Kholodova S. E. Dynamics of a rotating layer of an ideal electrically conductive incompressible fluid // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. V. 48. No 5. 882–898.
4. Kazankov V. K., Kholodova S. E. Investigation and analysis of the equation of the theory of an ideal incompressible electrically conductive fluid (in Russian) // Management processes and sustainability. 2021. T. 8. No 1. 131-137.
5. Kholodova S. E., Kazankov V. K., Peregudin S. I. Mathematical and numerical analysis of dynamic processes in an electrically conductive continuous medium // Processes in geomediuns. 2021. V. 30. No 4. 1345-1356.
6. Andreyan R. R., Mikhailov E. A., Andreyan A. R. Structure and features of formation of galactic magnetic field inversions // Astronomical Journal. 2020. V. 97. No 3. 179-189.
7. Butuzov V. F. On singularly perturbed reaction-diffusion-transfer systems // Differential equations. 1993. V. 29. No 5. 833-845.

УДК 004.042

Универсальный алгоритм обработки сообщений из мессенджеров

Калабкин Е.С., Мамедова Т.Ф.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье представлена разработка универсального алгоритма, направленного на устойчивую выгрузку сообщений из приложения-мессенджера во внешнюю систему. Алгоритм отвечает потребностям эффективной выгрузки сообщений, улучшения доступности данных. Процесс исследования включает изучение принципов выгрузки сообщений из популярных мессенджеров и разработку алгоритма.

Ключевые слова: универсальный алгоритм, мессенджер, выгрузка, внешняя система, оптимизация хранения, доступность данных.

Разработка универсального алгоритма для устойчивой выгрузки сообщений из мессенджера во внешнюю систему важна по следующим причинам.

Доступность и переносимость данных: выгрузка сообщений во внешнюю систему позволяет пользователям получать доступ к своим беседам с различных устройств или платформ. Это облегчает бесшовную синхронизацию и гарантирует, что сообщения останутся доступными, даже если приложение мессенджера недоступно или было удалено. Пользователи могут легко переключать устройства или платформы, сохраняя историю сообщений, что способствует доступности и переносимости данных.

Резервное копирование и восстановление данных: выгрузка сообщений во внешнюю систему обеспечивает механизм резервного копирования для сохранения важных разговоров. Это помогает защитить данные от случайного удаления, потери устройства или сбоев в работе приложений. Храня сообщения во внешней системе, пользователи получают надежную резервную копию, которая позволяет восстановить данные в случае чрезвычайных ситуаций или потери данных, обеспечивая устойчивость и непрерывность данных.

Функциональная совместимость и интеграция: алгоритм выгрузки обеспечивает функциональную совместимость и интеграцию с другими приложениями и системами. Передавая сообщения во внешнюю систему, пользователи могут использовать сторонние сервисы, инструменты анализа или архивные системы. Это расширяет возможности интеграции данных обмена сообщениями с другими приложениями, обеспечивая расширенную аналитику, управление соответствием нормативным требованиям или специализированные рабочие процессы.

Долгосрочное хранение данных: в некоторых случаях, например, в соответствии с юридическими или нормативными требованиями, необходимо длительное хранение данных. Разработка алгоритма выгрузки облегчает архивирование и хранение сообщений за пределами ограничений приложения-мессенджера. Сообщения могут храниться во внешней системе безопасно и надежно, обеспечивая соблюдение политики хранения данных и поддерживая юридические обязательства [1].

Рассмотрим популярные мессенджеры, используемые на территории РФ.

WhatsApp, Telegram и ВКонтakte (VK) имеют различные архитектуры API и

функциональные возможности, что может привести к различиям в их подходах к загрузке сообщений во внешнюю систему. Тем не менее, в общих концепциях и функциональных возможностях имеются некоторые сходства.

Загрузка и обработка мультимедиа:

Поскольку все платформы поддерживают различные типы медиа, такие как изображения, видео и документы, их API предоставляют механизмы для загрузки медиафайлов во внешнюю систему. Это может включать отправку медиафайлов в формате multipart/form-data или предоставление URL-адресов для загрузки медиаконтента во внешнюю систему.

Пакетная обработка или массовая загрузка:

API этих платформ предлагают функции для массовой выгрузки или пакетной обработки сообщений. Это позволяет разработчикам загружать сразу несколько сообщений, сокращая количество запросов к API и оптимизируя процесс загрузки [2].

Обработка ошибок и коды ответов:

Сходства состоят в том, как эти платформы обрабатывают ошибки и предоставляют коды ответов в своих API. Это может включать возврат определённых кодов ошибок или сообщений об ошибках, указывающих на проблемы с загрузкой сообщений, например, сбой аутентификации, недопустимые форматы сообщений.

Алгоритм выгрузки должен отвечать следующим требованиям:

1. Исключение выгрузки дубликатов сообщений при повторном исполнении.
2. Устойчивость к сетевым и API ошибкам.
3. Универсальность использования для различных мессенджеров.

В алгоритме фигурируют такие сущности как: диалоги, чаты, сообщения.

Диалоги введены по причине возможного отсутствия фильтрации определенного типа чатов. К примеру, Telegram не позволяет при получении списка диалогов задать фильтрацию по типам чатов [3].

Каждый шаг конечного автомата содержит в себе более подробную реализацию алгоритма.

В некоторых шагах фигурируют такие сущности как:

1. Networkerror – представляет собой сетевую ошибку, в случае ее получения мы должны перезапустить текущий шаг.
2. Permanenterror – представляет собой постоянную ошибку API, которая исключает целесообразность дальнейшей работы с данной сущностью.
3. Error – представляет собой любую получаемую ошибку.

В заключение следует отметить, что представленный универсальный алгоритм выгрузки сообщений из мессенджеров во внешнюю систему предлагает перспективное решение для решения проблем оптимизации хранения, доступности. Алгоритм учитывает различные факторы, такие как возраст сообщений, их актуальность, чтобы обеспечить эффективную выгрузку сообщений. Благодаря плавной передаче старых или менее актуальных сообщений во внешнюю систему освобождается ценное пространство для хранения внутри приложения мессенджера, что позволяет повысить производительность и удобство работы пользователей.

Универсальный алгоритм выгрузки сообщений из мессенджеров во внешнюю систему вносит ценный вклад в решение проблем с хранением и устойчивостью. Его реализация открывает перспективы для платформ обмена сообщениями, стремящихся оптимизировать использование хранилища, повысить производительность и продвигать экологически безопасные методы. Внедрив этот алгоритм, службы обмена сообщениями могут повысить удовлетворенность пользователей, обеспечить доступность

данных и добиться значительных успехов на пути к более экологичной и эффективной экосистеме обмена сообщениями.

Литература

1. Rahman M.S., Reza H.A. Systematic Review Towards Big Data Analytics in Social Media. *Big Data Mining and Analytics*. 2022.5(3). С. 228-244. URL: <https://doi.org/10.26599/BDMA.2022.9020009>
2. Ekansh Upadhyay. A critical evaluation of handling uncertainty in Big Data processing. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0965997822001491>
3. Jing Zheng, Chaher Alzaman, Ali Diabat. Big data analytics in flexible supply chain networks. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109098>

MSC 94A99

Universal algorithm for processing messages from messengers

E.S. Kalabkin, T.F. Mamedova

National Research Mordovia State University

Abstract: The article presents the development of a universal algorithm aimed at stable unloading of messages from a messenger application to an external system. The algorithm meets the needs of efficient unloading of messages, improving data availability. The research process includes studying the principles of unloading messages from popular messengers and developing an algorithm.

Keywords: universal algorithm, messenger, unloading, external system, storage optimization, data availability.

References

1. Rahman M.S., Reza H.A. Systematic Review Towards Big Data Analytics in Social Media. *Big Data Mining and Analytics*. 2022.5(3). P. 228-244. URL: <https://doi.org/10.26599/BDMA.2022.9020009>
2. Ekansh Upadhyay. A critical evaluation of handling uncertainty in Big Data processing. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0965997822001491>
3. Jing Zheng, ChaherAlzaman, Ali Diabat. Big data analytics in flexible supply chain networks. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109098>

УДК 517.956.223+517.575

Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре

Карачик В.В.

Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)

Аннотация: В работе дается явное представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре.

Ключевые слова: задача Дирихле, полигармоническое уравнение, функция Грина.

1. Введение

Для решения краевых задач для однородных уравнений часто используют функцию Грина этих задач. Явный вид функций Грина для разных краевых задач представлен во многих работах. Например, явный вид функции Грина для 3-й краевой задачи был найден в работах [1-3], а функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений в работах [4,5]. Статьи [6-8] посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, а в работе [9] находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения. В [10-12] приведен явный вид функций Грина для бигармонического и 3-гармонического уравнений в единичном шаре. В связи с бигармоническим уравнением отметим недавние работы [13,14], посвященные условиям разрешимости некоторых нестандартных задач в шаре для бигармонического уравнения. В работе [15] на основании интегрального представления функций класса $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ даются интегральные представления решений задач Навье [16] и Рикье-Неймана [17] для бигармонического уравнения в единичном шаре, а также строятся функции Грина этих задач. В работах [18,19] эти результаты продолжают на полигармоническое уравнение. Функция Грина применяется также и для исследования нелокальных уравнений. Например, в работе [20], исследована разрешимость четырех краевых задач для одного нелокального бигармонического уравнения с инволюцией. Отметим также некоторые недавно вышедшие работы по построению функции Грина различных краевых задач [21-24]. В настоящей работе, исследуется представление решений однородной задачи Дирихле для m -гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad (1)$$

$$u|_{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\partial S} = 0. \quad (2)$$

2. Фундаментальное решение

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N} + 1)$ и дополнение к нему

$\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \dots, 2m\}$. Поскольку множество \mathbb{N}_m^c – конечное, то \mathbb{N}_m – бесконечное. Ясно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. Рассмотрим фундаментальное решение m -гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ в виде

$$\mathcal{E}_{2m}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m (2, 2)_{m-1}}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m^* (2, 2)_{m-1}} \left(\ln |x - \xi| - \sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c. \end{cases}$$

Здесь $(a, b)_k = a(a+b) \dots (a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a, b)_0 = 1$, а символ $(a, b)_k^*$ – означает, что если среди сомножителей $a, (a+b), \dots, (a+kb-b)$, входящих в $(a, b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2, 2)_3^* = (-2) \cdot 1 \cdot 2 = -4$. Кроме того, если в сумме, входящей в (3) верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю.

Замечание 3. Фундаментальное решение $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$ незначительно отличается от фундаментального решения полигармонического уравнения $G_{m,n}(x)$ рассматриваемого С.Л. Соболевым в [25]. При $n \in \mathbb{N}_m$ отличие в множителе $(-1)^m$, а при $n \in \mathbb{N}_m^c$ различие более заметно: вместо $\ln(C|x|)$, как у Соболева, берется выражение $\ln|x| - \sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k}$. Введем обозначение $\mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) = \mathcal{E}_{2m}\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right)$.

Лемма 1. Симметричная функция $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$ является m -гармонической по $x \in S$ при $x \neq \xi$. Симметричная функция $\mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi)$ является m -гармонической по $x \in S$ при $\xi \in \bar{S}$.

Замечание 4. В работе [19] использовалось элементарное решение полигармонического уравнения $E_{2m}(x, \xi)$, которое связано с функцией $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$ равенством

$$E_{2m}(x, \xi) = \begin{cases} \mathcal{E}_{2m}(x, \xi), & n \in \mathbb{N}_m \\ \mathcal{E}_{2m}(x, \xi) - \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m^* (2, 2)_{m-1}} \sum_{k=n/2}^{m-1} \frac{1}{2k}, & n \in \mathbb{N}_m^c \end{cases}.$$

Такая функция $E_{2m}(x, \xi)$ обладает свойством $\Delta_x E_{2m}(x, \xi) = -E_{2m-2}(x, \xi)$ при $x \neq \xi$. Это равенство применялось при построении функции Грина задачи Рикье-Неймана.

3. Функция Грина

Теперь мы можем получить представление функции Грина задачи Дирихле (1)-(2). Введем оператор $\Lambda u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$.

Теорема 1. Функция Грина $G_{2m}(x, \xi)$ задачи Дирихле (1)-(2) при $n \geq 2$ и $m \in \mathbb{N}$ может быть записана в виде

$$G_{2m}(x, \xi) = \mathcal{E}_{2m}(x, \xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2 - 1)^k (|\xi|^2 - 1)^k}{(2m-2, -2)_k (2, 2)_k} \mathcal{E}_{2m-2k}\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right). \quad (3)$$

Функция $G_{2m}(x, \xi)$ является m -гармонической по $x \in S$, $x \neq \xi \in \bar{S}$ и удовлетворяет равенствам

$$G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0, \quad \frac{\partial G_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu}|_{x \in \partial S} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} G_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu^{m-1}}|_{x \in \partial S} = 0, \quad \xi \in S.$$

Замечание 5. При $n = 2$, в соответствии с [10, теорема 2.3], функция Грина имеет вид

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{4} \left(E_2^*(x, \xi) + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

Формула (4) совпадает с (3). Действительно, поскольку $\mathbb{N}_2^c = \{2, 4\}$, а $\mathbb{N}_1^c = \{2\}$, то в силу замечания 2 имеем

$$E_2(x, \xi) = \mathcal{E}_2(x, \xi), \quad E_4(x, \xi) = \mathcal{E}_4(x, \xi) - \frac{|x - \xi|^2}{(0, 2)_2^*(2, 2)_1} \sum_{k=1}^1 \frac{1}{2k} = \mathcal{E}_4(x, \xi) - \frac{|x - \xi|^2}{8}.$$

Подставляя эти значения в (4) получим формулу (3)

$$G_4(x, \xi) = \mathcal{E}_4(x, \xi) - \frac{|x - \xi|^2}{8} - \mathcal{E}_4^*(x, \xi) + \frac{\left| \frac{x}{|x|} - |x|\xi \right|^2}{8} - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{4} \left(\mathcal{E}_2^*(x, \xi) + \frac{1}{2} \right) = \mathcal{E}_4(x, \xi) - \mathcal{E}_4^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{4} \mathcal{E}_2^*(x, \xi).$$

При $m = 3$ и $n = 4$ имеем $2 \in \mathbb{N}_2^c$. В этом случае в [12, теорема 2] также было получено представление функции Грина, которое тоже совпадает с формулой (3).

4. Полиномиальная правая часть

Рассмотрим простейший частный случай полиномиальной правой части уравнения (1).

Теорема 2. Пусть в уравнении (1) $f(x) = |x|^{2l} H_k(x)$, где $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. Тогда решение задачи Дирихле (1)-(2) имеет вид

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{|\xi| < 1} G_{2m}(x, \xi) |x|^{2l} H_k(\xi) d\xi = \left(|x|^{2l+2m} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{l+m}{i} (|x|^2 - 1)^i \right) \frac{H_k(x)}{(2l+2, 2)_m (2l+2k+n, 2)_m},$$

где $(a, b)_m$ – обобщенный символ Похгаммера.

Литература

1. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Robin function // Complex Variables and Elliptic Equations. 2013. Vol.58. No.4. P. 483-496.
2. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. Vol.6. No.3. P. 163-172.
3. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // Advances in Pure and Applied Mathematics. 2019. Vol.10. No.3. P. 203-214.

4. Ying Wang, Liuqing Ye. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2013. Vol.58. No.1. P. 7-22.
5. Ying Wang. Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2014. Vol.59. No.5. P. 732-749.
6. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m // Palermo Rend. 1905. Vol.20. P. 97-135.
7. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Var. Elliptic Equ. 2008. Vol.53. P. 177-183.
8. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2012. Т.48, № 3. С. 435-438.
9. Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2021. Vol.9. No.16. 1907.
10. Karachik V.V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. Vol.64. No.9. P. 1500-1521.
11. Карачик В.В. О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т.59. № 1. С. 71-86.
12. Карачик В. В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Матем. заметки. 2020. Т.107. № 1. С. 87-105.
13. Карачик В. В., Торебек Б. Т. О задаче Дирихле-Рикье для бигармонического уравнения // Матем. заметки. 2017. Т.102. № 1. С. 39-51.
14. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Математические труды. 2016. Т.19. № 2. С. 86-108.
15. Карачик В.В. Функции Грина задач Навье и Рикье-Неймана для бигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2021. Т.57. № 5. С. 673-686.
16. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equations. 2009. Vol.54. P. 79-93.
17. Карачик В.В. Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2018. Т.54. № 5. С. 653-662.
18. Karachik V.V. The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball // Journal of mathematical sciences. 2023. Vol.269. No.2. P. 189-204.
19. Karachik V.V. Riquier-Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // Mathematics. 2023. Vol.11. No.4. 1000.
20. Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball // Mathematics. 2022. Vol.10. No.7. 1158 p.

21. Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B. Remark on Robin problem for Poisson equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2017. Vol.62. No.10. P. 1589-1599.
22. Akel M., Begehr H. Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains // Mathematische Nachrichten. 2017. Vol.290. No.4. P. 490-506.
23. Lin H. Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. Vol.67. P. 79-95.
24. Begehr H., Burgumbayeva S., Dauletkulova A., Lin H. Harmonic Green functions for the Almaty apple // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020, Vol.65. No.11. P. 1814-1825.
25. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

MSC 31B30

The Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball

V.V. Karachik

South Ural State University (NRU)

Abstract: The paper gives an explicit representation of the Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in the unit ball.

Keywords: Dirichlet problem, polyharmonic equation, Green's function.

References

1. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Robin function // Complex Variables and Elliptic Equations, 2013. Vol.58. No.4. P. 483-496.
2. Sadybekov M. A., Torebek B. T., and Turmetov B. Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. Vol.6 No.3. P. 163-172.
3. Karachik V. V., Turmetov B. Kh. On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // Advances in Pure and Applied Mathematics. 2019. Vol.10. No.3. P. 203-214.
4. Ying Wang, Liuqing Ye. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2013. Vol.58. No.1. P. 7-22.
5. Ying Wang. Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2014. Vol.59. No.5. P. 732-749.
6. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m // Palermo Rend. 1905. Vol.20. P. 97-135.
7. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Var. Elliptic Equ, 2008. Vol.53. P. 177-183.
8. Kal'menov T.Sh., Suragan D. On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation // Differential Equations. 2012. Vol.48. No.3. P. 441-445.
9. Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2021. Vol.9. No.16. 1907.
10. Karachik V.V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. Vol.64. No.9. P. 1500-1521.
11. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Ball // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol.59. P. 66-81.

12. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Triharmonic Equation in the Ball // *Mathematical Notes*. 2020. Vol.107. P. 105-120.
13. Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet-Riquier problem for biharmonic equations // *Mathematical Notes*. 2017. Vol.102. P. 31-42.
14. Karachik V.V. A Neumann-type problem for the biharmonic equation // *Siberian Advances in Mathematics*. 2017. Vol.27. P. 103-118.
15. Karachik, V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier-Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball // *Differential Equations*. 2021. Vol.57. No.5. P. 654-668.
16. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2009. Vol.54. P. 79-93.
17. Karachik V.V. Riquier-Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball // *Differential equations*. 2018. Vol.54. P. 648-657.
18. Karachik V.V. The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball // *Journal of mathematical sciences*. 2023. Vol.269. No.2. P. 189-204.
19. Karachik V.V. Riquier-Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // *Mathematics*. 2023. Vol.11. No.4. 1000.
20. Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball // *Mathematics*. 2022. Vol.10. No.7. P. 1158.
21. Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B. Remark on Robin problem for Poisson equation // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2017. Vol.62. No.10. P. 1589-1599.
22. Akel M., Begehr H. Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains // *Mathematische Nachrichten*. 2017. Vol.290. No.4. P. 490-506.
23. Lin H. Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2020. Vol.67. P. 79-95.
24. Begehr H., Burgumbayeva S., Dauletkulova A., Lin H. Harmonic Green functions for the Almaty apple // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2020, Vol.65. No.11. P. 1814-1825.
25. Sobolev S.L. *Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction*. Nauka, Moscow, 1974; Gordon and Breach, Montreux, 1992.

УДК 517.957

О моделировании и идентификации параметров распределенных формаций*

Косов А.А., Семенов Э.И., Толстихин А.А.

Институт динамики систем и теории управления имени В.М.Матросова СО РАН

Аннотация: Рассматриваются вопросы моделирования и идентификации параметров для формаций с распределенными характеристиками. Дано развитие методов построения точных решений нелинейных систем типа реакции-диффузии, которые можно использовать для моделирования распределенных формаций. Предложено использовать био-инспирированные алгоритмы для решения задач идентификации параметров формаций с распределенными характеристиками.

Ключевые слова: уравнения параболического типа, точные решения, математическое моделирование формаций, идентификация параметров, мониторинг полей.

1. Введение

В последнее десятилетие происходит быстрое развитие таких новых типов управляемых систем, как беспилотные летательные аппараты, автономные подводные роботы и другие системы взаимодействующих динамических объектов, образующих движущиеся формации [1]. Они находят применение во многих областях техники. При этом наблюдается тенденция к миниатюризации подвижных объектов, необходимость их организации в рои или стаи, включающие очень большое число объектов, что неизбежно приведет к появлению описания их моделей в терминах макропараметров (таких, как плотности, концентрации и т. п.), аналогично тому, как это происходило на этапе становления гидро- и газодинамики, термодинамики, химической кинетики и т. д. Математические модели такого рода систем с распределенными параметрами обычно описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Дифференциальные уравнения в частных производных начали использоваться при моделировании движения формаций подвижных объектов с распределенными характеристиками. В [2] приводится одномерное уравнение в частных производных Фоккера-Планка, описывающее диффузию плотности агентов. Здесь же указано также, что для описания изменения плотности роя используют линейное одномерное уравнение реакции-диффузии. В [3] для моделирования формации с управлением по принципу отклонения от движения лидера применялось одномерное уравнение параболического типа.

Ранее авторами была предложена [4] математическая модель процесса распространения двух взаимодействующих распределенных формаций роботов с некоторой базы в окружающее пространство, описываемая системой двух уравнений параболического типа. Были построены параметрические семейства точных решений, которые можно использовать для отыскания законов управления граничными условиями, обеспечивающих распространение формаций на область заданных размеров за заданное время. В докладе будет представлена модель более общего вида, в которой коэффициенты амортизации могут зависеть от текущей плотности формации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 22-29-00819

Используя точные решения модели, можно получать описание процесса распространения взаимодействующих формаций с базы на прилегающую территорию. При этом интерес представляют такие основные параметры формации, как расположение базы и линий уровня постоянной плотности, показывающих форму уже освоенной области и темпы расселения.

С другой стороны, идентификация таких основных параметров распределенной формации важна и независимо от наличия математической модели. Решение подобной задачи может выполняться другой формацией, состоящей из конечного числа роботов, действующих согласованно. Кроме того, определение линий уровня для какого-либо количественного показателя само по себе может представлять значимую роль. Типичным примером является продолжительный мониторинг заданной области конечной формацией автономных роботов с целью отслеживания концентраций загрязняющих веществ или плотностей редких или эндемичных биологических видов. В докладе будут представлены результаты по моделированию, идентификации и управлению формациями с распределенными характеристиками.

2. Моделирование распространения распределенных формаций

Рассматривается параболическая система уравнений типа реакции-диффузии

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u) + \alpha u^{1-\lambda} v^\mu + (\sigma_1 u^\lambda - k_1) u, \\ v_t &= \nabla \cdot (v^\mu \nabla v) + \beta v^{1-\mu} u^\lambda + (\sigma_2 v^\mu - k_2) v. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор пространственных переменных, $t \geq 0$ — время, $u = u(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$ — искомые функции, ∇ — оператор градиента по пространственным переменным; $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ — вещественные параметры нелинейности среды; $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, σ_1 , σ_2 , k_1 , k_2 — вещественные постоянные коэффициенты.

При моделировании распространения формаций мобильных роботов с распределенными характеристиками используются аналогичные (1) подходы к описанию диффузионных процессов [5]. При этом $u = u(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$ трактуются как плотности (количества в единице объема) роботов в пространстве. Как отмечается в обзоре [3], в последнее время уравнения с частными производными стали применяться для моделирования движения формаций взаимодействующих роботов в роевой робототехнике, при этом основная трудность состоит в том, что «analytical solutions of PDEs are available only for a small number of special cases». Поэтому развитие методов построения точных решений будет полезно при построении и исследовании моделей распространения формаций с распределенными характеристиками в роевой робототехнике.

Утверждение 1. Пусть $\lambda = \mu \neq -1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Тогда система (1) имеет точное решение вида

$$u(\mathbf{x}, t) = [\psi_1(t)]^{1/\lambda} [\Omega(\mathbf{x})]^{1/1+\lambda}, \quad v(\mathbf{x}, t) = [\psi_2(t)]^{1/\lambda} [\Omega(\mathbf{x})]^{1/1+\lambda},$$

где $\Omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет линейному уравнению Гельмгольца $\Delta \Omega(\mathbf{x}) = -(1 + \lambda)\sigma \Omega(\mathbf{x})$, а функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ находятся из линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{\psi}_1 = -k_1 \lambda \psi_1 + \alpha \lambda \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = \beta \lambda \psi_1 - k_2 \lambda \psi_2.$$

Систему (1) можно использовать для моделирования распространения двух распределенных взаимодействующих формаций мобильных роботов с границы некоторой базы на окружающую территорию. Знание точных решений в соответствии с утверждением 1 позволяет в каждый момент времени точно определять линии уровня одинаковой плотности и границу области распространения каждой формации (фронты волн распространения).

3. Задача идентификации фронта волны распространения распределенной формации по территории (Задача обследования полей концентрации)

Задача обследования полей концентрации, также известная в иностранной литературе как *Sampling problem*, представляет в настоящее время повышенный интерес в научном сообществе. Обычно в ее рамках выделяют три основных цели обследования [6]:

- 1) локализация одного или нескольких экстремумов функции (источников), описывающей поле концентрации, в случае нестационарного поля часто сопровождается последующим отслеживанием их перемещений в пространстве (мониторинг);
- 2) восстановление линий уровня, частным и наиболее интересным случаем которого является поиск нулевой линии уровня (фронта), отделяющей область с положительными значениями величины поля от области с нулевыми значениями;
- 3) картографирование обследуемой области, зачастую носящее вспомогательный характер для рассматриваемой задачи и смежных с ней.

Очевидно, что параллельное решение нескольких из вышеописанных подзадач может значительно сократить финансовые, временные и иные затраты на проведение подобных обследований. В данной работе предлагается мультиагентная стратегия управления, обеспечивающая одновременную локализацию источника поля, а также восстановление любой заданной линии уровня. При этом, разработанный подход также предусматривает возможность их дальнейшего мониторинга на продолжительном отрезке времени. В качестве агентов, производящих обследование поля концентрации, будем использовать интеграторов второго порядка, динамика которых описывается следующей системой:

$$\dot{q}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = u_i, \quad i \in \Gamma = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2)$$

$$\|v_i\| \leq v_{max}, \quad \|u_i\| \leq u_{max},$$

$$u_i = c_1 F_i^c + c_2 F_i^g, \quad (3)$$

$$F_i^g = \sum_{j \in \Gamma_{base}, j \neq i} \frac{q_{ij}}{\|q_{ij}\|} (f(t, q_j) - f(t, q_i)), \quad (4)$$

$$F_i^c = - \sum_{j \in \Gamma_{base}, j \neq i} \nabla_{q_i} U_{ij}^c (\|q_{ij}\|), \quad (5)$$

$$U_{ij}^c (\|q_{ij}\|) = \alpha \left(\frac{1}{2} (\|q_{ij}\| - d_{ij}^A)^2 + \beta \ln \|q_{ij}\| + \beta \frac{d_{ij}^A}{\|q_{ij}\|} \right), \quad (6)$$

где $q_i \in \mathbb{R}^p$, $v_i \in \mathbb{R}^p$, $u_i \in \mathbb{R}^p$ — соответственно, положение, скорость и управление i -го агента, v_{max} , u_{max} — предельно допустимые значения скорости и управления, Γ — множество доступных агентов мощностью n , $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ — некоторые положительные

коэффициенты, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ — некоторые управляющие параметры, $\|q_{ij}\|$ — евклидова норма вектора $q_{ij} = q_i - q_j$, d_{ij}^A — желаемое расстояние между агентами. Каждый агент способен с заданной периодичностью измерять величину поля концентрации в точке своего текущего местоположения. Помимо этого, будем считать, что каждый агент может связаться с любым другим для того, чтобы запросить его текущие координаты и значение последнего произведенного замера.

В основе подхода лежит разделение множества агентов на две подгруппы: Γ_{base} и Γ_{front} , отвечающие, соответственно, за поиск источника и обнаружение границ фронта. Управление агентами первой подгруппы строится, как взвешенная сумма (3) двух сил: градиентной (4) и кооперирующей (5). Первая, как следует из названия, отвечает за приближенное вычисление градиента поля, основываясь на разнице произведенных замеров величины поля. Кооперирующая сила отвечает за выдерживание агентами стационарных или локально стационарных (при $|\Gamma_{base}| > p + 1$) формаций, благодаря чему обеспечивается отсутствие столкновений между ними, а также повышение точности оценки градиента.

Аналогичным образом строится управление агентами второго множества. Однако, силы, действующие на них (граничная и релаксирующая), имеют другой физический смысл. Так, граничная сила отталкивает агентов от текущей оценки местоположения источника, основанной на координатах агентов множества Γ_{base} , если текущее значение замера выше искомой линии уровня, и притягивает в обратном случае, обеспечивая тем самым решение задачи. Подход близок к управлению с переключениями, но сглаживающая функция позволяет избежать разрывов управления и гарантирует его гладкость. С другой стороны, релаксирующая сила отвечает за отсутствие столкновений между агентами, а также равномерно распределяет их по периметру искомой линии уровня. Проведенные серии экспериментов в рамках специально разработанной тестирующей программной среды демонстрируют способность предложенного подхода решать поставленные задачи. При этом, стратегия управления обладает достаточно высокой точностью и скоростью получения решения, а также устойчивостью к изменениям поля концентрации, вызванных его нестационарной природой.

References

1. Shahzad M.M., Saeed Z., Akhtar A., Munawar H., Yousaf M.H., Baloach N.K., Hussain F. A Review of Swarm Robotics in a NutShell // Drones 2023. 7. 269. <https://doi.org/10.3390/drones7040269>
2. Purushotham Muniganti, Albert Oller Pujol. A Survey on Mathematical models of Swarm Robotics. Conference Paper. January 2010. URL: <https://www.researchgate.net/publication/230793772>
3. Wei J., Fridman E., Johansson K.H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements // Automatica. 2019. Vol.106. P. 47-53. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.04.040.
4. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Journal of Physics: Conf. Ser. 2021. Vol.1847, No.1. 012007 p. doi:10.1088/1742-6596/1847/1/012007.

5. Karthik Elamvazhuthi and Spring Berman. Mean-field models in swarm robotics: a survey. *Bioinspiration & Biomimetics* // 2019. Vol.15. No.1. 15 015001 DOI 10.1088/1748-3190/ab49a4.
6. Hwang J., Bose N., Fan S. AUV Adaptive Sampling Methods // *Applied Sciences*. 2019. Vol.9. P. 1-30.

MSC 35K57, 35K55, 35Q35

On modeling and identification of parameters of distributed formations

A.A. Kosov, E.I. Semenov, A.A. Tolstikhin

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS)

Abstract: Issues of modeling and parameter identification for formations with distributed characteristics are considered. The development of methods of construction of exact solutions of nonlinear systems of reaction-diffusion type, which can be used for modeling distributed formations, is given. It is suggested to use bio-inspired algorithms for solving problems of identification by formations with distributed characteristics.

Keywords: parabolic type equations, exact solutions, mathematical modeling of formations, parameter identification, field monitoring.

References

1. Shahzad M.M.; Saeed Z.; Akhtar A.; Munawar H.; Yousaf M.H.; Baloach N.K.; Hussain F. A Review of Swarm Robotics in a NutShell // Drones 2023. 7. 269. <https://doi.org/10.3390/drones7040269>
2. Purushotham Muniganti, Albert Oller Pujol. A Survey on Mathematical models of Swarm Robotics. Conference Paper. January 2010. URL: <https://www.researchgate.net/publication/230793772>
3. Wei J., Fridman E., Johansson K.H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements // Automatica. 2019. Vol. 106. p. 47–53. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.04.040.
4. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Journal of Physics: Conf. Ser. 2021. V. 1847, No. 1. P. 012007. doi:10.1088/1742-6596/1847/1/012007.
5. Karthik Elamvazhuthi and Spring Berman. Mean-field models in swarm robotics: a survey. Bioinspiration & Biomimetics // 2019. Vol. 15. No 1. 15 015001 DOI 10.1088/1748-3190/ab49a4.
6. Hwang J., Bose N., Fan S. AUV Adaptive Sampling Methods // Applied Sciences. 2019. Vol. 9. P. 1–30.

УДК 519.6

Исследование разностных методов решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами

Кудряшова Н.Ю.¹, Первухина Ю.В.²

Пензенский государственный университет¹,
ООО «ПО Энергоспецтехника»²

Аннотация: В работе построена физико-математическая модель процесса лазерной сварки двух металлических пластин в форме прямоугольных параллелепипедов одинаковой толщины, которые стыкуются боковыми сторонами. При реализации данной модели для трехмерного уравнения теплопроводности с фазовыми переходами была построена трехмерная разностная схема. Представлен численный метод, позволяющий разложить ее в цепочку трех одномерных разностных схем. Приведен алгоритм для нахождения глубины сформированного парового канала. Проведено численное моделирование рассмотренного метода решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами.

Ключевые слова: задача Стефана, межфазная граница, лазерная сварка, разностная схема.

Введение

В настоящее время подавляющее большинство проблем теплообмена связаны с изменением состояния вещества.

Следует отметить, что исследования в данном направлении применяются на практике во многих физических процессах: задачи о промерзании и оттаивании влажного грунта, об образовании льда на поверхности воды, о промерзании трубопроводов, о сварке, плавлении, затвердевании металла и др.

Примером физического процесса, иллюстрирующего задачу Стефана в трехмерном случае, является задача о моделировании процесса лазерной сварки металлических пластин [2–6]. В процессе сварки под воздействием больших температур происходит переход из твердой фазы металла в жидкую. При этом происходит формирование межфазной границы. Определение изменения ее положения с течением времени является актуальной научной проблемой.

1. Математическое моделирование процесса лазерной сварки двух металлических пластин

Рассмотрим процесс моделирования лазерной сварки двух металлических пластин в форме прямоугольных параллелепипедов одинаковой толщины, которые стыкуются боковыми сторонами [1].

Горизонтальная ось луча лазера лежит в плоскости, находящейся в месте объединения пластин и направлена перпендикулярно к их поверхности. Введем в нашей модели декартову систему координат, в которой луч лазера является статичным, а металлические пластины находятся в движении вдоль оси x со скоростью v . Скорость движения является постоянной. Ось z направлена вдоль луча лазера по направлению

вниз, ось y – перпендикулярно месту объединения пластин. Точка отсчета системы координат находится на верхних границах металлических пластин в области попадания луча лазера в место их объединения. Заметим, что в данной математической модели введены некоторые упрощения:

1. Примем, что все колебания изменений значений теплофизических параметров области лазерной сварки равны своим средним стационарным значениям;
2. Процесс плавления листов металла описывается в приближении Стефана;
3. Радиус выходного отверстия, образованного лазером, будем считать фиксированным и равным $2r_f$, где r_f – радиус луча лазера.

1.1. Математическая модель процесса лазерной сварки.

Процесс лазерной сварки в твердой и жидкой фазе можно описать следующим трехмерным уравнением [2]

$$c_{ei}v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_i \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$c_{ei} = \begin{cases} c_1 \rho_1, & T < T_e, \\ c_2 \rho_2 \left(1 + \frac{\chi}{c_2} \frac{\partial f_l}{\partial T} \right), & T_e \leq T \leq T_{l0}, \\ c_3 \rho_3, & T_{l0} < T, \end{cases} \quad (2)$$

где c_i – удельная теплоемкость, λ_i – теплопроводность, ρ_i – плотность.

При этом, если

- 1) $i = 1$ – параметры твердой фазы;
- 2) $i = 2$ – параметры межфазной зоны;
- 3) $i = 3$ – параметры жидкой фазы.

В терминах введенных замен (1): T_e и T_{l0} – температура начала и окончания процесса затвердевания сплавленных листов металла, f_l – доля жидкого состояния в межфазной зоне, χ – скрытая теплота плавления, выделяемая в процессе сварки.

На поверхности $z = 0$ в областях твердой и жидкой фаз граничное условие имеет вид:

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\alpha_{k1} + \alpha_r)(T|_{z=0} - T_g) - q_1, \quad (3)$$

$$(x - r_f)^2 + y^2 > 4r_f^2.$$

Здесь α_{k1} – коэффициент теплоотдачи, который образуется с помощью обработки зоны сварки инертным газом аргоном, T_g – температура газа, α_r – радиационный коэффициент теплоотдачи при сварке.

Также имеется условие для нижней поверхности пластины, т.е. для $z = h$.

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = (\alpha_{k2} + \alpha_r)(T|_{z=h} - T_g) - q_1, \quad (4)$$

где α_{k2} – коэффициент теплоотдачи от нижней поверхности пластин к поверхности, на которой происходит процесс лазерной сварки, а T_g – температура среды, которая контактирует с нижней поверхностью свариваемых пластин.

На поверхности фазового перехода запишем условие Стефана

$$\left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_2 - \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 = \rho_1 k n v. \quad (5)$$

На поверхности парового канала $(x - r_f)^2 + y^2 \leq (2r_f)^2$ справедливо уравнение теплового канала

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} = q_l n + q_r + q_v + q_c + q_b. \quad (6)$$

Здесь $n = (n_x, n_y, n_z)$ – единичная нормаль к поверхности парогазового канала,
 $\diamond q_l = q_l e_z$ – поглощенный поток лазерного излучения,
 $\diamond e_z$ – орт оси z ,
 $\diamond q_r$ – поток тепла, возникающий в результате отражений от стенок парогазового канала,
 $\diamond q_v$ – потери тепла за счет испарения металла во время процесса сварки,
 $\diamond q_c$ – моделирует поток тепла от передней стенки парогазового канала на его заднюю стенку.

На достаточно большом расстоянии от луча лазера температура по всей толщине пластин принимается равной температуре окружающей среды:

$$T|_{x \rightarrow \pm\infty} = T_g, \quad T|_{y \rightarrow \pm\infty} = T_g.$$

Для решения вышеописанной задачи применим следующую разностную схему:

$$\frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^n}{\tau} = \delta(L_x(T_{ijk}^{n+1}) + L_y(T_{ijk}^{n+1}) + L_z(T_{ijk}^{n+1})) + (1 - \delta)(L_x(T_{ijk}^n) + L_y(T_{ijk}^n) + L_z(T_{ijk}^n)), \quad (7)$$

где введены замены

$$L_x = \frac{1}{h_x} \left(\lambda_{ijk}^n \frac{T_{(i+1)jk} - T_{ijk}}{h_x} - \lambda_{ijk}^n \frac{T_{ijk} - T_{(i-1)jk}}{h_x} \right) - b \frac{T_{(i+1)ijk} - T_{(i-1)jk}}{2h_x};$$

$$L_y = \frac{1}{h_y} \left(\lambda_{ijk}^n \frac{T_{i(j+1)k} - T_{ijk}}{h_y} - \lambda_{ijk}^n \frac{T_{ijk} - T_{i(j-1)k}}{h_y} \right);$$

$$L_z = \frac{1}{h_z} \left(\lambda_{ijk}^n \frac{T_{ij(k+1)} - T_{ijk}}{h_z} - \lambda_{ijk}^n \frac{T_{ijk} - T_{ij(k-1)}}{h_z} \right).$$

Здесь $b = c_2 \rho_2 v$, h_x , h_y и h_z – шаги по соответствующим индексу осям координат.

Трехмерную разностную схему (7) заменим последовательностью трех одномерных разностных схем.

$$\frac{T_{ijk}^{n+1/3} - T_{ijk}^n}{\tau} - \delta L_x(T_{ijk}^{n+1/3}) - (1 - \delta)L_x(T_{ijk}^n) = \delta(L_y(T_{ijk}^{n+1/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+1/3})) + (1 - \delta)(L_y(T_{ijk}^n) + L_z(T_{ijk}^n)); \quad (8)$$

$$\frac{T_{ijk}^{n+2/3} - T_{ijk}^{n+1/3}}{\tau} - \delta L_y(T_{ijk}^{n+2/3}) - (1 - \delta)L_y(T_{ijk}^{n+1/3}) = \delta(L_x(T_{ijk}^{n+2/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+2/3})) + (1 - \delta)(L_x(T_{ijk}^{n+1/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+1/3})); \quad (9)$$

$$\frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^{n+2/3}}{\tau} - \delta L_z(T_{ijk}^{n+1}) - (1 - \delta)L_z(T_{ijk}^{n+2/3}) = \delta(L_x(T_{ijk}^{n+1}) + L_y(T_{ijk}^{n+1})) + (1 - \delta)(L_x(T_{ijk}^{n+2/3}) + L_y(T_{ijk}^{n+2/3})). \quad (10)$$

К каждой из разностных схем (8), (9) и (10) применим метод разностной прогонки.

Была проведена численная реализация описанной выше вычислительной схемы. Полученная форма сварной ванны соответствует прогнозируемой в теоретическом описании форме. Благодаря полученным результатам можно определять глубину и протяженность сварной ванны, что позволит рассчитать время для изготовления сварных изделий различной сложности; затраты на производство, реализуя данную модель, не проводя эксперименты на практике.

Литература

1. Шапеев В.П., Черепанов А.Н. Конечно-разностный алгоритм для численного моделирования процессов лазерной сварки металлических пластин // - Вычислительные технологии, 2006. Т.11-4. С. 102-117.
2. Черепанов А.Н., Шапеев В.П. Численное исследование процесса сварки тонких металлических пластин // Вычислительные технологии, 2009. Т. 14-3. С. 93-103.
3. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951.
4. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Фомин В.М., Семин Л.Г. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерной сварке с образованием парового канала // ПМТФ, 2006. Т.11-4. С. 102-117.
5. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Исаев В.И. Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне // Теплофизика и аэромеханика, 2010. Т.17-3. С. 451-466.
6. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Фомин В.М., Семин Л.Г. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерно-лучевой сварке // Прикл. механика и техн. физика, 2006. Т.47-55. С. 88-96.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

MSC 65M06

Investigation of difference methods for solving the problem of thermal conductivity with phase transitions

N.Y. Kudryashova¹, Y.V. Pervuhina²

Penza state university¹, Production Association «Estech»²

Abstract: The paper presents a physical and mathematical model of the laser welding process of two metal plates in the form of rectangular parallelepipeds of the same thickness, which are joined by the sides. When implementing this model, a three-dimensional difference scheme was constructed for a three-dimensional heat equation with phase transitions. A numerical method is presented that allows to decompose it into a chain of three one-dimensional difference schemes. An algorithm for finding the depth of the formed steam channel is given. Numerical modeling of all considered methods for solving the problem of thermal conductivity with phase transitions is carried out.

Keywords: Stefan's problem, interphase boundary, laser welding, difference scheme.

References

1. Shapeev V.P., Cherepanov A.N. Finite-difference algorithm for numerical simulation of laser welding processes of metal plates. Computing technologies, 2006. Vol.11-4. P. 102-117.
2. Cherepanov A.N., Shapeev V.P. Numerical study of the welding process of thin metal plates. Computing technologies, 2009. Vol.14-3. P. 93-103.
3. Rykalin N.N. Calculations of thermal processes during welding. Mashgiz, Moscow, 1951. 296 p.
4. Cherepanov A.N., Shapeev V.P., Fomin V.M., Semin L.G. Numerical simulation of thermophysical processes in laser welding with steam channel formation. Applied Mechanics and technical physics, 2006. Vol. 11-4. P. 102-117.
5. Cherepanov A.N., Shapeev V.P., Isaev V.I. Numerical simulation of laser welding of thin metal plates taking into account convection in the welding bath. Thermophysics and aeromechanics, 2010. Vol.17-3. P. 451-466.
6. Cherepanov A.N., Shapeev V.P., Fomin V.M., Semin L.G. Numerical simulation of thermophysical processes in laser beam welding. Applied Mechanics and technical physics, 2006. Vol.47-5. P. 88-96.
7. Samarski A.A. Theory of difference schemes. M.: Nauka, 1977. 656 p.

УДК 519.622

Области абсолютной устойчивости явных методов семейства Рунге-Кутты для задачи Далквиста, преобразованной к наилучшему аргументу и его модификациям

Кузнецов Е.Б.¹, Леонов С.С.^{1, 2}, Цапко Е.Д.¹

Московский авиационный институт¹,
Российский университет дружбы народов²

Аннотация: В статье исследуются области абсолютной устойчивости явных методов семейства Рунге-Кутты для задачи Далквиста. Область абсолютной устойчивости позволяет получить оценку шага интегрирования, которая дает возможность использовать явные методы для решения ряда жестких начальных задач без существенного возрастания погрешности. Также в статье построены области абсолютной устойчивости для задачи Далквиста, преобразованной к наилучшему аргументу и его экспоненциальной модификации. Полученные результаты хорошо согласуются с уже имеющимися теоретическими исследованиями.

Ключевые слова: область абсолютной устойчивости, явные методы семейства Рунге-Кутты, задача Далквиста, метод продолжения решения, наилучший аргумент, экспоненциальный наилучший аргумент.

1. Области абсолютной устойчивости явных методов семейства Рунге-Кутты

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0. \quad (2)$$

В данной задаче $y(t)$ – искомая функция аргумента $t \in [t_0, T]$, T – заданная правая граница отрезка изменения аргумента задачи, y_0 – значение функции $y(t)$ при $t = t_0$.

Подобными задачами моделируются многие явления и процессы в области физики, механики, экономики и биологии. При этом в большинстве случаев задача (1)-(2) не допускает аналитического решения. В этом случае используются численные методы решения задачи Коши, например одношаговые явные методы семейства Рунге-Кутты.

1.1. Явные методы семейства Рунге-Кутты

Разобьем интервал изменения аргумента t на n частей, в общем случае переменной длины:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n = T.$$

Пусть известно решение задачи y_k в узле t_k и необходимо найти решение в следующем узле.

К. Рунге предложил вычисление приближенного решения y_{k+1} в виде линейной комбинации [1, с. 56–64]

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + p_{q1}K_1 + p_{q2}K_2 + \dots + p_{qq}K_q, \\ K_1 &= hf(t_k, y_k), \quad K_2 = hf(t_k + \alpha_2h, y_k + \beta_{21}K_1), \\ &\vdots \\ K_q &= hf(t_k + \alpha_qh, y_k + \beta_{q1}K_1 + \dots + \beta_{q(q-1)}K_{q-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь числа $\alpha_2, \dots, \alpha_q, \beta_{21}, \dots, \beta_{q(q-1)}$ и p_{q1}, \dots, p_{qq} – настраиваемые параметры.

Семейство методов (3) называется семейством одношаговых явных q -стадийных методов Рунге-Кутты. Для многих начальных задач явные методы Рунге-Кутты позволяют получить решение приемлемой точности. Но для класса задач, называемых жесткими, данные методы малоприменимы из-за неконтролируемого роста погрешности при их использовании. По этой причине для жестких начальных задач особое значение приобретает понятие устойчивости метода решения.

1.2. Абсолютная устойчивость явных методов семейства Рунге-Кутты. Задача Далквиста

Анализ устойчивости численного метода для исходной задачи (1)-(2) может быть трудоемким, в особенности, если рассматривается система дифференциальных уравнений. Воспользуемся линеаризацией исходной задачи [3, с. 25–27]. Пусть известно решение $y = \varphi(t)$ задачи (1)-(2). Разложим в ряд Тейлора правую часть уравнения (1) в окрестности известного решения:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t))(y - \varphi(t)) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \varphi(t))(y - \varphi(t))^2 + o((y - \varphi(t))^2).$$

Вводя замену

$$y = Y + \varphi(t),$$

получим уравнение

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t))Y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \varphi(t))Y^2 + o(Y^2).$$

Если погрешность численного решения достаточно мала, то для исследования устойчивости численного метода в окрестности каждой точки интегральной кривой можно заменить исходную задачу (1)-(2) на задачу Коши для линейного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = ay \quad (4)$$

с начальным условием (2), где параметр a является заданным, в общем случае комплексным, числом. Применительно к исходной задаче (1)-(2) параметр a равняется значению производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ в рассматриваемой точке интегральной кривой.

Задача (4), (2) называется задачей Далквиста и является тестовой для определения областей устойчивости численных методов.

Все явные методы семейства Рунге-Кутты для задачи Далквиста могут быть записаны в виде

$$y_{k+1} = R(z)y_k, \quad z = ah.$$

Функция $R(z)$ называется функцией устойчивости. Метод называется абсолютно устойчивым для $z \in \mathbb{C}$, если для этого z выполняется условие [3, с. 26]

$$|R(z)| \leq 1. \quad (5)$$

В частности, из условия (5) следует, что $|y_{k+1}| \leq |y_k|$, т. е. погрешность численного решения не растёт. Для жестких начальных задач это условие является ключевым при выборе метода решения.

В монографии Э. Хайрера и Г. Ваннера [3, с. 27] для задачи Далквиста найдена общая формула для функции устойчивости $R(z)$. Доказана

Теорема 1. *Если метод Рунге-Кутты имеет порядок p , то*

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + O(z^{p+1}).$$

Используя теорему 1 можно доказать следующие следствия.

Рассмотрим явный метод Рунге-Кутты первого порядка точности (явный метод Эйлера), который, в общем случае для задачи (1)-(2), имеет вид [1, с. 58]

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k). \quad (6)$$

Следствие 1. *Область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты первого порядка точности (явного метода Эйлера) вида (6) для задачи Далквиста (4), (2) задается неравенством*

$$|1 + ha| < 1. \quad (7)$$

При действительных значениях параметра a неравенство (7) дает ограничение на шаг интегрирования

$$|h| \leq \frac{2}{|a|} \quad (8)$$

при условии $ah \leq 0$. При комплексных значениях параметра a , т. е. при $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, неравенство (7) задает на комплексной плоскости круг единичного радиуса

$$(\alpha h + 1)^2 + (\beta h)^2 \leq 1.$$

Рассмотрим явный метод Рунге-Кутты второго порядка точности (явный метод Эйлера-Коши), который, в общем случае для задачи (1)-(2), имеет вид [1, с. 59]

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \quad K_1 = hf(t_k, y_k), \quad K_2 = hf(t_k + h, y_k + K_1). \quad (9)$$

Следствие 2. *Область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты второго порядка точности (явного метода Эйлера-Коши) вида (9) для задачи Далквиста (4), (2) задается неравенством*

$$\left| 1 + ah + a^2 \frac{h^2}{2} \right| \leq 1. \quad (10)$$

При действительных значениях параметра a неравенство (10) дает ограничение на шаг интегрирования (8) при условии $ah \leq 0$. При комплексных значениях параметра a , т. е. при $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, неравенство (10) задает на комплексной плоскости область

$$\left(1 + \alpha h + \alpha^2 \frac{h^2}{2} - \beta^2 \frac{h^2}{2} \right)^2 + (\beta h + \alpha \beta h^2)^2 \leq 1.$$

Полученные области абсолютной устойчивости изображены на рис. 1 (меньшие по площади из областей на соответствующих рисунках). Отметим, что из теоремы 1 также следует инвариантность области абсолютной устойчивости для всех методов семейства Рунге-Кутты одного порядка точности.

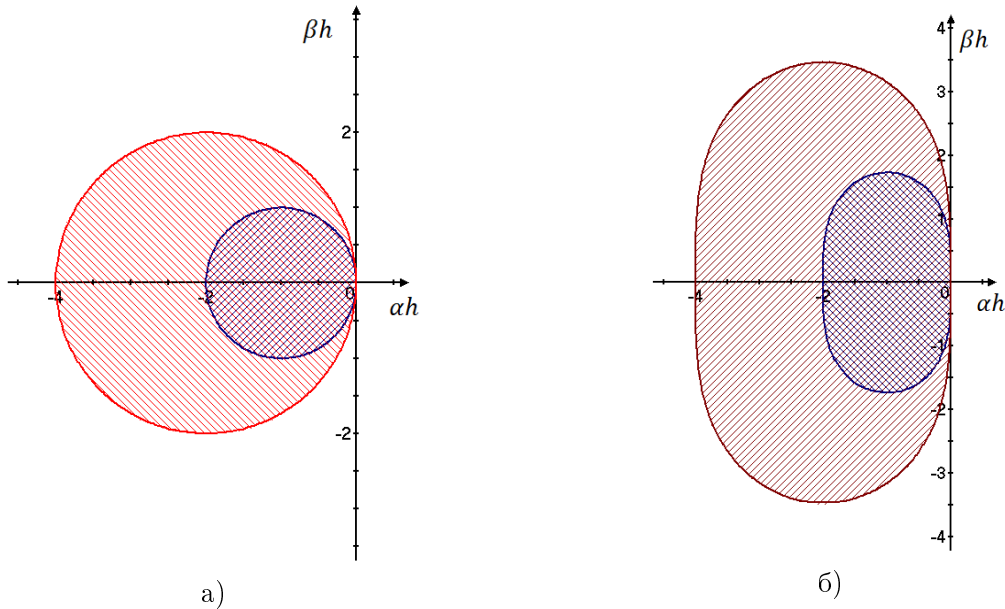


Рис. 1. Область абсолютной устойчивости для задачи Далквиста:
 а) явный метод Эйлера, б) явный метод Эйлера-Коши

2. Применение наилучшего аргумента

В монографии В.И. Шалашилина и Е.Б. Кузнецова [3, с. 50–53] доказано, что при использовании наилучшего аргумента λ , отсчитываемого вдоль интегральной кривой рассматриваемой задачи Коши, область абсолютной устойчивости явной схемы Эйлера расширяется.

Для задачи Далквиста (4), (2) наилучший аргумент λ удовлетворяет соотношению

$$(d\lambda)^2 = (dy)^2 + (dt)^2. \quad (11)$$

Преобразовав к аргументу (11) уравнение (4), получим систему уравнений

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{ay}{\sqrt{1 + |ay|^2}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + |ay|^2}}. \quad (12)$$

Начальные условия для системы (12) примут вид

$$y(0) = y_0, \quad t(0) = t_0. \quad (13)$$

Обобщим теорему 1 на преобразованную задачу (12)-(13).

Теорема 2. Если метод Рунге-Кутты имеет порядок p , то его функция устойчивости в окрестности каждой точки интегральной кривой преобразованной задачи (12)-(13) имеет вид

$$R(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^p}{p!} + O(u^{p+1}),$$

где $u = \frac{ah}{(1 + |ay_k|^2)^{3/2}}$, $y_k = \varphi(\lambda_k)$, $M(t_k, y_k)$ – рассматриваемая точка интегральной кривой.

Используя теорему 2, докажем аналоги следствий 1 и 2 для преобразованной задачи Далквиста (12)-(13).

Следствие 3. Область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты первого порядка точности (явного метода Эйлера) вида (6) для преобразованной задачи Далквиста (12)-(13) в окрестности каждой точки интегральной кривой задается неравенством

$$\left| 1 + h \frac{a}{(1 + |ay_k|^2)^{3/2}} \right| \leq 1. \quad (14)$$

При действительных значениях параметра a неравенство (14) дает ограничение на шаг интегрирования

$$|h| \leq \frac{2(1 + |ay_k|^2)^{3/2}}{|a|}, \quad (15)$$

при условии $ah \leq 0$. При комплексных значениях параметра a , т. е. при $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, неравенство (14) задает круг радиуса $\rho = (1 + |ay_k|^2)^{3/2}$ с центром в точке $O_1(-\rho, 0)$:

$$(\alpha h + \rho)^2 + (\beta h)^2 \leq \rho^2.$$

Следствие 4. Область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты второго порядка точности (явного метода Эйлера-Коши) вида (9) для преобразованной задачи Далквиста (12)-(13) в окрестности каждой точки интегральной кривой задается неравенством

$$\left| 1 + h \frac{a}{(1 + |ay_k|^2)^{3/2}} + \frac{a^2}{(1 + |ay_k|^2)^3} \frac{h^2}{2} \right| \leq 1. \quad (16)$$

При действительных значениях параметра a неравенство (16) дает ограничение на шаг интегрирования (15) при условии $ah \leq 0$. При комплексных значениях параметра a , т. е. при $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, неравенство (16) задает на комплексной плоскости область

$$\left(\rho^2 + \rho\alpha h + \alpha^2 \frac{h^2}{2} - \beta^2 \frac{h^2}{2} \right)^2 + (\rho\beta h + \alpha\beta h^2)^2 \leq \rho^4.$$

Полученные области абсолютной устойчивости для преобразованной задачи Далквиста изображены на рис. 1 (большие по площади из областей на соответствующих рисунках) при $\rho = 2$. Как видно из рис. 1, область абсолютной устойчивости для задачи (12)-(13) совпадает с областью абсолютной устойчивости для задачи (4), (2) только при $a = 0$ или $y_k = 0$. В остальных случаях область устойчивости преобразованной задачи Далквиста превосходит по размерам область исходной задачи, занимая всю левую полуплоскость при $ay_k \rightarrow \infty$.

3. Применение модифицированного наилучшего аргумента

Помимо наилучшего аргумента λ , в работах авторов [4, 5] для решения сверхжестких задач предложено использовать экспоненциальный наилучший аргумент

$$(d\kappa)^2 = (dy)^2 + \exp(-2\xi t) \cdot (dt)^2. \quad (17)$$

Задача Далквиста (4), (2), преобразованная к экспоненциальному наилучшему аргументу (17) примет вид

$$\frac{dy}{d\kappa} = \frac{ay \exp(\xi t)}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp(2\xi t)}}, \quad \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\exp(\xi t)}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp(2\xi t)}}, \quad (18)$$

а начальные условия для нее запишутся в форме (13).

Для задачи (18), (13) доказана следующая

Теорема 3. При значениях параметра ξ , удовлетворяющих условию

$$a \cdot \xi \leq 0,$$

область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты первого порядка точности (явного метода Эйлера) вида (6) для преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу к задаче Далквиста (18), (13) в окрестности каждой точки интегральной кривой задается неравенством

$$\left| 1 + \frac{1}{2} \frac{\exp(\xi t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\xi t_m))^{3/2}} h D_{\max} \right| \leq 1, \quad (19)$$

где

$$D_{\max} = \begin{cases} D_1, & a + \xi \geq -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\xi t_m))^{3/2}}{h \exp(\xi t_m)}, \\ D_2, & a + \xi < -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\xi t_m))^{3/2}}{h \exp(\xi t_m)}, \end{cases}$$

$$D_1 = a + \xi + \sqrt{(a - \xi)^2 - 4a^3 \xi y_m^2 \exp(2\xi t_m)},$$

$$D_2 = a + \xi - \sqrt{(a - \xi)^2 - 4a^3 \xi y_m^2 \exp(2\xi t_m)}.$$

При действительных значениях параметра a неравенство (19) дает ограничение на шаг интегрирования

$$|h| \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\xi t_m))^{3/2}}{|D_{\max}| \exp(\xi t_m)}$$

при условии $a D_{\max} \leq 0$.

Справедливо следующее следствие теоремы 3.

Следствие 5. При значении параметра $\xi = -a$ условие абсолютной устойчивости явного метода Эйлера вида (6) для задачи (18), (13) принимает форму

$$|h| \leq \frac{2[\exp(at_m) + a^2 y_m^2 \exp(-at_m)]}{|a|}. \quad (20)$$

Данное следствие показывает, что при достаточно больших значениях a ограничение (20) позволяет увеличить размер шага интегрирования без потери устойчивости метода.

Литература

1. Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
3. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
4. Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tsapko E.D. A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. 012032. DOI:10.1088/1757-899X/927/1/012032
5. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С., Цапко Е.Д. Оценка области абсолютной устойчивости численной схемы решения жестких задач Коши методом продолжения решения по параметру // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2023. Т. 63. № 4. С. 557-572.

MSC 65L20

Absolute stability domains of explicit methods of the Runge-Kutta family for the Dahlquist problem transformed to the best argument and its modifications

E.B. Kuznetsov¹, S.S. Leonov^{1, 2}, E.D. Tsapko¹
Moscow Aviation Institute¹, RUDN University²

Abstract: The paper investigates the absolute stability domains of explicit methods of the Runge-Kutta family for the Dahlquist problem. The domain of absolute stability allows us to obtain an estimate of the step size of integration, which enables using explicit methods to get an approximate solution for a number of stiff initial problems without a significant increase in error. Also, the absolute stability domains for the Dahlquist problem transformed to the best argument and its modification constructed in the paper. The obtained results are in good agreement with existing theoretical researches.

Keywords: absolute stability domain, explicit Runge-Kutta methods, the Dahlquist problem, solution continuation method, the best argument, exponential best argument.

References

1. Arushanyan O.B., Zalotkin S.F. Numerical solution of ordinary differential equations belonging to Fortran. Izd-vo MGU. Moscow, 1990. 336 p. (in Russian).
2. Hairer E., Wanner G. Solution of ordinary differential equations. Stiff and differential-algebraic problems. Mir. Moscow, 1999. 685 p. (in Russian).
3. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Boston, London, 2003. 236 p.
4. Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tsapko E.D. A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. 012032. DOI:10.1088/1757-899X/927/1/012032
5. Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tsapko E.D. Estimating the Domain of Absolute Stability of a Numerical Scheme Based on the Method of Solution Continuation with Respect to a Parameter for Solving Stiff Initial Value Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Vol. 63. No. 4. P. 528-541.

УДК 519.67 517.91 538.94

Дифференциальные уравнения для восстановления зависимости из ее гармоник

Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В работе представлены неоднородные дифференциальные уравнения для восстановления производной экспериментально исследуемой зависимости из ее первой гармоники. На основе дифференциальных уравнения 2-го и 4-го порядков рассмотрен пример восстановления зависимости. Решение задачи Коши осуществлялось численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Ключевые слова: восстановление производной зависимости, гармоники Фурье, неоднородное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод Рунге-Кутты.

1. Введение

Хорошо известна модуляционная методика, которая широко применяется в экспериментальной физике, приборостроении, радиотехнике и других приложениях. В указанной методике используется следующая простая связь. При наложении на объект исследования статического x_0 и гармонического воздействия с малой амплитудой a объект откликается периодическим сигналом, в основном содержащим первую гармонику Фурье. Амплитуда первой гармоники пропорциональна производной изучаемой зависимости:

$$F(x_0 + h \cdot \cos(\omega t)) \approx F(x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_0} \cdot h \cdot \cos(\omega t).$$

Данное соотношение можно использовать для малых амплитудах модуляции, слабой нелинейности зависимости и в отсутствие гистерезиса. При невыполнении одного из отмеченных условий задача значительно усложняется и требует детального анализа для каждого отдельного случая. Указанный анализ был проведен в работах [1-6]. Примером могут служить нелинейные магнитные свойства и вольтамперные характеристики высокотемпературных сверхпроводников.

2. Ряды Тейлора для коэффициентов Фурье

Пусть экспериментально исследуется гистерезисная зависимость, например, намагниченность $M(H)$ образца магнитного материала. При статическом и переменном воздействии частотой ω на образец внешним магнитным полем напряженностью $H = H_0 + h \cdot \cos \omega \tau$ сигнал отклика материала будет периодической функцией времени τ и в регистрируемом сигнале, содержащем информацию о зависимости, имеются высшие гармоники. Для удобства обозначим $M(H) = f(x)$. Следуя работам [1-6], разложим исследуемую зависимость $M(H)$ в ряд Тейлора в точке $H_0 \equiv x_0$ по $z = a \cdot \cos \omega \tau$, который преобразуется в ряд Фурье:

$$f(x) = f(x_0 + a \cdot \cos(t)) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c'_n \cdot \cos(nt) + c''_n \cdot \sin(nt)]. \quad (1)$$

В выражении (1) переменная величина $t = \omega \cdot \tau$ есть безразмерное время. Ряды для амплитуд гармоник (коэффициентов ряда Фурье) равны:

$$\begin{cases} c'_n(x_0, a) = 2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2m+n} \langle f(x_0) \rangle^{(2m+n)} \\ c''_n(x_0, a) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \Delta c(x_0)^{(p)} \cdot S_{p,n} \cdot \frac{h^p}{p!} \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\langle f(x) \rangle = \frac{[f_-(x) + f_+(x)]}{2}$ – средняя кривая гистерезисной зависимости, $\langle f(x) \rangle^{(k)}$, $\Delta f(x)^{(k)}$ производная от $\langle f \rangle$ или от $\Delta f(x)$ по x порядка k , $\Delta f(x) = [f_-(x) - f_+(x)]$ – разностная кривая гистерезисной зависимости, $f_-(x)$ – ветвь гистерезисной зависимости для убывающего x , а $f_+(x)$ – возрастающего x ,

$$S_{p,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p!(n+p-2i-2)!!}{(p-i)!(p+n)!!}.$$

Здесь при $n = 2k, p = 2m + 1$, а при $n = 2k + 1, p = 2m$. Например, $S(p, 0) = 0$, $S(p, 1) = \frac{1}{p+1}$, $S(p, 2) = \frac{2}{p+2}$, $S(p, 3) = \frac{3p+1}{(p+1)(p+3)}$ и т. д. При получении выражений (1) и (2) предполагалось, что ветви $f_-(x)$ и $f_+(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями на интервале $(x_0 - a, x_0 + a)$. Для первой гармоники зависимости имеем следующие ряды:

$$c'_1(x_0, h) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+1)!} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2m+1} \langle f(x_0) \rangle^{(2m+1)} \quad (3)$$

$$c''_1(x_0, h) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta f(x_0)^{(2m)} \cdot \frac{a^{2m}}{(2m+1)!} \quad (4)$$

В отсутствие гистерезиса $\langle f(x) \rangle = f(x)$, а $\Delta f(x) = 0$. В этом случае $c''_n = 0$.

На рис. 1 для примера приведены различные кривые и ветви намагниченности для сверхпроводника второго рода, находящегося в критическом состоянии [7].

3. Дифференциальные уравнения для восстановления производной

Рассмотрим безгистерезисную зависимость $f(x)$. При достаточно малых значениях в (4) оставим три члена разложения:

$$c'_1 \approx a \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{a^3}{8} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \Big|_{x_0} + \frac{a^5}{192} \cdot \frac{d^5 f(x)}{dx^5} \Big|_{x_0}. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует линейное дифференциальное уравнение для восстановления производной $\frac{df}{dx}$ при известной зависимости первой гармоники $c'_1(x_0, a)$. Зависимость $c'_1(x_0, a)$ можно определить экспериментально, например, для исследования магнитных свойств материала – путем исследования спектра гармоник намагниченности при помещении образца в переменное магнитное поле амплитудой h и постоянное поле напряженностью H_0 . Таким образом, для малых фиксированных амплитуд a

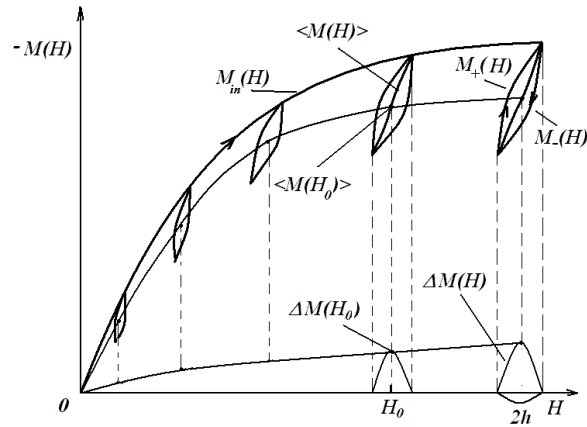


Рис. 1. $M_{in}(H)$ – начальная кривая намагниченности, $\langle M(H) \rangle$ – средняя кривая намагниченности, $\Delta M(H)$ – разностная кривая намагниченности, $M_-(H)$ – ветвь намагниченности в убывающем поле, $M_+(H)$ – ветвь намагниченности в возрастающем поле.

формула (5) превращается в линейное дифференциальное уравнение пятого порядка, которое сводится к уравнению четвертого порядка относительно $\frac{df}{dx}$. Для простоты введем обозначение $\frac{df}{dx} = Z$, тогда уравнение имеет вид:

$$\frac{d^4 z}{dx_0^4} + \frac{24}{a^2} \cdot \frac{d^2 z}{dx_0^2} + \frac{192}{a^4} \cdot Z = \frac{192}{a^5} \cdot c'_1(x_0, a). \quad (6)$$

При уменьшении амплитуд модуляции a можно уменьшить порядок уравнения на два:

$$\frac{d^2 z}{dx_0^2} + \frac{8}{a^2} \cdot Z = \frac{8}{a^3} \cdot c'_1(x_0, a). \quad (7)$$

В уравнениях (6) и (7) величина Z является производной исследуемой зависимости по величине статического воздействия x_0 . При увеличении амплитуды необходимо учитывать следующий член разложения (5) и т. д. Это приводит к увеличению порядка дифференциального уравнения на два.

Критерий точности восстановления $\frac{df}{dx}$ из уравнений (6) и (7) находится из следующего соотношения [3, 4]:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) c'_{2m+1} \approx \frac{1}{a} [c'_1 - 3c'_3 + 5c'_5].$$

При $\left| \frac{3c'_3}{c'_1} \right| \sim 1$ и $\left| \frac{5c'_5}{c'_1} \right| \ll 1$ хорошую точность дает уравнение (7), при $\left| \frac{5c'_5}{c'_1} \right| \sim 1$ – уравнение (6). Ошибку восстановления можно оценить по формуле [4,6]:

$$\left| \frac{df}{dx} - \frac{1}{a} (c'_1 - 3c'_3 + 5c'_5) \right| < \frac{c'_7}{7a}.$$

При практическом восстановлении дифференциальной восприимчивости, кроме численного задания правой части уравнения (7) (экспериментально определенная

$c'_1(x_0, a)$) необходимо задавать начальные условия $Z(x_H)$ и $\frac{dZ(x_H)}{dx}$, т. е. поставить задачу Коши. В силу численного задания экспериментально определенной правой части уравнения (7) его необходимо решать численно путем сведения его к системе уравнений 2-го порядка. Определенную таким способом задачу Коши можно решать методом Рунге-Кутты 4-го порядка [8]. Другим методом решения уравнения (7) является использование аналитического решения, выраженного общим интегралом записанного в виде свертки с правой частью указанного уравнения [9]:

$$Z(x) = A \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{a}x\right) + B \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{a}x\right) + \frac{2\sqrt{2}}{a^2} \int_{x_0}^x c'_1(x_0, a) \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{a}(x - x_0)\right) dx_0. \quad (8)$$

Здесь A и B являются значениями постоянно определяемых начальных условий. Интеграл в правой части (8) в силу численного задания $c'_1(x_0, a)$ вычисляется численно. Рассмотрим развитую методику на примере зависимости средней кривой намагниченности, часто используемой для описания магнитных свойств тонкого сверхпроводящего диска, находящегося в критическом состоянии. Средняя намагниченность имеет вид [2]:

$$M(H) = -M_0 \cdot \exp\left(\frac{-|H|}{H^*}\right) \left[\sinh\left(\frac{H}{H^*}\right)\right]. \quad (9)$$

Первая гармоника намагниченности определялась по формуле:

$$M'_1(h, H_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(H_0 + h \cdot \cos(t)) \cos(t) dt. \quad (10)$$

Вычисления производилось в системе MathCad. Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости для $h = 0.5H^*$ приведены на рис. 2. Уравнение (7) сводилось к системе 2-х дифференциальных уравнений и решалось численно методом Рунге-Кутты. Величина магнитного поля выражена в единицах H^* , а X_c , X_d , и $M'_1(H, h)/h$ в единицах $X_d(0)$.

Из рис. 2 видно, что дифференциальная восприимчивость хорошо восстанавливается вдали от особенности, находящейся в нуле поля. Для улучшения результатов необходимо уменьшать h или увеличивать степень дифференциального уравнения: необходимо брать следующие члены ряда (4). Точность восстановления сильно зависит от выбора начальных условий $X_c(H_H)$ и $\frac{dX_c(H_H)}{dH}$. Для начала счета в качестве

$X_c(H_H)$ следует взять $\frac{M'_1(H_H)}{h}$. Таким образом, развитая методика восстановления на основе неоднородных дифференциальных уравнений позволяет определять производную зависимости. Рассмотренный метод восстановления можно применять для исследования нелинейных вольтамперных характеристик полупроводниковых структур и сверхпроводников, а также для исследования поляризации сегнетоэлектриков и имеет другие приложения.

Литература

1. Кузьмичев Н.Д. Поведение намагниченности поликристаллических образцов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в слабых магнитных полях // Письма в ЖТФ. 1991. Т.17, вып. 7. С. 56-60.

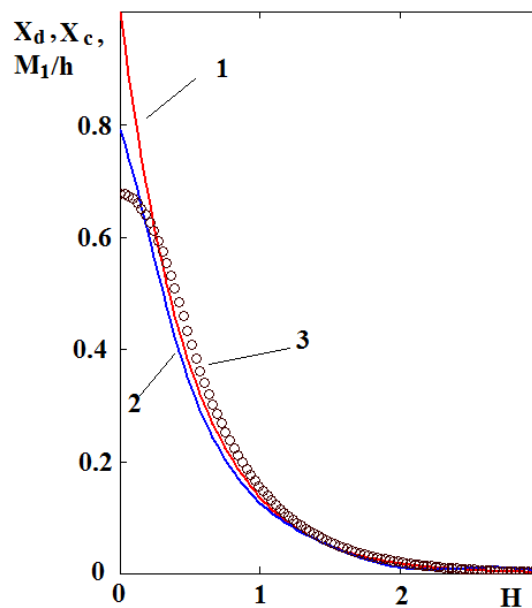


Рис. 2. Кривая 1 – дифференциальная восприимчивость X_d , кривая 2 – восстановленная восприимчивость X_c с помощью уравнения (7) из M'_1 в (10), кривая 3 – функция $\frac{M'_1(H, h)}{h}$.

2. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоники намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ. 1994. Т.64, вып. 12. С. 63–74.
3. Кузьмичев Н.Д. Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции // Письма в ЖТФ. 1994. Т.20, вып.22. С. 39-43.
4. Кузьмичев Н.Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // ЖТФ. 1997. 37, вып.7. С. 124-127.
5. Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А., Шилкин Д.А. Экспериментальное определение производной вольтамперной характеристики нелинейной полупроводниковой структуры с помощью модуляционного Фурье-анализа // ФТП. 2016. Т.50, вып.6. С. 830-833.
6. Кузьмичев Н.Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости. // Журн. средневожского математического общества. 2011. Т.13. №2. С. 70 – 80.
7. Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А., Шитов А.Ю., Бурьянов И.В. Дифференциальные уравнения для восстановления средней дифференциальной восприимчивости сверхпроводников из измерений первой гармоники намагниченности. // Журнал Средневожского математического общества. 2018. Т.20. №3. С. 327–335.

8. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы //М. «ФИЗМАТЛИТ», 2006. 399 с.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики.Т.2. //М. «Наука», 1974. 656 с.

MSC 34A30; 32A05; 82D55

Differential equations for recovery of dependence from its harmonics

N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

Abstract: The article presents non-homogeneous differential equations used for restoring the derivative of the experimentally studied dependence from its first harmonic. Based on the differential equations of the 2nd and 4th orders, an example of dependence recovery is considered. The solution of the Cauchy problem was carried out numerically by the Runge-Kutta method of the fourth order of accuracy.

Keywords: recovery of the derivative dependence, Fourier harmonics, inhomogeneous differential equation, Cauchy problem, Runge-Kutta method.

References

1. Kuzmichev N.D. Behavior of the magnetization of polycrystalline YBa₂Cu₃O_{7-x} samples in weak magnetic fields // Letters to ZhTF. 1991. V.17. No.7. P. 56–60.
2. Kuzmichev N.D. Hysteresis magnetization and generation of harmonics by magnetic materials: Analysis of the spectrum of magnetization harmonics on the example of high-temperature superconductors. // ZhTF. 1994. V.64, No.12. P. 63–74.
3. Kuzmichev N.D. Modulation technique for restoring the original dependences and their derivatives in the case of arbitrary modulation amplitudes // Letters to ZhTF. 1994. V.20, No.22. P. 39–43.
4. Kuzmichev N.D. Estimates of errors in the modulation recovery of the response function and its derivatives // ZhTF. 1997. 37. No.7. P. 124–127.
5. Kuzmichev N.D., Vasyutin M.A., Shilkin D.A. Experimental determination of the derivative of the current-voltage characteristic of a nonlinear semiconductor structure using modulation Fourier analysis // FTP. 2016. Vol.50, No.6. P. 830–833.
6. Kuzmichev N.D. Application of the Taylor-Fourier series for the numerical and experimental determination of the derivatives of the dependence under study // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. T.13. No.2. P. 70–80.
7. Kuzmichev N.D., Vasyutin M.A., Shitov A.Yu., Buryanov I.V. Differential Equations for Reconstructing the Average Differential Susceptibility of Superconductors from Measurements of the First Harmonic of Magnetization // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2018. V.20. No.3. P. 327–335.
8. Formalev V.F., Reviznikov D.L. Numerical methods // M. "FIZMATLIT 2006. 399 p.
9. Smirnov V.I. Course of higher mathematics. T.2 // M. Science, 1974. 656 p.

УДК 517.925:612.8

Математическое моделирование влияния инвазивных электрических полей на динамику нейронных сетей при болезни Паркинсона

Кутыркина М.А., Мамедова Т.Ф.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Данная работа посвящена изучению влияния инвазивной электростимуляции глубоких структур головного мозга на динамику нейронных сетей при болезни Паркинсона. В работе используется математическая модель Ходжкина – Хаксли для имитации активности нейронов под действием электрических полей. В исследовании учитываются такие параметры стимуляции, как проводимость калиевых и натриевых каналов, а также параметры электрического поля, включая диэлектрическую проницаемость, проводимость среды и напряженность электрического поля. Результаты моделирования позволяют понять взаимодействие между электрической стимуляцией и нейронной активностью в головном мозге, а также спрогнозировать влияние различных параметров стимуляции на динамику естественных нейронных сетей.

Ключевые слова: модель Ходжкина-Хаксли, инвазивная электростимуляция, болезнь Паркинсона, мембранный потенциал.

1. Введение

Болезнь Паркинсона — это нейродегенеративное заболевание, характеризующееся прогрессирующей гибелью нейронов в определенных областях мозга, ответственных за управление движением [1]. Одним из методов лечения болезни Паркинсона является инвазивная электростимуляция глубоких структур головного мозга с помощью вживляемых электродов. Однако механизмы, лежащие в основе эффекта этой стимуляции, до сих пор до конца не изучены. Понимание этих механизмов является ключом к разработке более эффективных методов лечения и оптимизации параметров стимуляции.

Математическое моделирование динамики нейронных сетей под действием инвазивных электрических полей является новым и перспективным подходом к изучению эффектов стимуляции. Данный подход позволяет исследовать взаимодействие между электрической стимуляцией и нейронной активностью в головном мозге, а также прогнозировать влияние различных параметров стимуляции.

2. Описание модели и постановка задачи

Для моделирования динамики нейронных сетей была использована модель Ходжкина-Хаксли, которая описывается системой дифференциальных уравнений. В системе приняты следующие обозначения $V(t)$ – мембранный потенциал, а $m(t)$, $h(t)$, $n(t)$ являются воротными переменными: m и n – переменные активации для калиевых и натриевых каналов, а h – переменная инактивации натриевых каналов. Воротные переменные – это вероятности открытия или закрытия ионных каналов в нейронной

мембране. Остальные параметры известны и определяются экспериментально [2]. Сама модель имеет вид:

$$\begin{cases} C_m \frac{dV}{dt} = I_{ext} + I_{syn}(t) - G_{Na} - G_K - G_L, \\ \frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m, \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h, \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{0.1(25 - V)}{0.1 \exp(25 - V) - 1}, & \alpha_n &= \frac{0.01(10 - V)}{1 + 0.1 \exp(10 - V) - 1}, \\ \alpha_m &= \frac{0.1(25 - V)}{0.1 \exp(25 - V) - 1}, & \beta_m &= 4 \exp\left(\frac{-V}{18}\right), \\ \beta_h &= \frac{1}{1 + \exp(0.1(30 - V))}, & \beta_n &= 0.125 \exp\left(\frac{-V}{80}\right), \\ G_{Na} &= g_{Na}m^3h(V - V_{Na}), & G_K &= g_Kn^4h(V - V_K), & G_L &= g_L(V - V_L). \end{aligned}$$

Сумма синаптических токов рассчитывается по следующей формуле:

$$I_{syn} = C_m g_{exc} \left[\sum_{k=1}^{N_e} \sum_l \mathbf{I}(t - t_k^l) - K \sum_{p=1}^{N_i} \sum_n \mathbf{I}(t - t_p^n) \right]$$

Здесь N_e – количество возбуждающих нейронов, Здесь N_i – количество тормозных нейронов, \mathbf{I} – индикаторная функция, принимающая значение 1, если их аргументы равны нулю, и 0 – в противном случае, t_a^b – время разряда a -го спайка b -го нейрона, C_m есть мембранная емкость, $g_{exc} = 1$ и $K = 4$ – константы, которые вычисляются эмпирически.

В норме проводимость калиевых каналов составляет 120 мСм, натриевых каналов – 36 мСм. В случае болезни Паркинсона эти параметры принимают значения 150 мСм и 18 мСм соответственно.

Одним из способов лечения болезни Паркинсона является применение инвазивных электрических полей. Чтобы учесть влияние электрического поля на нейронную сеть, изменим первое уравнение системы, добавив в него силу электрического поля F , действующего на мембрану клетки:

$$C_m \frac{dV}{dt} = I_{ext} + I_{syn}(t) - G_{Na} - G_K - G_L + F \quad (2)$$

На основе закона Ома и закона Кулона сила электрического поля рассчитывается по формуле:

$$F = E(V - U),$$

где E – напряженность электрического поля, которое воздействует на потенциал клетки и рассчитывается по формуле:

$$E = U \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Определим параметры инвазивного электрического поля, действующего на нейроны головного мозга, такие как диэлектрическая постоянная среды ϵ , проводимость среды σ и напряжение электрического поля U . Значения диэлектрической постоянной межклеточной жидкости в головном мозге находятся в диапазоне от 50 до 80. Проводимость межклеточной жидкости составляет около 1-2 См.

Напряжение, применяемое при глубокой стимуляции мозга, обычно составляет несколько вольт. Однако, точные значения напряженности электрического поля могут варьироваться в зависимости от индивидуальных характеристик пациента, выбранной стимуляционной области и настроек устройства стимуляции. Обычно при лечении нервных заболеваний типичная амплитуда стимуляционного импульса составляет от 1 до 10 В [3].

Была поставлена задача, найти такое значение напряжения инвазивного электрического поля U , при котором динамика нейронных сетей при болезни Паркинсона была бы близка к динамике нейронных сетей здорового человека.

3. Результаты численных экспериментов

Модель, о которой идет речь, была реализована с использованием среды разработки Google Colaboratory [4]. Эта среда обладает высокой скоростью вычислений и позволяет использовать Python-библиотеки для анализа данных в режиме онлайн. В процессе программирования были использованы библиотеки NumPy, предоставляющая широкий набор функций для численного моделирования, и Matplotlib, которая позволяет визуализировать полученные данные.

Исследование велось при следующих входных параметрах: количество возбуждающих нейронов – 200, количество тормозящих нейронов – 50. В ходе первого численного эксперимента сравнивалось поведение мембранного потенциала без учета влияния F , согласно модели (1). Выяснилось, что период колебаний мембранного потенциала нейронов с болезнью Паркинсона меньше, чем период колебаний V здорового человека и составляет 11.88 мс.

В ходе второго численного эксперимента изучалось влияние внешнего электрического поля F на мембранный потенциал согласно модели (2) при значениях диэлектрической постоянной $\epsilon = 70$ и проводимости среды $\sigma = 1$ См. В результате этого эксперимента было установлено, что при значении напряжения $U = 4.866$ В период колебаний потенциала при болезни Паркинсона близок к аналогичной величине здоровых нейронов (14.5 мс) и составляет 14.67 мс.

Более высокие значения напряжения приводит к уменьшению периода колебаний мембранного потенциала, что говорит о попытках организма восстановить нормальную активность нейронов или компенсировать потерю дофамина, которая возникает при болезни Паркинсона. Низкие значения напряжения, наоборот, приводят к увеличению периода колебаний: что время, необходимое для возникновения и восстановления мембранного потенциала, увеличено, то сказывается на скорости и эффективности передачи информации между нейронами.

4. Заключение

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях и разработке новых подходов к лечению нейродегенеративных заболеваний. Математическое моделирование динамики нейронных сетей под воздействием электрических полей может служить основой для создания более точных и адаптированных мето-

дов стимуляции, способных более точно влиять на нейронную активность и улучшать эффекты лечения.

Литература

1. Буркова Е.Д., Иванова Н.В., Иванова Ю.В. Механизмы развития болезни Паркинсона и стратегии терапии // Нервные болезни, 2016. Т.6, № 1. С. 10-16.
2. Кутыркина М.А., Мамедова Т.Ф. Численное моделирование нейронной сети на основе модели Ходжкина-Хаксли [Электронный ресурс] // Огарев-online, 2022. №14. – Режим доступа: <https://journal.mrsu.ru/arts/chislennoe-modelirovanie-nejronnoj-seti-na-osnove-modeli-xodzhkina-xaksli>
3. Lozano A.M., Lipsman N. Probing and regulating dysfunctional circuits using deep brain stimulation. Neuron, 2013. P. 406-424.
4. GoogleColab: сайт – URL: – <https://colab.research.google.com/>

MSC 34A12, 92C30

Mathematical modeling of the influence of invasive electric fields on the neural networks' dynamics in Parkinson's disease

M.A. Kutyrkina, T.F. Mamedova

National Research Mordovia State University

Abstract: This work is devoted to studying the effect of invasive electrical stimulation of deep brain structures on the dynamics of neural networks in Parkinson's disease. The work uses the Hodgkin-Huxley mathematical model to simulate the activity of neurons under the action of electric fields. The study takes into account stimulation parameters such as the conductance of potassium and sodium channels, as well as electric field parameters, including dielectric constant, medium conductivity and electric field strength. Simulation results allow us to understand the interaction between electrical stimulation and neural activity in the brain, as well as to predict the impact of various stimulation parameters on the dynamics of natural neural networks.

Keywords: Hodgkin-Huxley model, invasive electrical stimulation, Parkinson's disease, membrane potential.

References

1. Burkova E.D., Ivanova N.V., Ivanova Yu.V. Mexanizmy' razvitiya bolezni Parkinsona i strategii terapii // Nervny'e bolezni, 2016. T.6. No.1. P. 10-16.
2. Kutyrkina M. A., Mamedova T. F. Chislennoe modelirovanie nejronnoj seti na osnove modeli Xodzhkina-Xakslia [E'lektronny'j resurs] // Ogarev-online, 2022. No.14. – Rezhim dostupa: <https://journal.mrsu.ru/arts/chislennoe-modelirovanie-nejronnoj-seti-na-osnove-modeli-xodzhkina-xakslia>
3. Lozano A.M., Lipsman N. Probing and regulating dysfunctional circuits using deep brain stimulation. Neuron, 2013. P. 406-424.
4. GoogleColab: website – URL: – <https://colab.research.google.com/>

УДК 519.63

О точности разрывного метода Галеркина при расчете газодинамических ударных волн*

Ладонкина М.Е.^{1,2}, Неклюдова О.А.^{1,2}, Остапенко В.В.², Тишкин В.Ф.^{1,2}

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской Академии наук¹,

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской
Академии наук²

Аннотация: В статье представлены результаты расчетов газодинамических ударных волн, возникающих при решении задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. Эти расчеты проводились по трем модификациям DG (Discontinuous Galerkin) метода, в которых решение представлено в виде кусочно-линейной разрывной функции. Результаты расчетов показали, что DG методы, в которых для монотонизации полученного решения применяется ограничитель Кокбуерна, обладают примерно одинаковой точностью в областях влияния ударных волн, в то время как немонотонный DG метод, в котором этот ограничитель не используется, демонстрирует в этих областях существенно более высокую точность. Это позволяет использовать немонотонный DG метод в качестве базисного при построении комбинированной схемы, которая монотонно локализует фронты ударных волн и одновременно сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ударные волны, разрывный метод Галеркина

1. Введение

Предыдущие исследования в области численных схем для гиперболических систем законов сохранения показали, что среди двухслойных по времени линейных схем не существует схем повышенного порядка аппроксимации [1]. В связи с этим, развитие теории схем сквозного счета было направлено на создание численных схем, которые обеспечивают повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность на ударных волнах за счет нелинейной коррекции потоков. Эта коррекция приводит к нелинейности данных схем при аппроксимации линейных гиперболических систем. В результате были разработаны различные классы NFC (Nonlinear Flux Correction) схем, такие как MUSCL, TVD, WENO, DG и CABARET. К NFC схемам также относятся гибридные схемы, в которых численное решение на каждом временном слое монотонизируется с помощью специального численного алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. Главное преимущество NFC схем состоит в их способности с высокой точностью локализовать ударные волны, не приводя к существенным нефизическим осцилляциям. При этом основной недостаток NFC схем заключается в том, что эти схемы имеют не более чем первый порядок локальной сходимости в областях влияния ударных волн и, по существу, схемами повышенной точности не являются. Было показано, что некоторые немонотонные схемы, в частности, схема Русанова из [2], схема CWA (Compact Weak Approximation)

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФ, проект № 22-11-00060

из [3] и схема DG1 из [4], в отличие от NFC схем, сохраняют повышенную точность в областях влияния ударных волн, что позволило использовать эти схемы в качестве базисных при построении для системы уравнений мелкой воды комбинированных схем сквозного счета [5-8], которые монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния.

В данном исследовании изучается точность разрывного метода Галеркина при численном моделировании разрывных решений системы уравнений неизоэнтропической газовой динамики, которая, в отличие от системы уравнений мелкой воды, в общем случае не допускает записи в форме инвариантов. Для проведения сравнительного анализа точности используются следующие схемы: немонотонная схема DG1 и две NFC схемы DG1A1 и DG1A2, алгоритмы которых приведены в [5]. Для тестирования используется специальная задачи Коши [9] с гладкими периодическими начальными данными, при решении которой внутри расчетной области в результате градиентных катастроф формируется последовательность изолированных ударных волн, распространяющихся с постоянной скоростью. Между этими ударными волнами образуются их области влияния, которые с течением времени заполняют всю расчетную область. Для данной задачи Коши будем использовать аббревиатуру PCPG (Periodic Cauchy Problem for Gas dynamics).

2. Задача Коши для гиперболической системы законов сохранения

Рассмотрим квазилинейную гиперболическую систему законов сохранения

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – искомая, а $f(u)$ – заданная гладкие вектор-функции. Поставим для системы (1) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x) \equiv u_0(x + X). \quad (2)$$

Предположим, что задача (1), (2) при $t > 0$ имеет единственное ограниченное обобщенное решение $u(x, t)$, в котором с течением времени формируется последовательность изолированных ударных волн.

Численные схемы разрывного метода Галеркина, аппроксимирующие задачу (1), (2), будем строить на равномерной прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \quad (3)$$

где $h = \frac{X}{M}$ – шаг сетки по пространству, M – заданное целое положительное число,

$$\tau = zh / \max_{k,j,n} |\lambda_k(v_h(x_{j+1/2}, t_n))| \quad (4)$$

τ – шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором $z \in (0, 1)$ – коэффициент запаса, $\lambda_k(u)$ – собственные значения матрицы Якоби $f_u(u)$ системы (1), $v_h(x_{j+1/2}, t_n)$ – значение численного решения $v_h(x, t_n)$ в полужелом пространственном узле $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$.

Поскольку в рассматриваемой тестовой задаче Коши (1), (2) точное решение $u(x, t)$ заранее неизвестно, то для приближенного вычисления ошибок численного решения $v_h(x, t_n)$ этой задачи мы применим метод Рунге [5]. Для этого зафиксируем

на сетке (3) некоторый узел $(x_{j+1/2}, t_n)$, где $n \geq 1$, и введем для него обозначение (\tilde{x}, \tilde{t}) , где $\tilde{x} = (j + 1/2)h$ и $\tilde{t} = n\tau > 0$. Предположим, что на последовательности сгущающихся сеток

$$S_i = \{(x_j^i, t_n^i) : x_j^i = jh_i, t_n^i = n\tau_i, n \geq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $h_i = h/3^{i-1}$, $\tau_i = \tau/3^{i-1}$, получаемых путем сжатия базисной сетки (3), численное решение $v_{h_i}(x, t_n^i)$ в точке (\tilde{x}, \tilde{t}) сходится к точному решению $u(x, t)$ с порядком r , который приближенно вычисляется по следующей формуле Рунге

$$r = \log_3 \frac{|v_{h_1} - v_{h_2}|}{|v_{h_2} - v_{h_3}|} = \log_{1/3} \frac{|v_{h_2} - v_{h_3}|}{|v_{h_1} - v_{h_2}|}, \quad (5)$$

С учетом (5) получаем приближенную оценку для вектора ошибок численного решения на базисной сетке (3)

$$\delta v_h = v_h - u = (v_{h_1} - v_{h_2}) \left(1 - \frac{|v_{h_2} - v_{h_3}|}{|v_{h_1} - v_{h_2}|}\right)^{-1},$$

из которой следует формула для относительных дисбалансов (погрешностей) численного решения

$$\Delta v_h = \lg \frac{|\delta v_h|}{|v_h|} = \lg \frac{|v_h - u|}{|v_h|}. \quad (6)$$

3. Задача Коши для системы уравнений неизэнтропической газовой динамики

В качестве конкретной гиперболической системы (1) выберем систему законов сохранения неизэнтропической газовой динамики, для которой

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где ρ , u , p и $e = \varepsilon + u^2/2$ – плотность, скорость, давление и удельная полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия. Давление и внутренняя энергия удовлетворяют уравнению состояния идеального политропного газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, в котором $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты двухатомного газа. Система (1), (7) имеет два изоэнтропических квазиинварианта w_1 , w_3 и инвариант $w_2 = s$, которые задаются формулами

$$w_1 = u - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad w_2 = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad w_3 = u + \frac{2c}{\gamma - 1},$$

где s – энтропия и $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ – скорость звука.

Рассмотрим для системы (1), (7) задачу Коши с гладкими периодическими начальными условиями (задача PCPG)

$$w_1(x, 0) = -10, \quad w_2(x, 0) = 0, \quad w_3(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi(x+3)}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + 10, \quad (8)$$

где $X = 10$ – длина периода. Из условий (8) однозначно определяются начальные значения $u(x, 0)$ базисных параметров течения, в частности, плотность газа $\rho(x, 0)$, показанная на рис. 1а пунктирной линией. Поскольку в начальный момент времени энтропия газа постоянна, то во всех гладких частях точного решения, не входящих в области влияния ударных волн, течение газа является изоэнтропическим.

В точном решении задачи PCPG в момент времени $t_* \approx 1.35$ формируется последовательность изолированных ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями в положительном направлении оси x . На рис. 1а и 2а в моменты времени $t = 1$ и $t = 5$ сплошными линиями изображены квазиточные профили плотности, получаемые при расчете по схеме DG1A1 на мелкой сетке (3), в которой $h = 1/1215$. К моменту времени $t = 1$ в точном решении начинают формироваться области больших градиентов, но решение еще остается гладким (рис. 1а). В момент времени $t = 5$ сформировавшиеся ударные волны проходят расстояние большее длины периода $X = 10$ и вся расчетная область становится их областью влияния. С учетом этого сильный разрыв, расположенный на линии, приведенной на рис. 2а, соответствуют ударной волне, которая сформировалась в момент времени t_* внутри интервала $[-X, 0]$.

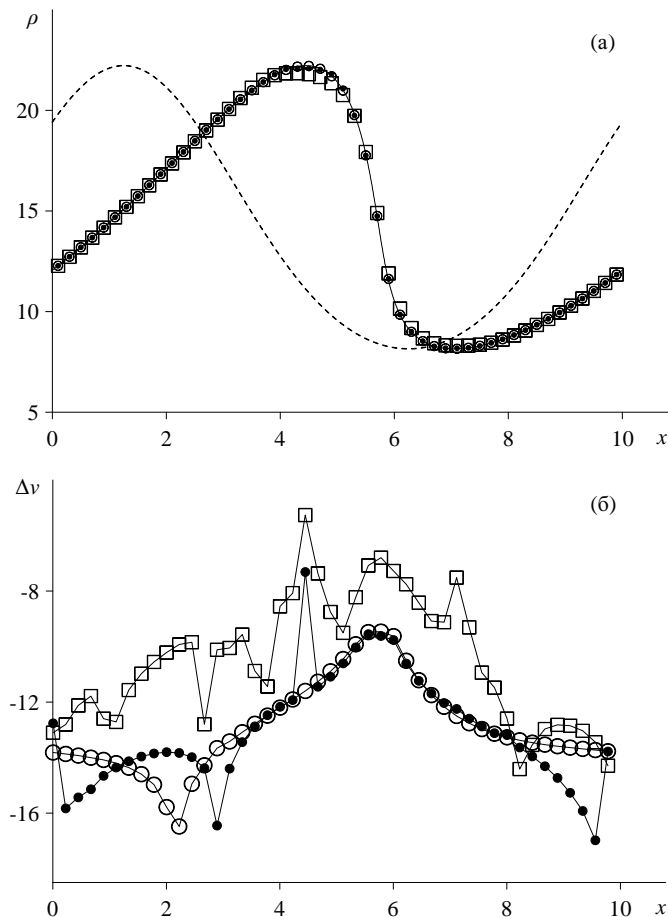


Рис. 1. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 1$ при численном решении задачи PCPG.

На рис. 1 и 2 приведены результаты расчетов задачи PCPG по схемам DG1 (кружки), DG1A1 (квадратики) и DG1A2 (точки) на равномерной сетке (3). На верхних рисунках с индексом (а) показаны значения плотности газа, получаемые при расче-

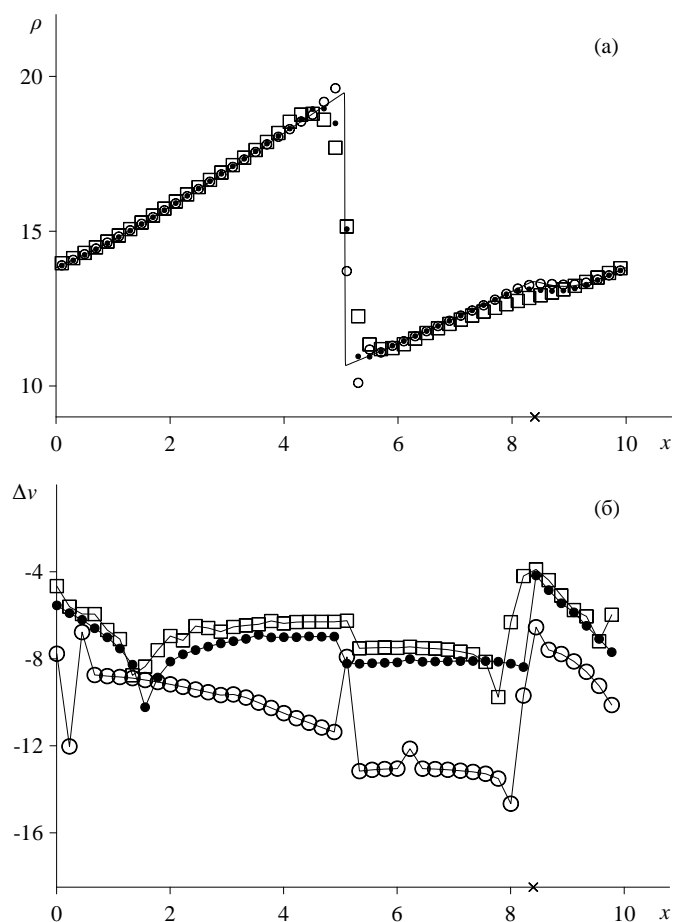


Рис. 2. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 5$ при численном решении задачи RSPG.

те, в котором $h = 0.2$. Из этих рисунков видно, что, в отличие от NFC схем DG1A1 и DG1A2, немонотонная схема DG1 имеет заметные нефизические осцилляции в окрестностях ударных волн. На нижних рисунках с индексом (б) приведены относительные локальные дисбалансы (б), получаемые при расчете на базисной сетке (3), где $h = 1/135$. Значения этих дисбалансов показаны для каждого 30-го полуцелого пространственного узла разностной сетки.

Из рис. 1б и 2б следует, что NFC схемы DG1A1 и DG1A2, в которых для монотонизации численного решения применяется ограничитель Кокбуерна, имеют приблизительно одинаковую точность в областях влияния газодинамических ударных волн, в то время как немонотонная схема DG1, в которой этот ограничитель не используется, демонстрирует в этих областях существенно более высокую точность. Это позволяет использовать схему DG1 в качестве базисной при построении комбинированной схемы, которая монотонно локализует фронты ударных волн и одновременно сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т.47. № 3. С. 271-306.

2. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счёта разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т.180. № 6. С. 1303-1305.
3. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. № 12. С. 1857-1874.
4. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection - dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 150-268. doi.org/10.1007/BFb0096353
5. Брагин М.Д., Ковыркина О.А., Ладонкина М.Е., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф., Хандеева Н.А. Комбинированные численные схемы // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т.62. № 11. С. 1763-1803.
6. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517-522.
7. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639-643.
8. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2019. Т.489. № 2. С. 119-124.
9. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете газодинамических ударных волн // Докл. АН. 2023. Т.510. № 2. С. 43-51.

MSC 65M22

On the accuracy of discontinuous Galerkin method calculating gas-dynamic shock waves

M.E. Ladonkina^{1,2}, O.A. Nekliudova^{1,2}, V.V. Ostapenko¹, V.F. Tishkin^{1,2}
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences¹,
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences²

Abstract: We present the results of calculations of gas-dynamic shock waves, arising in solving the Cauchy problem with smooth periodic initial data. These calculations were carried out for three modifications of DG (Discontinuous Galerkin) method, in which the solution is represented as a piecewise linear discontinuous function. The results showed that DG methods, in which the Cockburn's limiter is applied to monotone the obtained solution, have approximately the same accuracy in the areas of influence of shock waves, while the nonmonotonic DG method, in which this limiter is not used, demonstrates in these areas significantly higher accuracy. This allows the nonmonotonic DG method to be used as a basic one when constructing a combined scheme, which monotonously localizes the fronts of shock waves and at the same time preserves increased accuracy in the areas of their influence.

Keywords: gas dynamic equations, shock waves, discontinuous Galerkin method.

References

1. Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics // Sbornik: Mathematics 1959. T. 47. No. 8-9. P. 357-393.
2. Rusanov V.V. Difference schemes of the third order of accuracy for the through calculation of discontinuous solutions // Doklady Mathematics USSR. 1968. T.180. No.6. P. 1303-1305.
3. Ostapenko V.V. Construction of high-order accurate shock-capturing finite-difference schemes for unsteady shock waves // Comp. Mathematics and Mathematical Physics. 2000. T.40. No.12. P. 1784-1800.
4. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection - dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V.1697. P. 150-268.
doi.org/10.1007/BFb0096353
5. Bragin M.D., Kovyorkina O.A., Ladonkina M.E., Ostapenko V.V., Tishkin V.F., Khandeeva N.A. Combined numerical schemes // Comp. Mathematics and Mathematical Physics. 2022. T.62. No.11. P. 1743-1781.
6. Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On the construction of combined finite-difference schemes of high accuracy // Doklady Mathematics. 2018. T. 97. No.1. P. 77-81.
7. Zyuzina N., Kovyorkina O., Ostapenko V. Monotone finite-difference scheme preserving high accuracy in regions of shock influence // Doklady Mathematica. 2018. T. 98. No.2. C. 506-510.

8. Ladonkina M.E., Nekliudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. Combined DG scheme that maintains increased accuracy in shock wave areas // Doklady Mathematics. 2019. T.100. No.3. P. 519-523.
9. Ladonkina M.E., Nekliudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. On the accuracy of discontinuous Galerkin method calculating gas-dynamic shock waves // Doklady Mathematics. 2023. T. 510. No.2. P. 43-51.

УДК 519.63

Применение узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера на задаче Сода

Ладонкина М.Е.^{1,2}, Повещенко Ю.А.^{1,2}, Чжан Хаочэнь^{1,2}

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН¹, МФТИ²

Аннотация: Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных создано семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем (ПКРС) с временными весами, переменными по пространству. Значительное внимание в работе уделено применению способов конструирования регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии, сохраняющих свойства ПКРС данного класса на классической задаче Сода, анализу их амплитуды и возможности их использования на неравномерных сетках. Построенная схема имеет точность второго порядка и реализуется с помощью простых итерационных процессов. Разработанная программа имеет достаточно высокую точность даже на крупных сетках. Выполнено тестирование классической задачи – задачи Сода для подтверждения эффективности разработанной схемы и методов.

Ключевые слова: полностью консервативные разностные схемы, метод опорных операторов, газовая динамика, задача Сода.

1. Полностью консервативная дифференциально разностная схема

На рис. 1 представлена соответствующая разностная сетка, где ω – узлы разностной сетки, а Ω – ячейки. К узлам ω будем относить термодинамические величины: ρ , ε , P и внутреннюю энергию $E = \rho\varepsilon$, скорость \vec{u} , объём v и приузловую массу $m = \rho v$, а объём V – к ячейкам Ω .

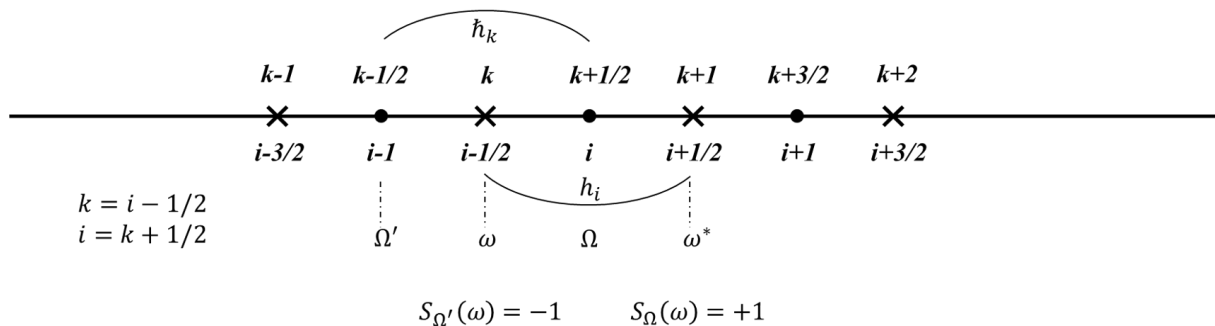


Рис. 1. Разностная сетка.

Очевидно, что $v_\omega = \tilde{h}_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}$, $V_\Omega = h_i$, $\rho_\omega = \frac{m_\omega}{v_\omega} = \rho_k$.

Выпишем полностью консервативную [2] разностную схему (ПКРС) в переменных Эйлера:

$$m_t = -\nu DIN_D \vec{\mu}_D^{\sim} \quad (1)$$

$$(mu)_t = -\nu GRAD_\sigma \pi^{\sim} - \nu DIT_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \cdot \vec{u}_D^{\sim}) \quad (2)$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim} V DIV_\sigma \vec{u}^{\sim})_\Omega - \nu DIN_D(\vec{\mu}_{ED}^{\sim} + \vec{\chi}_D^{\sim}) \quad (3)$$

$$(m \frac{\vec{u}^2}{2})_t = -\nu(u^{\sim}, GRAD_\sigma \pi^{\sim}) - \nu DIN_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \frac{\vec{u}_D^2}{2}) \quad (4)$$

Здесь все величины обозначим следующим образом:

$$\vec{\mu} = \rho \vec{u}, \quad \vec{\mu}_E = \varepsilon \vec{\mu} = E \vec{u}, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^{\sim} = \rho^{(\psi_\rho)}, \quad \psi_\rho = const; \quad (5)$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_D^{\sim} = M_D^{\sim} - \nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim}; \quad (6)$$

$$\pi_\Omega^{\sim} = P_\Omega^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_\sigma(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)}), \quad P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_\omega, \quad \psi_u = const; \quad (7)$$

$$\vec{\chi}_D^{\sim} = \{\vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} | \vec{\chi}_{ED}^{\sim}\}, \quad \vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} = -k_\varepsilon GRAN_D \hat{E}, \quad \vec{\chi}_{ED}^{\sim} = -k_E GRAN_D \hat{E}; \quad (8)$$

$$M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_{ED}^{\sim} = M_{ED}^{\sim} - \nu_E^{\sim} GRAN_D(\rho^{\sim} \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}), \quad \psi_\varepsilon = const. \quad (9)$$

На слоях по времени t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – шаг по времени) введены разностные производные по времени и пространственно-точечные временные интреполяции:

$$u_t = \frac{\hat{a} - a}{\tau}, \quad a^{(\delta)} = \delta a + (1 - \delta)a.$$

Здесь интерполяционный вес δ может связываться с узлами пространственной сетки ω , например, по закону: $\delta = \frac{\sqrt{\hat{m}}}{\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m}}$, ψ – постоянные интерполяционные веса по времени. Таким образом, отметим, что под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций a и \hat{a} между слоями t и \hat{t} будем понимать некоторые интерполяционные величины a^{\sim} , например, для скорости полагаем $u^{\sim} = u^{(\delta)}$. В выражении $\Delta_\sigma \pi$, если узел $\omega = \delta\omega$ – граничный, то добавлено слагаемое $\pi_\delta \omega$ на границе со знаковой функцией $S_\delta \omega$, в зависимости от направления граничной нормали.

Далее для континуальных операций векторного анализа $\text{div } \vec{u}$, $\text{grad } P$, $\text{div } (\vec{\mu} \cdot \vec{u})$ введены их разностные аналоги:

$$DIN_D \vec{\mu}_D = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega), \quad DIN_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (10)$$

$$DIT_D(\vec{\mu}_D \cdot \vec{u}_D) = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega) \vec{u}_D(\Omega), \quad DIT_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (11)$$

$$GRAN_D P = \frac{1}{V} \Delta_\Omega P, \Delta_\Omega P = - \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) P_\omega, \quad GRAN_D : (\omega) \rightarrow (\Omega), \quad (12)$$

$$GRAD_\sigma \pi = \frac{1}{v} \Delta_\sigma \pi, \Delta_\sigma \pi = \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) \pi_\omega + S_{\delta\omega} \pi_{\delta\omega}, \quad GRAD_\sigma : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (13)$$

$$DIV_\sigma \vec{u} = -\frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) u_\omega, \quad DIV_\sigma : (\omega) \rightarrow (\Omega). \quad (14)$$

2. Задача Сода

Для тестирования построенной схемы выполнены расчёты классической задачи Сода (Sod problem) о распаде произвольного разрыва. В таблице 1 представлены начальные условия этой задачи. За систему единиц измерения в расчетах принята СИ. Показатель адиабаты $\gamma = 1.4$.

Таблица 1. Начальные условия в задаче Сода

Левая область			Правая область		
ρ	u	P	ρ	u	P
1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1

На рис. 2 показаны профили плотности задачи Сода в момент $T = 2.0$ с.

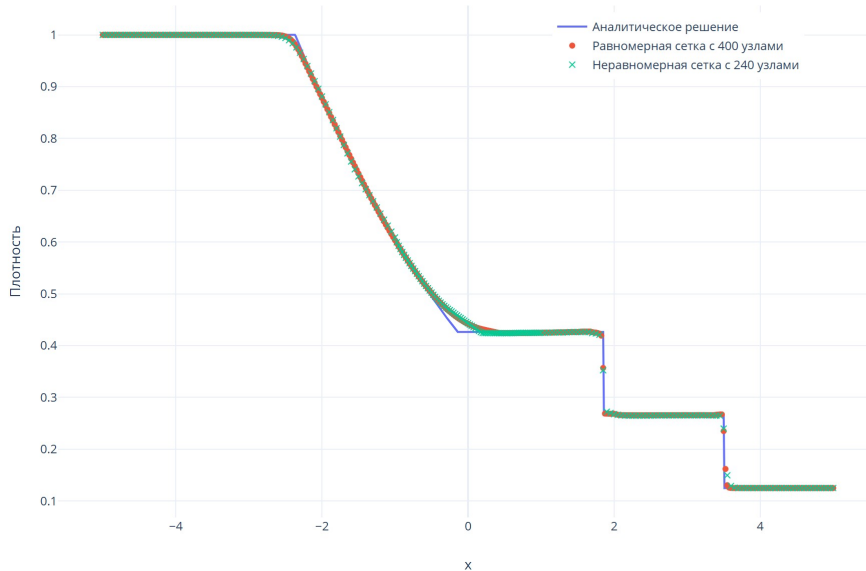


Рис. 2. Профиль плотности в момент $T = 2.0$ с.

На рис. 2 наряду с аналитическим решением (синяя линия), приводятся численные решения на равномерной сетке (красный пунктир) и на неравномерной сетке (зелёная прерывистая линия).

Литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
2. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы // ЖВМиМФ, 1969. Т.9, №4, С. 953-958
3. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша, АН СССР. номер 160, 1982.
4. Повещенко Ю.А., Ладонкина М.Е., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Шарова Ю.С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АНБ 2019. № 14. 23 с.
5. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. (2020) Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science, vol 11958. Springer.
6. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера, Журнал СВМО, 24:362022, С. 317–330
7. Sod G. A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, IJournal of Computational Physics, Elsevier, 1978, 27 (1), P. 1-31

MSC 65M22

Application of viscous-filled nodal completely conservative difference schemes to the gas dynamics equations in Euler variables on the Soda problem

M.E. Ladonkina^{1,2}, Yu.A. Poveschenko^{1,2}, H. Zhang^{1,2}

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS¹,
Moscow Institute of Physics and Technology²

Abstract: For the equations of gas dynamics in Euler variables, a family of two-layer time-dependent completely conservative difference schemes (CCDS) with time weights defined in space is created. Considerable attention is paid to the application of methods of constructing regularized flows of mass, momentum and internal energy preserving the properties of CCDS of this class on the classical Sod problem, to the analysis of their amplitude and the possibility of their use on non-uniform meshes. The constructed scheme has second-order accuracy and is realized by simple iterative processes. Methods and programs based on the constructed scheme for shock wave tube problems are developed. The developed program has high accuracy, even with large meshes. Testing of the classical Soda problem is performed to confirm the effectiveness of the developed scheme and methods.

Keywords: Completely conservative difference scheme, method of reference operators, gas dynamics, Sod problem.

References

1. Samarsky A.A., Popov Yu.P. Difference methods for solving problems of gas dynamics. Moscow, science, 1980.
2. Popov Yu.P., Samarsky A.A. Completely conservative difference schemes // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1969. Vol.9, No.4, P.953-958
3. Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A. Completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in the presence of mass sources // Preprints of the KIAM, ANSSR. No.160, 1982.
4. Poveshchenko Yu.A., Ladonkina M.E., Podryga V.O., Rahimli O.R., Sharova Yu.S. On one two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Euler variables with adaptive regularization// Preprints of the KIAM, AN, 2019. No.14. 23 p.
5. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. (2020) Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science. Vol.11958. Springer.
6. Ladonkina M. E., Poveschenko Yu. A., Rahimly O.R., Zhang H. Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables, Zhurnal SVMO, 24:3, 2022, P. 317–330

7. Sod G. A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, IJournal of Computational Physics, Elsevier, 1978, 27 (1), P. 1-31

УДК 517.91

Математическое моделирование автоколебаний в реакции окисления метана на металлических катализаторах

Лашина Е.А.¹, Чумакова Н.А.¹, Чумаков Г.А.²

Институт катализа им. Г.К. Борескова СО РАН¹,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН²

Аннотация: В данной работе представлены результаты математического моделирования автоколебаний в реакции окисления метана на металлических катализаторах. Представлены условия, при которых математическая модель является системой сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что соответствующая вырожденная система имеет устойчивый предельный цикл. Изучено, как изменяются форма и период колебаний при изменении параметров.

Ключевые слова: автоколебания, сингулярно-возмущенные системы ОДУ, гетерогенная каталитическая реакция

1. Математическая модель реакции окисления метана на металлических катализаторах

Для описания наблюдаемых экспериментально автоколебаний в работах [1, 2] предложена математическая модель, описывающая изменение во времени покрытий поверхности катализатора различными соединениями, парциальных давлений реагентов в газовой фазе и температуры катализатора. Математическая модель имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= f(x, y, P, T), \\ \frac{d}{dt}y &= g(x, y, P, T), \\ \frac{d}{dt}P &= h(x, P, T), \\ \frac{d}{dt}T &= s(x, P, T),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{11})$ – вектор покрытий поверхности катализатора адсорбированными соединениями, $y = (y_1, \dots, y_{2M})$ – вектор безразмерных концентраций соединений, растворенных в объеме катализатора, $P = (P_1, \dots, P_6)$ – вектор парциальных давлений соединений в газовой фазе, T – температура катализатора.

Переменные модели (1) определяются следующими условиями: $x_i \geq 0$, для $i = \overline{1, 11}$, $x_1 + \dots + x_{11} \leq 1$; y_m и $P_j \geq 0$, для $m = \overline{1, 2M}$, $j = \overline{1, 6}$; и $T \geq 0$. Параметр M – это число монослоев в объеме катализатора, доступном для растворения.

Компоненты вектор-функций f , g , h и функция s являются нелинейными и гладкими. Математическая модель построена на основании закона действующих масс в условиях проточного неизотемического реактора идеального перемешивания.

2. Динамика кинетической модели. Сингулярно-возмущенная система

Пусть функции $g \equiv 0$, $h \equiv 0$ и $s \equiv 0$. Тогда математическая модель (1) существенно упрощается, и имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}x = f(x, y, P, T), \quad (2)$$

где P , y и T – параметры. Параметрический анализ системы уравнений (2) в случае, когда в объеме катализатора нет растворенных соединений, и вектор $y = 0$ проведен в работе [1]. В частности, рассмотрен случай, когда скорости некоторых стадий являются быстрыми. Тогда в части уравнений система (2) содержит малый параметр перед производной, и ее можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt}x_1 &= \tilde{f}_1(x, P, T), \\ &\dots \\ \varepsilon \frac{d}{dt}x_8 &= \tilde{f}_8(x, P, T), \\ \frac{d}{dt}x_9 &= \tilde{f}_9(x, P, T), \\ &\dots \\ \frac{d}{dt}x_{11} &= \tilde{f}_{11}(x, P, T). \end{aligned} \quad (3)$$

Тем самым система (3) является сингулярно-возмущенной, и, согласно теореме Тихонова, ее динамика определяется динамикой вырожденной системы, когда параметр $\varepsilon = 0$. В работе [1] нами определены значения параметров P и T , при которых вырожденная система имеет устойчивый предельный цикл.

С помощью методов продолжения по параметру с применением численного интегрирования определен устойчивый предельный цикл в системе (3). Аналогично, изучены автоколебания в исходной системе (1). Кроме того, в работе [2] предложены условия, при которых форма и период автоколебаний существенным образом определяется скоростью растворения соединений в объем катализатора.

Литература

1. Lashina E.A., Kaichev V.V., Saraev A.A., Vinokurov Z.S., Chumakova N.A., Chumakov G.A. Bukhtiyarov V.I. Experimental study and mathematical modelling of self-sustained kinetic oscillation in catalytic oxidation of methane over nickel // The Journal of Physical Chemistry A, 2017. Vol.121. No.37. P. 6874-6886
2. Lashina E.A., Vinokurov Z.S., Saraev A.A., Kaichev V.V. Self-sustained oscillations of methane over palladium: experimental study and mathematical modelling. // Journal of Chemical Physics, 2022. Vol.157. No.4. P. 044703:1-14.

MSC 34D20

Mathematical modeling of self-sustained oscillations in methane oxidation over metallic catalysts

E.A. Lashina¹, N.A. Chumakova¹, G.A. Chumakov²

Boreskov Institute of Catalysis SB RAS¹,
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS²

Abstract: The results of mathematical modeling of self-sustained oscillations in methane oxidation reaction over metallic catalysts are presented. The model contains the singular perturbations under some conditions. We determined the parameters at which both the degenerated and initial systems have the stable limit cycle. The dependences of the shape and the period of the oscillations on the parameters are studied to describe the experimental data.

Keywords: self-sustained oscillations, singular perturbations, ODE system, heterogeneous catalytic reaction

References

1. Lashina E.A., Kaichev V.V., Saraev A.A., Vinokurov Z.S., Chumakova N.A., Chumakov G.A., Bukhtiyarov V.I. Experimental study and mathematical modelling of self-sustained kinetic oscillation in catalytic oxidation of methane over nickel // The Journal of Physical Chemistry A, 2017. Vol.121. No.37. P. 6874-6886
2. Lashina E.A., Vinokurov Z.S., Saraev A.A., Kaichev V.V. Self-sustained oscillations of methane over palladium: experimental study and mathematical modelling // Journal of Chemical Physics, 2022. Vol.157. No.4. P. 044703:1-14.

УДК 519.63

Математическое моделирование нестационарного течения однофазной жидкости в однопоровых коллекторах с использованием web-технологий*

Мазитов А.А.¹, Губайдуллин И.М.¹, Тишкин В.Ф.^{1,2}

Институт нефтехимии и катализа РАН¹, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН²

Аннотация: Наиболее эффективным методом изучения фильтрационных свойств пласта и жидкостей являются гидродинамические исследования скважин. Для математического моделирования течения нефти, а также анализа и интерпретации данных гидродинамических исследований скважин предлагается использовать web-приложение. Теоретической основой для приложения служит математическая модель течения однофазной жидкости в однопоровом коллекторе, для которой построен вычислительный алгоритм решения. Разностная схема получена с использованием конечных разностей. Полученная система уравнений решена методом скалярной прогонки.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных разностей, метод скалярной прогонки, web-приложения.

1. Актуальность

Увеличение темпа отбора флюида из продуктивного пласта и поддержание пластового давления являются приоритетными целями на всех стадиях разработки нефтяного месторождения. Планирование работ по эффективному освоению и оптимальной эксплуатации нефтяной скважины носит комплексный характер, связанным с гидродинамическими процессами, происходящими при течении жидкости в системе «скважина-пласт». Наиболее эффективным методом изучения продуктивных свойств пластов и жидкостей являются гидродинамические исследования скважин (ГДИС). Средствами ГДИС проводится замер совокупности характеристик коллектора с использованием глубинных или устьевых приборов, а также последующая обработка замеров и интерпретация полученных данных (продуктивность, фильтрационные свойства жидкостей, тип коллектора и т. д.) [1].

В ГДИС пласт представляется в виде системы. Основной задачей является определение параметров этой системы. В качестве входных данных выступает изменение режима работы скважины, а выходных – реакция системы, выражающаяся в виде изменения динамики пластового давления. Анализ и интерпретация результатов исследования проводятся путем построения кривых падения или восстановления давления на основе теоретических моделей, которые базируются на классических уравнениях и законах.

Для анализа и интерпретации результатов ГДИС существует ряд программных средств. Подавляющее большинство таких программ являются настольными приложениями, распространяющимися по платным лицензиям. Многие из них имеют

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-20047 - Разработка теоретических основ и создание высокопроизводительных алгоритмов для двухфазных математических моделей фильтрации жидкости в коллекторах трещиновато-порового типа

перегруженный интерфейс, что вызывает сложности при эксплуатации. Кроме того, значительная часть – зарубежное программное обеспечение. В настоящее время остро стоит вопрос о переходе на отечественные программные продукты. В виду вышеизложенного, для решения задач математического моделирования течения нефти, а также для анализа и интерпретации результатов ГДИС предлагается использовать web-приложения.

В последние годы web-разработка активно развивается, появляются новые технологии, с помощью которых можно реализовывать сложные пользовательские сценарии. Web-приложения выделяются простой реализацией, легкостью применения, высокой производительностью, их основными характеристиками являются: доступность, надежность, безопасность, масштабируемость, гибкость, кроссплатформенность. Они могут быть развернуты как в существующей сетевой инфраструктуре, так и удаленно – подключением к серверу.

Таким образом, математические постановки задач с учетом нестационарного течения жидкости во всех его элементах: пластах, трубах скважин и проточных каналах, разработка эффективных численных методов и алгоритмов, их решения с применением современных web-технологий, являются актуальными [2].

2. Постановка задачи

Рассматривается добывающая скважина, гидродинамическое исследование которой проводится методом кривой восстановления давления. Скважина эксплуатирует терригенный коллектор, содержащий один вид пористости. Коллектор обладает высокой пористостью и низкой проницаемостью. Пласт является неограниченным. Течение флюида в пласте – горизонтальное, перетоки между пропластками отсутствуют. Воздействие соседних скважин отсутствует, либо не оказывает влияние. Скважина работает на установившемся режиме с постоянным забойным давлением. На границе контура поддерживаются постоянные давление и температура. Для проведения исследования измерительный прибор спускается на глубину верхних дыр перфорации. Расчет динамики давления и температуры проводится в пространственно-одномерном случае.

Течение нефти описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu} r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) - c\rho u \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \eta \phi c\rho \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2)$$

Первое уравнение описывает процесс перераспределения давления в пласте, второе – процесс теплопереноса в жидкости. Первоначальным шагом решения исходной системы является приведение его к системе линейных алгебраических уравнений, для этого используется метод конечных разностей, в котором дифференциальные выражения заменяются разностными. Таким образом получаются трехточечные уравнения, которые решаются методом скалярной прогонки [3].

Задача является нестационарной, поэтому метод скалярной прогонки применяется для определения пространственного распределения давления и температуры пласта на каждом временном слое. Задача решена последовательно, на первом этапе – уравнения для давления, на втором – для температуры.

3. Используемые технологии

Для автоматизации решения поставленной задачи разработано web-приложение. Входными данными для приложения являются данные о параметрах модели: фильтрационные свойства пласта (пористость, проницаемость и т. д.) и свойства жидкости (вязкость, плотность и т. д.), а выходными – графики, отражающие зависимости пластового давления и температуры от времени или пространства.

Конечный вид приложения определяют инструменты, выбранные для его разработки. Инструментами разработки являются парадигма программирования, язык программирования, инструментальная среда разработки, технологии разработки.

Приложение реализует клиент-серверную архитектуру. Серверная часть (BackEnd) выполняется на удаленном компьютере, она написана на языке программирования Python с использованием микрофреймворка Flask, который является простым в освоении, позволяет масштабировать ядро под разные задачи, имеет инструменты для отладки и тестирования, а также сопровождается подробной документацией. Серверная часть с помощью стандартных драйверов обменивается данными с базой данных, реализованной средствами СУБД PostgreSQL. Клиентская часть (FrontEnd) выполняется в браузере, она написана на языке программирования JavaScript. Для создания пользовательского интерфейса используется платформа vue.js, которая отлично подходит для разработки как одностраничных приложений, так и сложных коммерческих платформ. Клиентская и серверная части между собой обмениваются через RestApi по протоколу HTTP. Сборка проекта осуществляется в виде двух докер-контейнеров под серверами nginx.

Литература

1. Деева Т.А., Камартдинов М.Р., Кулагина Т.Е., Мангазеев П.В. Гидродинамические исследования скважин: анализ и интерпретация данных. Томск. 2009. 243 с.
2. Bobreneva Yu.O., Mazitov A.A., Gubaydullin I.M. Researching the mechanisms of fluid flow in the fracture-porous reservoir based on mathematical modeling // Computational Mathematics and Information Technologies. 2018. Vol.2, No.2. P. 133-143.
URL: <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-2-133-143>
3. Мазитов А.А., Бобренёва Ю.О., Губайдуллин И.М., Повещенко Ю.А. Математическое моделирование многофазного потока в однопоровом коллекторе // В сборнике Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2022. № 62. С. 1-14.
URL: <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-62>

MSC 35K55

Mathematical modeling of unsteady single-phase fluid flow in single-pore reservoirs using web-technologies

A.A. Mazitov¹, I.M. Gubaydullin¹, V.F. Tishkin^{1,2}

Institute of Petrochemistry and Catalysis¹, Keldysh Institute of Applied Mathematics²

Abstract: The most effective method for studying the filtration properties of the reservoir and fluids are hydrodynamic studies of wells. For mathematical modeling of oil flow, as well as analysis and interpretation of data from hydrodynamic studies of wells, it is proposed to use a web application. The theoretical basis for the application is a mathematical model of the flow of a single-phase fluid in a single-pore reservoir, for which a computational solution algorithm has been developed. The difference scheme was obtained by the finite difference method, which is solved by the scalar sweep method.

Keywords: mathematical modeling, finite difference method, scalar sweep method, web applications.

References

1. Deeva T.A., Kamartdinov M.R., Kulagina T.E., Mangazeev P.V. *Gidrodinamicheskiye issledovaniya skvazhin: analiz i interpretatsiya dannykh.* Tomsk. 2009. 243 p.
2. Bobreneva Yu.O., Mazitov A.A., Gubaydullin I.M. Researching the mechanisms of fluid flow in the fracture-porous reservoir based on mathematical modeling // *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2018. Vol.2, No.2. P. 133-143.
URL: <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-2-133-143>
3. Mazitov A.A., Bobreneva Yu.O., Gubaydullin I.M. Mathematical modeling of a multiphase flow in a single-pore reservoir // *Keldysh Institute PREPRINTS.* 2022. No.62. P. 1-14.
URL: <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-62>

УДК 519.86

Моделирование траектории и нормы накопления для модели Солоу

Мамедова Т.Ф., Десяев Е.В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Представлена модель для вычисления траектории и нормы накопления капитала на основе модели Солоу. Она позволяет анализировать траекторию и норму накопления и оценивать влияние ряда факторов на их рост. Создано программное обеспечение для проведения вычислений на основе численного метода Рунге-Кутты.

Ключевые слова: модель Солоу, траектория накопления, норма накопления, метод Рунге-Кутты, технологический прогресс.

В современном мире экономический рост и развитие являются ключевыми факторами для достижения процветания и улучшения уровня жизни населения. Исследование механизмов экономического роста и определение факторов, влияющих на него, являются актуальными задачами в области экономической теории.

Одной из важных моделей, используемых для объяснения экономического роста, является модель Солоу, разработанная Робертом Солоу в 1956 г. Эта модель основана на теории накопления капитала и технического прогресса в процессе производства. Она позволяет анализировать траекторию накопления капитала и оценивать влияние различных факторов на экономический рост.

Модель Солоу, также известная как модель совокупного производства, представляет собой экономическую модель, которая объясняет экономический рост через взаимосвязь между накоплением капитала, техническим прогрессом и производственной функцией. Основные элементы модели Солоу включают компоненты [1]:

◊ Капитал. В модели Солоу капитал является одним из основных факторов производства. Он представляет собой материальные и нематериальные активы, используемые для производства товаров и услуг. Капитал может накапливаться с течением времени и служит источником дохода и производительности.

◊ Технический прогресс. Модель Солоу учитывает влияние технического прогресса на экономический рост. Технический прогресс означает улучшение технологий и методов производства, что приводит к повышению эффективности и производительности. В модели Солоу технический прогресс учитывается через параметры, определяющие производственную функцию.

◊ Производственная функция. Производственная функция в модели Солоу описывает связь между входами (капиталом и трудом) и выходами (производством). Она определяет, какие объемы продукции могут быть получены при заданных уровнях входов. В модели Солоу принята упрощенная форма производственной функции, такая как производственная функция Кобба-Дугласа, которая выражает зависимость продукции от капитала и труда.

В модели Солоу капитал играет ключевую роль в определении уровня производства и экономического роста. Капитал накапливается с течением времени через инвестиции, которые включают в себя вложения в оборудование, машины, здания и другие производственные активы. Чем больше капитала накапливается, тем больше

ресурсов доступно для производства и тем выше уровень производства.

Технический прогресс в модели Солоу представляет собой изменения в технологиях и методах производства. Он может происходить благодаря научным исследованиям, инновациям и развитию новых процессов. Технический прогресс позволяет использовать имеющиеся ресурсы более эффективно, увеличивая производительность и способствуя экономическому росту.

До появления модели Солоу, наиболее распространенной моделью изучения экономического роста была модель Харрода-Домара. Производственная функция Харрода-Домара определяла зависимость между объёмом производства (Y), капиталом (K) и трудом (L). Она может быть представлена следующим образом:

$$Y = F(K, L),$$

где F представляет функцию производства, которая описывает, какие объёмы продукции могут быть произведены при заданных уровнях капитала и труда.

Однако модель Харрода-Домара была несовершенна, поскольку не учитывала такой показатель, как уровень технологий. В модели Солоу эта проблема исправлена, и производственная функция выглядит так:

$$Y = AF(K, L),$$

где A представляет уровень технологий.

В модели Солоу часто используется производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^\alpha \cdot L^\beta,$$

где α является параметром, отражающим долю капитала в производстве, а β – долю труда.

В модели Солоу важную роль играет уравнение накопления капитала, которое описывает динамику капитала во времени. Уравнение накопления капитала можно записать следующим образом:

$$\frac{dK}{dt} = sY - (n + g)K,$$

где K – уровень капитала, Y – уровень производства, s – норма сбережений, n – норма прироста населения, g – норму технологического прогресса.

Правая часть уравнения представляет собой разницу между накоплением капитала (sY) и его износом ($(n + g)K$).

Норма сбережений (s) определяет долю производства, которая выделяется на инвестиции и накопление капитала. Уровень производства (Y) зависит от уровня капитала и труда, а также от технического прогресса. Норма износа $\delta = (n + g)$ отражает уменьшение капитала из-за физического износа и морального старения производственных активов.

Анализ уравнения движения позволяет определить различные траектории накопления капитала и оценить их влияние на экономический рост. Существуют две основные траектории:

◊ Траектория сходящегося к стационарному состоянию: Если норма сбережений s больше, чем норма износа δ , то скорость накопления капитала будет положительной ($sY > \delta K$), и капитал будет расти со временем. Однако, по мере роста уровня капитала, норма износа будет становиться все более значимой, и скорость накопления капитала будет снижаться. При достижении стационарного состояния, скорость

накопления капитала становится нулевой ($sY - \delta K = 0$), и капитал перестаёт расти. Траектория накопления капитала в этом случае будет сходиться к стационарному значению капитала (K^*).

◇ Траектория расходящегося от стационарного состояния: Если норма сбережений s меньше, чем норма износа δ , то скорость накопления капитала будет отрицательной ($sY < \delta K$), и капитал будет уменьшаться со временем. В этом случае, экономика не способна поддерживать уровень капитала, необходимый для стационарного состояния. Траектория накопления капитала будет расходиться от стационарного значения, и экономика будет находиться в состоянии убывающего капитала. Анализ траекторий накопления капитала в модели Солоу позволяет оценить устойчивость экономики и ее способность достичь стационарного состояния. При определениях значениях параметров модели, экономика может достичь устойчивого состояния, где уровень капитала и уровень производства остаются постоянными со временем, обеспечивая устойчивый экономический рост.

Таким образом, траектория модели Солоу представляет собой путь, по которому экономика движется в долгосрочной перспективе.

Норма накопления модели Солоу определяет долю дохода, которую общество выделяет на инвестиции в капитал. Норма накопления определяется как $\gamma = nK$, где n – естественный прирост населения, а K – уровень капитала.

Уравнение для изменения уровня технологического прогресса может быть записано как:

$$\frac{dA}{dt} = \mu A,$$

где $\frac{dA}{dt}$ представляет собой скорость изменения уровня технологического прогресса, μA – параметр, определяющий скорость роста, и A – уровень технологического прогресса.

Для того, чтобы смоделировать траекторию и норму накопления для модели Солоу, необходимо решить систему из двух дифференциальных уравнений, а именно:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = sAK^\alpha L^\beta - (n + g)K, \\ \frac{dA}{dt} = \mu A, \end{cases} \quad (1)$$

Для программной реализации вычислений использовался высокоуровневый язык программирования общего назначения Python, включая библиотеку NumPy, а также был выбран численный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка как достаточно точный, но при это не слишком сложный в исполнении [2].

В ходе исследования было выявлено влияние технологического прогресса на экономический рост и развитие для различных примеров. Также был использован численный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка для моделирования и анализа различных сценариев и траекторий накопления капитала.

Литература

1. Базелер У., Сабов З., Хайнрих Й., Кох В. Основы экономической теории: принципы, проблемы, политика. Германский опыт и российский путь. СПб.: Издательство «Питер», 2000. 800 с.

2. Лапчик М.Р, Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы, 5-е изд., стер. М.: Издательский центр «Академия», 2009. 384 с.

MSC 91B02

Modeling the trajectory and accumulation rate for the Solow model

T.F. Mamedova, E.V. Desyaev

National Research Mordovia State University

Abstract: A model for calculating the trajectory and nome of capital accumulation based on the Solow model is presented. It allows to analyze the trajectory and rate of accumulation and evaluate the influence of a number of factors on their growth. Software for carrying out calculations based on the Runge-Kutta numerical method has been created.

Keywords: Solow model, accumulation trajectory, accumulation rate, Runge-Kutta method, technological progress.

References

1. Bazeler U., Sabov Z., Heinrich J., Koch V. Fundamentals of economic theory: principles, problems, politics. German experience and Russian way. St. Petersburg: Piter Publishing House, 2000. 800 p.
2. Lapchik M.P., Ragulina M.I., Khenner E.K. Numerical methods, 5th ed., Sr. M.: Publishing Center "Academy 2009. 384 p.

УДК 517.91

Динамика цепочки частиц в сдвиговом потоке жидкости

Мартынов С.И., Ткач Л.Ю.

Сургутский государственный университет

Аннотация: Приведены результаты численного моделирования динамики цепочки частиц в сдвиговом потоке вязкой жидкости вдоль плоской стенки. Предполагается, что частицы в цепочке могут смещаться относительно друг друга так, что расстояние между двумя соседними остается постоянным. Рассматривается случай, когда первоначальная форма цепочки представляет собой клубок, а затем за счет воздействия сдвигового течения жидкости и коллективного взаимодействия между частицами деформируется, приобретая новую форму. Коллективное взаимодействие частиц в цепочке происходит за счет сил гидродинамического взаимодействия между ними. Проведены расчеты динамики деформирования цепочки с учетом воздействия потока на частицы и их коллективного взаимодействия. Результаты моделирования динамики цепочки приведены с учетом указанных выше воздействий. Найдена равновесная форма цепочки частиц в потоке жидкости.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, коллективное взаимодействие частиц, цепочка, деформация.

1. Введение

Одним из результатов взаимодействия частиц в дисперсных системах является образование структур. Например, в жидкостях с магнитными частицами могут образовываться такие структуры, как капельные агрегаты, рыхлые фрактальные кластеры, цепочки частиц. Формирование последних характерно для эмульсий с полидисперсными каплями магнитной жидкости при невысокой концентрации дисперсной фазы. Образование цепочек частиц в магнитной жидкости подтверждается множеством экспериментальных и численных исследований структуры магнитной жидкости [1, 2]. К таким исследованиям относятся: анализ полученных экспериментальных реологических, диффузионных, оптических свойств магнитной жидкости, моделирование структурообразования в магнитной жидкости на основе метода Монте-Карло и метода молекулярной динамики. Имеется достаточно много работ по динамике цепочечных агрегатов в жидкости. В пионерских работах, связанных с проблемой агрегирования в жидких дисперсных системах, цепочки частиц моделировались недеформируемыми эллипсоидами вращения, что давало возможность использовать известные результаты по гидродинамике жидкости с эллипсоидальными частицами. Примером такого рода работ могут служить работы [4, 5]. Другой подход к изучению цепочечных структур заключается в учете парных сил взаимодействия частиц друг с другом, что позволяет найти равновесную конфигурацию расположения сферических частиц относительно друг друга за счет сил диполь-дипольного взаимодействия [6]. Однако при этом не учитывается влияние гидродинамического взаимодействия цепочки с окружающей жидкостью и частиц между собой.

Еще одним направлением, в котором проявляется интерес к исследованию ди-

динамики цепочек частиц, является проблема теоретического построения моделей полимерных молекул. Это связано с тем, что одним из подходов при моделировании полимерных молекул является их представление в виде точечных масс или бусинок, соединенных линейно системой жестких стержней [7]. Частицы в этой цепочке представляют собой конечные участки молекулярной цепи, а стержни не оказывают гидродинамическое сопротивление. При моделировании полимерных молекул методом молекулярной динамики силы взаимодействия между частицами в цепочке определяются потенциальной энергией парных взаимодействий частиц.

Во всех указанных выше случаях, при моделировании динамики цепочек и их деформации необходимо учитывать гидродинамическое взаимодействие как формы цепочки с жидкостью, так и всех частиц в цепочке между собой. Авторы предложили подход, учитывающий эти взаимодействия [8]. На основе этого подхода в работе [9] моделировалась динамика различных цепочечных структур с учетом гидродинамического взаимодействия. В частности, была рассмотрена динамика цепочки из 125 частиц, уложенных в виде прямоугольного параллелепипеда, состоящего из 5 слоев по 25 частиц в каждом слое, в сдвиговом потоке. Укладка частиц в слоях представляла собой спираль. Результаты моделирования показали, что в сдвиговом потоке слои вытягиваются вдоль потока в виде петель. Конечная форма такой цепочки не была рассчитана. Между тем, конечная форма цепочки в сдвиговом потоке оказывает существенное влияние на эффективную вязкость системы. Поскольку для расчета конечной формы цепочки из 125 частиц требуется достаточно большие вычисления, в настоящей работе предлагается провести такой расчет для цепочки с меньшим количеством частиц.

2. Постановка задачи

Рассматривается цепочка из 19 твердых сферических частиц радиуса a , помещенных в несжимаемую жидкость плотности ρ и вязкости η . Жидкость ограничена плоской поверхностью $X_3 = -15$, вдоль которой происходит сдвиговое течение со скоростью $U_2 = 0.5x_3 + 7.5$. Предполагается, что частицы удерживаются в цепочке внутренними силами или связаны между собой тонкими нерастяжимыми стержнями, гидродинамическим сопротивлением которых в жидкости можно пренебречь по сравнению с сопротивлением частиц. Предполагается, что стержневые соединения позволяют частицам совершать поступательное и вращательное движение. Фактически такого рода стержни – вариант потенциальных сил взаимодействия между соседними частицами, не позволяющим менять расстояние между ними. Считается, что в начальный момент цепочка представляла собой форму, представленную на рис. 1.

Структура представляет собой три слоя частиц, симметрично расположенных относительно оси X_3 параллельно плоскости X_1X_2 . В слое, находящемся в плоскости $X_3 = 6.0622$, симметрично расположены частицы $DONCML$ имеющие следующие координаты $D = (0, -3.5, 6.0622)$, $C = (0, 3.5, 6.0622)$, $O = (3.0311, -1.75, 6.0622)$, $N = (3.0311, 1.75, 6.0622)$, $L = (-3.0311, -1.75, 6.0622)$, $M = (-3.0311, 1.75, 6.0622)$. В среднем слое, находящемся в плоскости $X_3 = 0$, расположены частицы $ABEHIJK$, имеющие следующие координаты $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 7, 0)$, $E = (0, -7, 0)$, $K = (-6.0622, -3.5, 0)$, $J = (-6.0622, 3.5, 0)$, $H = (6.0622, 3.5, 0)$, $I = (6.0622, -3.5, 0)$. Частицы $FSRGPQ$ находятся в плоскости $X_3 = -6.0622$ и имеют расположение, симметричное частицам $DONCML$ относительно плоскости $X_3 = 0$ соответственно указанному порядку перечисления. Соединение стержнями частиц в цепочке происходит

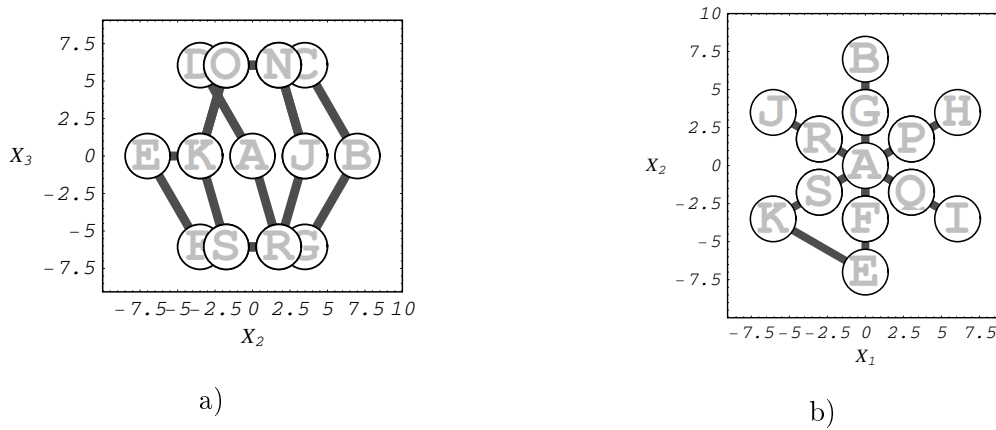


Рис. 1. Начальная форма цепочки

последовательно в следующем порядке: *HMOKSPFDCBGFEILNJRQ*. Соединение стержнями выбрано таким образом, чтобы начальная форма цепочки частиц напоминала свернутую в клубок нить. В литературе такая форма считается равновесной для полимерной цепи в отсутствии течения жидкости. Цель работы - определить равновесную форму цепочки при сдвиговом течении жидкости. Для расчета динамики цепочки частиц и ее деформирования записываются уравнения поступательного движения каждой частицы учетом действующих на нее сил реакции стержней и сил гидродинамического взаимодействия, а также уравнений вращательного движения, с учетом моментов, действующих на частицы. Система уравнений имеет вид:

$$\mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^h = 0, \quad \mathbf{T}_k^i + \mathbf{T}_k^e + \mathbf{T}_k^h = 0 \quad (1)$$

Здесь \mathbf{F}_k^h – силы, \mathbf{T}_k^h – моменты сил со стороны жидкости, \mathbf{F}_k^i , \mathbf{T}_k^i – внутренние, \mathbf{F}_k^e , \mathbf{T}_k^e – внешние силы и моменты сил, действующие на частицу с номером k .

Наличие стержней диктует дополнительные условия, накладываемые на положения частиц в цепочке. Условие заключается в неизменности расстояния между частицами, соединенными стержнями. Аналитически это записывается в виде:

$$\mathbf{r}_{ij} \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Здесь \mathbf{r}_{ij} – радиус-вектор, соединяющий центры частиц i и j , соединенных между собой стержнями. Условие (2) означает, что относительная скорость этих частиц вдоль радиус-вектора равна нулю. При этом составляющая относительной скорости частиц в плоскости перпендикулярной вектору \mathbf{r}_{ij} может отличаться от нуля. Используя условие (2), из уравнений (1) можно определить величины усилий в стержнях. Выражения для \mathbf{F}_k^h , \mathbf{T}_k^h , учитывающие гидродинамическое взаимодействие частиц в жидкости, получены в работах [8, 10] в приближении Стокса. Разработанный в этих статьях метод позволяет учитывать взаимодействие большого числа частиц, в том числе и при течении вблизи плоской стенки.

3. Метод решения

Система (1) содержит 114 алгебраических уравнений. Для численного решения системы уравнений (1) использовалась специальная программа, которая результаты вычислений выводит в виде визуализации динамики системы частиц. Кроме того, при

компьютерном моделировании динамики цепочки частиц применялся метод подобия, разработанный в работе [8]. Метод дает хорошее согласие результатов моделирования с экспериментом. При использовании этого метода при расчетах используются модельные параметры, которые связаны с реальными условиями гидродинамического подобия реального и модельного процессов. Переход к модельным параметрам связан с точностью вычислений. Например, вычисления ведутся с точностью до шести значащих цифр после запятой. Если модельный размер частиц имеет порядок 1 см, то при модельной вязкости 1 г/(см·с) и плотности жидкости 1 г/см³ скорость частиц имеет порядок не более 10⁻¹ см/с (для того, чтобы число Рейнольдса было меньше единицы). Для модельного интервала времени 10⁻¹ с перемещение частицы имеет порядок менее 10⁻² см, что составляет не более одного процента от радиуса частицы. При реальных параметрах: размере частицы порядка 10⁻⁴ см, вязкости порядка 10⁻² г/(см·с), плотности 1 г/см³ скорость частицы должна быть не более 10 см/с (число Рейнольдса должно быть одинаковым для модельных параметров и реальных). Используя результаты работы [8], получим реальный интервал времени, за который вычисляется перемещение, равен 10⁻⁷ с и само перемещение частицы составляет менее 10⁻⁶ см, что тоже не превышает один процент от радиуса частицы, но уже превышает число значащих цифр, принятых для расчета. Таким образом, применение модельных параметров приводит к повышению точности вычислений и упрощает их.

4. Результаты моделирования

Результаты моделирования представлены на рис. 2.

Как видно из представленных результатов моделирования динамики цепочки частиц, начальная деформация цепочки качественно совпадает с результатами работы [9]. А именно: сначала цепочка частиц деформируется с появлением петель. Дальнейшая деформация цепочки частиц связано с постепенным разворачиванием образовавшихся петель и вытягиванием цепочки вдоль потока жидкости. Проведенное моделирование динамики деформации цепочки частиц дает ответ на вопрос о равновесной форме цепочки частиц в сдвиговом потоке жидкости. Вычисления показывают, что такой формой является вытянутая на всю длину цепочка частиц по направлению потока жидкости и параллельная плоскости, вдоль которой происходит течение.

5. Заключение

Проведено моделирование динамики деформации цепочки частиц в сдвиговом потоке жидкости вдоль плоскости. Учтено гидродинамическое взаимодействие частиц в цепочке между собой в потоке жидкости. Результаты моделирования позволили определить равновесную форму цепочки частиц при воздействии потока жидкости. Показано, что такой формой является цепочка, вытянутая вдоль потока жидкости параллельно плоскости течения.

Литература

1. Hayes Ch.F. Observation of association in ferromagnetic colloid // J. Colloid. Interface Sci. 1975. Vol. 52. No.2. P.239-242.

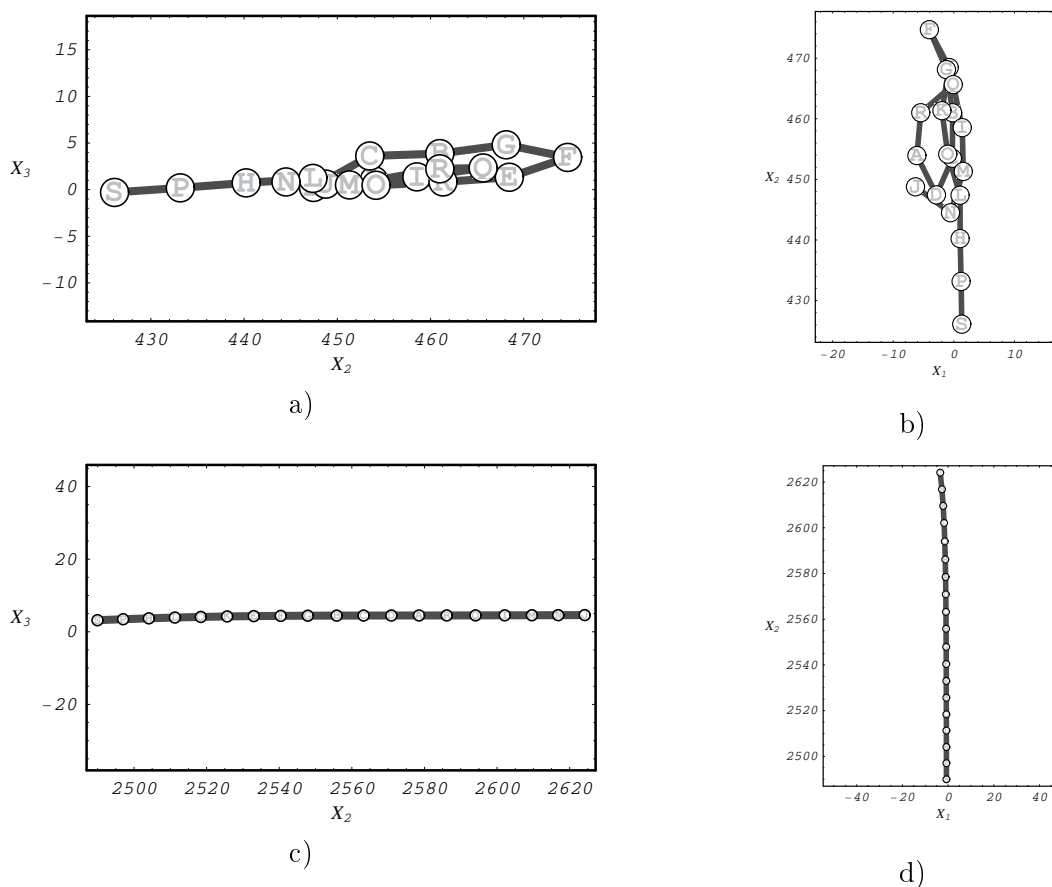


Рис. 2. Численные расчеты динамики цепочки частиц

2. Krueger D.A. Review of agglomeration in ferrofluids. // IEEE Trans. Mag. 1980. Vol. 16. No.2. P. 251-253.
3. Мартынов С.И. Агрегирование частиц и вязкость суспензии // Инж.-физ. ж. 1998. Т.71. № 4. С.691-697.
4. Lin C.J., Lee K.J., Sather N.F. Slow motion of two spheres in a shear field // J. Fluid Mech. 1970. Vol.43. P.35-47.
5. Wakiya S. Slow motion in Shear Flow of a Doublet of Two Spheres in Contact // Journal of Phys. Soc. of Japan. 1971. Vol.31, No.5. P.1581-1587.
6. Ivanov A.O., Kantorovich S.S. Formation of chains in magnetic fluids: an influence of polydispersity // J. Magn. Magn. Mater. 2002. Vol. 252. P. 244-246.
7. Флори П. Статистическая физика цепных молекул. М.: Мир, 1971. 440 с.
8. Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т.55. № 2. С. 285-294.
9. Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Динамика цепочечных агрегатов частиц в потоке вязкой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т.56. № 5. С. 840-855.

10. Мартынов С.И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН, Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 112-119.

MSC 76D07 76D09 76D17

Particle Chain Dynamics in a Shear Fluid Flow

S.I. Martynov, L.Yu. Tkach

Surgut State University

Abstract: The results of numerical simulation of the dynamics of a chain of particles in a shear flow of a viscous fluid along a flat wall are presented. It is assumed that the particles in the chain can be displaced relative to each other so that the distance between two neighboring particles remains constant. The case is considered when the initial shape of the chain is a coil, and then, due to the influence of the shear flow of the liquid and the collective interaction between the particles, it is deformed, acquiring a new shape. The collective interaction of particles in a chain occurs due to the forces of hydrodynamic interaction between them. The dynamics of chain deformation is calculated taking into account the impact of the flow on particles and their collective interaction. The results of the simulation of the chain dynamics are given taking into account the above effects. The equilibrium shape of a chain of particles in a liquid flow is found.

Keywords: numerical simulation, viscous liquid, collective interaction of particles, chain, deformation.

References

1. Hayes Ch.F. Observation of association in ferromagnetic colloid // J. Colloid. Interface Sci. 1975. Vol.52. No.2. P. 239-242.
2. Krueger D.A. Review of agglomeration in ferrofluids // IEEE Trans. Mag. 1980. Vol.16. No.2. P. 251-253.
3. Martynov S.I. Particle aggregation and suspension viscosity // Inzh.-Fiz. zhurn. 1998. Vol.71. No.4. P. 691-697.
4. Lin C.J., Lee K.J., Sather N.F. Slow motion of two spheres in a shear field // J. Fluid Mech. 1970. Vol.43. P. 35-47.
5. Wakiya S. Slow motion in Shear Flow of a Doublet of Two Spheres in Contact // Journal of Phys. Soc. of Japan. 1971. Vol.31, No.5. P. 1581-1587.
6. Ivanov A.O., Kantorovich S.S. Formation of chains in magnetic fluids: an influence of polydispersity // J. Magn. Magn. Mater. 2002. Vol.252. P. 244-246.
7. Flory P. Statistical mechanics of chain molecules. New York-London-Sydney-Toronto: Interscience publishers. 1969.
8. Martynov S.I., Tkach L.Yu. Simulation of Particle Aggregate Dynamics in a Viscous Fluid // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol.55. No.2. P. 282-290.
9. Martynov S.I., Tkach L.Yu. Dynamics of Chain Particle Aggregates in Viscous Flow // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016. Vol.56. No.5. P. 826-840.

10. Martynov S.I. Hydrodynamic interaction of particles // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas. 1998. No.2. P. 112–119.

УДК 517.9

Разработка новых методов оптимизации портфелей на основе стохастических дифференциальных уравнений

Мойко Н.В.

Пензенский государственный университет

Аннотация: В статье рассмотрена проблема построения оптимального инвестиционного портфеля в условиях неопределенности и риска. Предлагается использование стохастических дифференциальных уравнения для моделирования динамики цен активов и оценки рисков. Для этого применяются различные методы оптимизации, такие как метод Монте-Карло, методы оптимизации на основе градиентного спуска и эволюционные алгоритмы для нахождения оптимального портфеля с минимальным риском при заданной доходности.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, методы оптимизации, инвестиции, прогнозирование цен на акции и облигации

Введение

Существует множество методов оптимизации инвестиционных портфелей, которые можно разделить на три категории: классические методы, методы на основе статистических моделей и методы на основе искусственного интеллекта. Классические методы оптимизации портфелей включают в себя метод минимальной дисперсии Марковица, метод максимального дохода Шарпа и метод минимального риска-прибыли. Эти методы основаны на математических моделях, которые позволяют определить оптимальное соотношение между доходностью и риском портфеля. Методы на основе статистических моделей используются для анализа временных рядов и прогнозирования будущих цен на активы. Методы на основе искусственного интеллекта используются для анализа больших объемов данных и принятия решений на основе алгоритмов машинного обучения. Дифференциальные уравнения могут быть использованы при анализе инвестиционных портфелей для определения оптимального распределения активов и минимизации риска. Для этого можно использовать модели динамического портфеля, которые описывают изменение стоимости активов во времени (модель Блэка-Шоулза для оценки цены опционов на акции). Также можно использовать дифференциальные уравнения для моделирования финансовых рынков и прогнозирования их поведения (модель Гарча-Жоргенсена для моделирования волатильности цен на акции и другие финансовые инструменты).

Таким образом, дифференциальные уравнения могут быть полезны при анализе инвестиционных портфелей для определения оптимального распределения активов и прогнозирования поведения финансовых рынков.

1. Методы оптимизации портфелей на основе стохастических дифференциальных уравнений

Метод Эйлера-Маруямы является численным методом решения стохастических дифференциальных уравнений и используется для моделирования случайных процессов. Общий вид такого уравнения:

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t), \quad (1)$$

где $X(t)$ – случайный процесс, $a(X(t), t)$ и $b(X(t), t)$ – функции, определяющие динамику процесса, $dW(t)$ – инкремент винеровского процесса. Суть метода заключается в следующем: сначала задается начальное значение портфеля, а затем вычисляются изменения его стоимости на каждом шаге времени с помощью стохастического дифференциального уравнения. Для этого используется формула Эйлера-Маруямы, которая позволяет оценить изменение стоимости портфеля на очень малых промежутках времени. Далее, на основе полученных данных о изменении стоимости портфеля, производится оптимизация состава портфеля с помощью различных методов оптимизации. Для решения уравнения (1) методом Эйлера-Маруямы необходимо разбить интервал времени на малые шаги Δt и вычислить изменение $X(t)$ на каждом шаге:

$$\Delta X(t) = a(X(t), t)\Delta t + b(X(t), t)\Delta W(t),$$

где $\Delta W(t)$ – приращение винеровского процесса на интервале Δt . Затем новое значение $X(t + \Delta t)$ вычисляется по формуле:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta X(t).$$

Преимущества метода состоит в возможности учета случайных факторов (изменение курсов валют, изменение цен на акции), что позволяет получить более точные результаты. Кроме того, он является достаточно простым и быстрым в вычислении, что позволяет использовать его в режиме реального времени.

Метод Миллера – это метод определения оптимального портфеля инвестиций, который был предложен Уильямом Шарпом и Гарри Миллером в 1970 г. Он основан на теории портфельного выбора Марковица и предполагает выбор портфеля, имеющего наибольшее соотношение доходности и риска. Данный метод использует матрицу ковариаций доходности активов, чтобы определить оптимальное распределение портфеля между активами. Он также учитывает минимальный или максимальный вес каждого актива в портфеле. Метод Миллера использует следующие формулы для определения оптимального портфеля:

1. Расчет ожидаемой доходности портфеля:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i \cdot E(r_i),$$

где $E(R_p)$ – ожидаемая доходность портфеля, w_i – доля инвестиций в i -ом активе, $E(r_i)$ – ожидаемая доходность i -го актива.

2. Расчет ковариации между доходностями активов:

$$COV(R_i, R_j) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \sigma_j,$$

где $COV(R_i, R_j)$ – ковариация между доходностями i -го и j -го активов, ρ_{ij} – коэффициент корреляции между i -м и j -м активами, σ_i и σ_j – стандартные отклонения доходностей i -го и j -го активов соответственно.

3. Расчет риска портфеля (стандартного отклонения):

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_i \sum_j w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j},$$

где σ_p – стандартное отклонение доходности портфеля.

Метод позволяет инвестору определить оптимальное соотношение риска и доходности для своего портфеля. Решение этой задачи оптимизации дает оптимальное распределение портфеля между активами.

Метод Япона не использует формулы в строгом смысле, поскольку он основывается на анализе графиков цен с помощью свечных диаграмм. Однако для более точного определения уровней поддержки и сопротивления могут использоваться следующие формулы:

◊ Уровень поддержки = минимальная цена за определенный период времени – (максимальная цена за этот период – минимальная цена за этот период) · коэффициент поддержки. Коэффициент поддержки обычно принимается равным 0.3.

◊ Уровень сопротивления = максимальная цена за определенный период времени + (максимальная цена за этот период – минимальная цена за этот период) · коэффициент сопротивления. Коэффициент сопротивления обычно принимается равным 0.3.

Коэффициенты поддержки и сопротивления могут быть изменены в зависимости от конкретной ситуации на рынке и индивидуальных предпочтений трейдера.

2. Применение дифференциальных уравнений при анализе инвестиционных портфелей

Для решения системы дифференциальных уравнений (СДУ) можно использовать методы математической статистики и теории вероятностей. Одним из таких методов является метод Монте-Карло, который позволяет моделировать случайные процессы и оценивать вероятности различных событий. Другим методом является метод конечных разностей, который заключается в аппроксимации дифференциального уравнения разностным уравнением на сетке. Этот метод позволяет численно решать стохастические дифференциальные уравнения и проводить анализ риска и доходности портфеля.

На данный момент наиболее интересной темой для изучения является использование современных методов для прогнозирования изменения цен на акции и облигации. Это включает в себя и использование новых источников данных (социальные сети и новостные порталы), и разработку интегрированных моделей, которые учитывают как финансовые, так и экономические и политические факторы, влияющие на изменение цен.

Для разработки модели можно выполнить следующие шаги:

◊ Определить список экономических факторов, которые могут влиять на изменение цен на акции и облигации.

◊ Собрать данные по этим факторам за определенный период времени.

◊ Проанализировать данные и определить, какие из факторов имеют наибольшее влияние на изменение цен на акции и облигации.

◊ Разработать модель, которая будет учитывать выбранные экономические факторы и предсказывать изменение цен на акции и облигации.

◇ Интегрировать модель в систему прогнозирования цен на акции и облигации.

Таким образом, разработка модели, учитывающей не только финансовые, но и экономические факторы, может повысить точность прогнозирования изменения цен на акции и облигации и помочь инвесторам принимать более обоснованные решения.

Заключение

Практика подобного использования стохастических дифференциальных уравнений является интересной для дальнейших исследований.

Некоторые перспективы, которые могут быть рассмотрены, включают разработку новых методов оптимизации портфелей на основе СДУ, исследование влияния различных параметров на оптимальное распределение портфеля (включая горизонт инвестирования, рисковые предпочтения и т. д.), применение методов оптимизации портфелей на основе СДУ для решения конкретных проблем инвестирования, таких как управление пенсионными фондами или управление активами и пассивами, разработку новых методов анализа риска и оценки доходности портфелей на основе СДУ.

Таким образом, дифференциальные уравнения могут быть полезны при анализе инвестиционных портфелей для определения оптимального распределения активов и прогнозирования поведения финансовых рынков.

Литература

1. Elton., Edwin J., Gruber., Martin J., Brown., Jeffrey S. Modern portfolio theory and investment analysis. New Jersey USA : John Wiley, Sons, 2014. 738 p.
2. William F., Sharpe. Mutual Fund Performance. The Journal of Business, University of Chicago Press, 1965. Vol.39. 119 p.
3. Fama E.F., French K.R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. Journal of Financial Economics, 1993. 33(1). P. 3-56.

MSC 60H10

Development of new portfolio optimization methods based on stochastic differential equations

N.V. Moiko

Penza state university

Abstract: The paper considers the problem of building an optimal investment portfolio under conditions of uncertainty and risk. The use of stochastic differential equations for modeling the dynamics of asset prices and risk assessment is proposed. To do this, various optimization methods are applied, such as the Monte Carlo method, gradient descent-based optimization methods, and evolutionary algorithms, to find the optimal portfolio with minimal risk for a given return.

Keywords: stochastic differential equations, optimization methods, investments, stock and bond price forecasting

References

1. Elton., Edwin J., Gruber., Martin J., Brown., Jeffrey S. Modern portfolio theory and investment analysis. New Jersey USA : John Wiley, Sons, 2014. 738 p.
2. William F., Sharpe. Mutual Fund Performance. The Journal of Business, University of Chicago Press, 1965. Vol.39. 119 p.
3. Fama E.F., French K.R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. Journal of Financial Economics, 1993. 33(1). P. 3-56.

УДК 517.977.56, 519.71

Оптимизация двумерных процессов нагрева с учетом фазовых ограничений

Морозкин Н.Д., Ткачев В.И., Морозкин Ю.Н.

Уфимский университет науки и технологий

Аннотация: Исследуются задачи оптимального по быстродействию управления процессами внешнего нагрева призмы прямоугольного сечения и цилиндра конечной длины при ограничениях на наибольшую температуру и на термонапряжения. Учитываются зависимости пределов прочности на сжатие и растяжение от температуры, которые аппроксимируются выпуклыми функциями. Исходная бесконечномерная задача аппроксимируется конечномерной задачей оптимального быстродействия с выпуклыми фазовыми ограничениями. Выписаны оценки погрешности аппроксимаций по состоянию в пространстве. В случае отсутствия ограничений на термонапряжения, показана сходимость конечномерных приближений по функционалу быстродействия и слабая сходимость последовательности управлений к оптимальному управлению.

Ключевые слова: оптимальный нагрев, термонапряжения, быстродействие, прямоугольная призма, цилиндр конечной длины.

1. Введение

В настоящее время в промышленности все больше используются материалы, прочностные характеристики которых претерпевают в процессе нагрева значительные изменения. Так, например, у сплава ЖС6У предел прочности на сжатие в диапазоне температур от 20 до 1000 градусов Цельсия уменьшается почти в пять раз, а предел прочности на растяжение более пяти раз.

В научной литературе при исследовании подобных задач, как правило, не учитывают зависимости пределов прочности на сжатие и растяжение от температуры. Если же эти зависимости учитываются, то задача решается с применением метода конечных элементов и сводится к достаточно сложной и трудоемкой задаче нелинейного программирования [1,2].

В настоящей работе задача оптимального нагрева бесконечной призмы прямоугольного сечения и цилиндра конечной длины с учетом ограничений на термонапряжения и наибольшую температуру аппроксимируется конечномерной задачей оптимального управления, а зависимости прочностных характеристик от температуры аппроксимируются выпуклыми функциями. Для решения полученной конечномерной задачи оптимального быстродействия с выпуклыми фазовыми ограничениями предлагается использовать метод, типа метода поворота опорной гиперплоскости, который был разработан одним из авторов и апробирован на задаче оптимального одномерного нагрева [3].

При этом решение тепловой задачи с помощью метода интегральных преобразований выписывается в виде ряда с неизвестными коэффициентами, определяемыми из решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача термоупругости рассматривается в квазистатической постановке [4] и ее решение выписывается также в виде ряда, коэффициенты которой являются решениями бес-

конечной системы линейных алгебраических уравнений.

2. Постановка задачи

Для удобства уравнения, описывающие процесс нагрева и ограничения на максимальную температуру, запишем в безразмерных единицах. Тогда процесс осесимметричного нагрева бесконечной призмы прямоугольного сечения или цилиндра конечной длины внешними тепловыми источниками описывается следующими уравнениями

$$\frac{\partial \theta(\rho, l, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\rho, l, \tau)}{\partial \rho^2} + \frac{q}{\rho} \frac{\partial \theta(\rho, l, \tau)}{\partial \rho} + h_*^2 \frac{\partial^2 \theta(\rho, l, \tau)}{\partial l^2} \quad (1)$$

$$0 < \rho < 1, 0 < l < 1, 0 < \tau \leq T,$$

$$\theta(\rho, l, 0) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(1, l, \tau)}{\partial \rho} = Bi_1 (u_1(\tau) - \theta(1, l, \tau)), \quad (3)$$

$$\rho^q \frac{\partial \theta(\rho, l, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta(\rho, 1, \tau)}{\partial l} = Bi_2 (u_2(\tau) - \theta(\rho, 1, \tau)), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta(\rho, 0, \tau)}{\partial l} = 0. \quad (6)$$

Здесь $q = 0$ в случае нагрева призмы и $q = 1$ в случае нагрева цилиндра конечной длины, $u(\tau) = (u_1(\tau), u_2(\tau)) \in L_2^2[0, T]$ – безразмерное управление (температура греющей среды) и почти при всех $\tau \in [0, T]$

$$u_i^- \leq u_i(\tau) \leq u_i^+, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

Множество таких управлений обозначим через U . Предполагается, что все теплофизические коэффициенты постоянны, а переход к безразмерным единицам осуществлялся аналогично [5].

В процессе нагрева требуется, чтобы нагреваемое тело не получало бы необратимые деформации. Будем предполагать, что нагреваемое тело разрушается хрупко, без скольких-нибудь заметных деформаций. Тогда, согласно первой классической теории прочности [6], в течении всего процесса нагрева должны быть выполнены неравенства

$$-\sigma_c(\theta) \leq \sigma_i(\rho, l, \theta) \leq \sigma_p(\theta), \quad (8)$$

где $\sigma_p(\theta)$, $\sigma_c(\theta)$ – пределы прочности на сжатие и растяжение (МПа), $\sigma_i(\rho, l, \theta)$ – нормальные компоненты тензора напряжений (МПа). В случае призмы $i = \rho, l$; в случае цилиндра $i = \rho, \varphi, l$.

Кроме выполнения неравенств (8) потребуем также выполнения ограничений на максимальную температуру в теле.

В условиях рассматриваемой задачи из физических соображений ясно, что при нагреве внешними тепловыми источниками, наиболее нагретыми оказываются точки, расположенные на поверхности. Поэтому в дальнейшем ограничения на максимальную температуру будем учитывать в виде

$$\theta(1, 0, \tau) \leq \bar{\theta}, \quad \theta(1, 1, \tau) \leq \bar{\theta}, \quad \theta(0, 1, \tau) \leq \bar{\theta}. \quad (9)$$

Задача 1. Найти управление $u^0(\tau) \in U$, $\tau \in [0, \tau^0]$, позволяющее за минимальное время $\tau^0 \in (0, T]$ довести температуру $\theta(\rho, l, \tau)$ нагреваемого тела до заданной $\tilde{\theta}(\rho, l)$ с фиксированной точностью

$$\int_0^1 \int_0^1 \rho^q \left[\theta(\rho, l, \tau^0) - \tilde{\theta}(\rho, l) \right]^2 dl d\rho \leq \varepsilon \quad (10)$$

так, чтобы при всех $\tau \in [0, \tau^0]$ были бы выполнены неравенства (8), (9), где $\varepsilon \geq 0$, – заданная точность.

3. Применение метода интегральных преобразований для расчета тепловых полей

Используя конечные интегральные преобразования Фурье-Ханкеля по координатам l и ρ , можно получить эквивалентное представление объекта управления бесконечной системой дифференциальных уравнений для коэффициентов x_n разложения $\theta(\rho, l, \tau)$ в кратный ряд Фурье по собственным функциям тепловой задачи. По координате l применяется конечное косинус-преобразование Фурье, т. е. преобразование [7]

$$[\theta(\rho, l, \tau)]_F = \theta_F(\alpha, l, \tau) = \int_0^1 \theta(\rho, l, \tau) \cos(\alpha\rho) d\rho.$$

По координате ρ при $q = 0$ применяется конечное косинус-преобразование Фурье, при $q = 1$ – конечное интегральное преобразование Ханкеля

$$[\theta(\rho, l, \tau)]_H = \theta_H(\alpha, l, \tau) = \int_0^1 \rho\theta(\rho, l, \tau) J_0(\alpha\rho) d\rho.$$

В результате применения этих интегральных преобразований к уравнениям (1)–(6), решение этих уравнений можно записать в виде следующего ряда

$$\theta(\rho, l, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} D_{ij} x_{ij} K(\alpha_i \rho) \cos(\beta_j l), \quad (11)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{\|K(\alpha_i \rho)\|^2 \|\cos(\beta_j l)\|^2} \quad (12)$$

$$D_{ij} = K_1(\alpha_i) \sin(\beta_j),$$

$$\frac{dx_{ij}}{d\tau} = -(\alpha_i^2 + h_*^2 \beta_j^2) x_{ij}(\tau) + \frac{\alpha_i}{\beta_j} u_1(\tau) + h_*^2 \frac{\beta_j}{\alpha_i} u_2(\tau) \quad (13)$$

$$x_{ij}(0) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Здесь $\|K(\alpha_i \rho)\|^2$, $\|\cos(\beta_j l)\|^2$ определяются по формулам

$$\|K(\alpha_i \rho)\|^2 = \int_0^1 \rho^q K^2(\alpha_i \rho) d\rho = \frac{\alpha_i^2 + Bi_1^2 + (1-q)Bi_1}{2Bi_1^2} K_1^2(\alpha_i) \quad (15)$$

$$\|\cos(\beta_j)\|^2 = \int_0^1 \cos^2(\beta_j l) dl = \frac{\sin^2 \beta_j [\beta_j^2 + \beta_2^2 + Bi_2]}{2Bi_2^2}. \quad (16)$$

$$K(\alpha\rho)|_{q=0} = \cos(\alpha\rho), \quad K_1(\alpha)|_{q=0} = \sin(\alpha),$$

$$K(\alpha\rho)|_{q=1} = J_0(\alpha\rho), \quad K_1(\alpha)|_{q=1} = J_1(\alpha),$$

Параметр α выберем так, чтобы он являлся корнем уравнения

$$\alpha K_1(\alpha) - Bi_1 K(\alpha) = 0, \quad (17)$$

а параметр β – решением уравнения

$$\beta \sin(\beta) - Bi_2 \cos(\beta) = 0. \quad (18)$$

4. Конечномерная аппроксимация

Формулы для вычисления термонапряжений выписываются в виде бесконечных рядов, коэффициенты которых находятся из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [4, 7].

Ограничившись в соотношении (11) и в формулах для вычисления термонапряжений рассмотрением первых $N \times N$ членов ряда, а в системе (13) первыми N дифференциальными уравнениями исходной бесконечномерной задаче можно поставить в соответствие следующую конечномерную задачу оптимального управления.

Задача 2. Найти управление $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in U$, переводящее систему

$$\frac{dx_{ij}(\tau)}{d\tau} = -(\alpha_i^2 + h_*^2 \beta_j^2) x_{ij}(\tau) + \frac{\alpha_i}{\beta_j} u_1(\tau) + h_*^2 \frac{\beta_j}{\alpha_i} u_2(\tau), \quad i, j = \overline{1, N},$$

за минимальное время τ^0 из нулевого начального положения в множество

$$\sum_{i,j=1}^N C_{ij} (D_{ij} x_{ij} - b_{ij}^*)^2 \leq \varepsilon,$$

так, чтобы для всех $\tau \in [0, \tau^0]$ были бы выполнены ограничения (8), (9).

Для решения задачи 2 можно использовать модифицированный алгоритм поворота опорной гиперплоскости, изложенный в работе [3].

Можно показать, что в норме пространства $L_2(Q_T)$ справедлива следующая оценка погрешности аппроксимации по состоянию

$$\|\gamma\|_{L_2(Q_T)} \leq \frac{2Bi_1 Bi_2 G T^{1/2}}{\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_1^4} + \frac{1}{\beta_1^4} + \frac{1}{45} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4} \right) \frac{1}{2},$$

где α_1, β_1 – первые положительные корни уравнений (17), (18),

$$\gamma(\rho, l, \tau) = \theta(\rho, l, \tau) - \theta_N(\rho, l, \tau),$$

$$G = \max \{u_1^+, u_2^+\}.$$

В случае отсутствия ограничений на термонапряжения при выполнении условий

$$2u_1^- (1 + \exp(-0.5)) - u_1^+ (1 + 2 \exp(-0.5)) > 0, \quad (19)$$

$$2u_2^- (1 + \exp(-0.5)) - u_2^+ (1 + 2 \exp(-0.5)) > 0,$$

Теорема 1. *Предположим, что задача оптимального по быстрдействию управления внешним нагревом с учетом ограничений (9) имеет решение. Тогда при выполнении условий (19) существует последовательность номеров N_p , $p = 1, 2, \dots$, такая, что при любом $N = N_p$, $p \geq 1$, решение конечномерной задачи существует и справедливы утверждения*

а) $0 < \tau^{N_1} \leq \tau^{N_2} \leq \dots \leq \tau^0$,

б) $\lim_{p \rightarrow \infty} \tau^{N_p} = \tau^0$,

в) *предел любой слабосходящейся в $L_2^2[0, \tau^0]$ (τ^0 – время быстрдействия) подпоследовательности из $\{u^{N_p}(\tau)\}$ является оптимальным управлением.*

Литература

1. Hitzschke R.P., Schulse D. Berechnung van Zeltplansteuerungen fur Induktive Erwärmungsprozesse //Elektrowärme International 48 (1990) B4 Oktober. P. 192-198.
2. Бикбулатова Г.С. Оптимальное управление процессом нагрева призмы с учетом ограничений на термонапряжения и наибольшую температуру. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н.Уфа, 1996. 118 с.
3. Голичев И.И., Дульцев А.В., Морозкин Н.Д. Об одном итерационном методе решения задачи оптимального нелинейного нагрева с фазовыми ограничениями// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000. Т.40, №11. С. 1615-1632.
4. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость. Киев: Наукова Думка, 1987. 264 с.
5. Морозкин Н.Д. Оптимальное управление процессами нагрева с учетом фазовых ограничений. Учебное пособие, Уфа, 1997. 114 с.
6. Филоненко-Бородич М.И. Механические теории прочности. М.: МГУ, 1961. 92 с.
7. Козлов В.П. Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности. Минск: Наука и техника, 1986. 392 с.

MSC 34D20

Optimization of two-dimensional heating processes taking into account phase limitations

N.D. Morozkin, V.I. Tkachev, Y.N. Morozkin

Ufa University of Science and Technology

Abstract: The problems of time-optimal control of the processes of external heating of a rectangular prism and a cylinder of finite length are studied under restrictions on the highest temperature and on thermal stresses. Dependences of ultimate compressive and tensile strengths on temperature are taken into account, which are approximated by convex functions. The original infinite-dimensional problem is approximated by a finite-dimensional time-optimal problem with convex phase constraints. Estimates of the error of approximations by the state in space are written out. In the absence of restrictions on thermal stresses, the convergence of finite-dimensional approximations in terms of the speed functional and the weak convergence of the sequence of controls to the optimal control are shown.

Keywords: optimal heating, thermal stresses, speed, rectangular prism, cylinder of finite length.

References

1. Hitzschke R.P., Schulse D. Berechnung van Zeltplansteuerungen fur Induktive Erwärmungsprozesse // Elektrowärme International 48 (1990) B4 Oktober. P. 192-198
2. Bikbulatova G.S. Optimal control of the prism heating process, taking into account the limitations on thermal stresses and the highest temperature. Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences Ufa, 1996. 118 p.
3. Golichev I.I., Dultsev A.V., Morozkin N.D. On one iterative method for solving the problem of optimal nonlinear heating with phase constraints // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. T.40, No.11, P. 1615-1632.
4. Motovilovets I.A., Kozlov V.I. Thermoelasticity. Kyiv: Naukova Dumka, 1987. 264 p.
5. Morozkin N.D. Optimal control of heating processes, taking into account phase restrictions. Textbook, Ufa, 1997. 114 p.
6. Filonenko-Borodich M.I. Mechanical theories of strength. M.: MTU, 1961. 92 p.
7. Kozlov V.P. Two-dimensional axisymmetric non-stationary heat conduction problems. Minsk: Science and technology, 1986. 392 p.

УДК 517.925.5, 537.611.44, 51-73

Метод нелинейных функциональных подстановок для уравнений нелинейной диффузии и волновых уравнений*

Морозов В.М.^{1,2}, Журавлев В.М.³

Самарский национальный исследовательский университет¹,
Ульяновское конструкторское бюро приборостроения²,
Ульяновский государственный университет³

Аннотация: В работе развивается обобщение метода функциональных подстановок (МФП) – нелинейные функциональные подстановки (НФП), основанные на системе нелинейных базовых соотношений. С помощью НФП строятся преобразования Бэклунда и точные решения уравнений типа Лиувилля, Sin-Gordon и нелинейной диффузии.

Ключевые слова: метод функциональных подстановок, преобразования Бэклунда, нелинейная диффузия.

1. Нелинейные функциональные подстановки

В работах [1, 2] для построения точных решений нелинейных уравнений был предложен метод функциональных подстановок (МФП), основная идея которого заключается в том, что некоторое нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка:

$$F(N_{xx}, N_{tt}, N_{xt}, N_x, N_t, x, t) \quad (1)$$

может быть представлено в виде условия совместности пары дифференциальных соотношений, называемых базовыми:

$$T_x = A(x, t)T, \quad T_t = B(x, t)T \quad (2)$$

и добавочного уравнения для вспомогательной функции $T(x, t)$:

$$G(T_{xx}, T_{tt}, T_{xt}, T_x, T_t, x, t). \quad (3)$$

Например, уравнение быстрой диффузии вида $N_t = (\ln N)_{xx} + N_x$ получается из добавочного уравнения следующего вида:

$$T_t T_x = T_{xx} T \quad (4)$$

заменой $N = (\ln A)_x$ после использования базовых соотношений (2) и условия совместности $A_t = B_x$.

Нелинейные функциональные подстановки:

$$T_x = u(t, x, T), \quad T_t = v(t, x, T) \quad (5)$$

*Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

преобразуют (4) (УБД) к эквивалентной ему системе квазилинейных уравнений:

$$vu = T(u_x + uv_T), \quad (6)$$

$$u_t + vu_T = v_x + uv_T. \quad (7)$$

Решить полученную систему уравнений можно с использованием различных методов, в частности, можно искать решение в виде полиномиального разложения функций $u(t, x, T)$ и $v(t, x, T)$ по T .

В некоторых случаях полученное разложение приводит к автопреобразованию Бэклунда исходного уравнения.

Для уравнений нелинейной диффузии с взаимными коэффициентами диффузии [5] вида:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_\xi}{N^2 F(1/N)} + \frac{NH(1/N)}{F(1/N)} \right). \quad (8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_x}{F(n)} - \frac{H(n)}{F(n)} \right). \quad (9)$$

с помощью НФП найдено преобразование, связывающее решения:

$$N(\xi(x, t), t)n(x, t) = 1. \quad (10)$$

2. Локализованные решения и симметрии уравнений нелинейной диффузии

Уравнение быстрой диффузии с источником:

$$n_t = (\ln n)_{xx} + \tilde{C}n_x + J(x, t), \quad (11)$$

соответствует обобщенному добавочному уравнению

$$T_t (T_x + q(x, t)T) = T_x (CT_x + p(x, t)T) + T (T_{xx} + r(x, t)T), \quad (12)$$

$q(z, t)$, $p(x, t)$, $r(x, t)$ определяются из условия перехода (12) в УБД.

Решение добавочного уравнения и условия совместности ищем в форме полиномиальных подстановок:

$$T_x = u(x, t, T) = U_1(x, t)T + U_N(x, t)T^N, \quad (13)$$

$$T_t = v(x, t, T) = V_1(x, t)T + V_N(x, t)T^N. \quad (14)$$

Решение для концентрации $n(x, t)$ записывается следующим образом:

$$n(x, t) = \frac{1}{1-N} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[(1-N) \int e^{2(N-1)H(x+(N+C)t)} dx + \beta_0 \right] + \quad (15)$$

$$+ F((C-N+2)t+x) + H'(x+(N+C)t) - \frac{1}{C-N+2} G(x, t). \quad (16)$$

Волновые компоненты решения $H(x+(N+C)t)$ и $F(x+(C-N+2)t)$ связаны с функцией $G(x, t)$, определяющей источник ($J = \sigma G_x - G_t$):

$$\frac{\partial G}{\partial x} + 2mF G - m G^2 = F' + m F^2 + H'' - m (H')^2 \quad (17)$$

На рис. 1 представлены варианты решений $n(x, t)$ для различных источников $J(x, t)$.

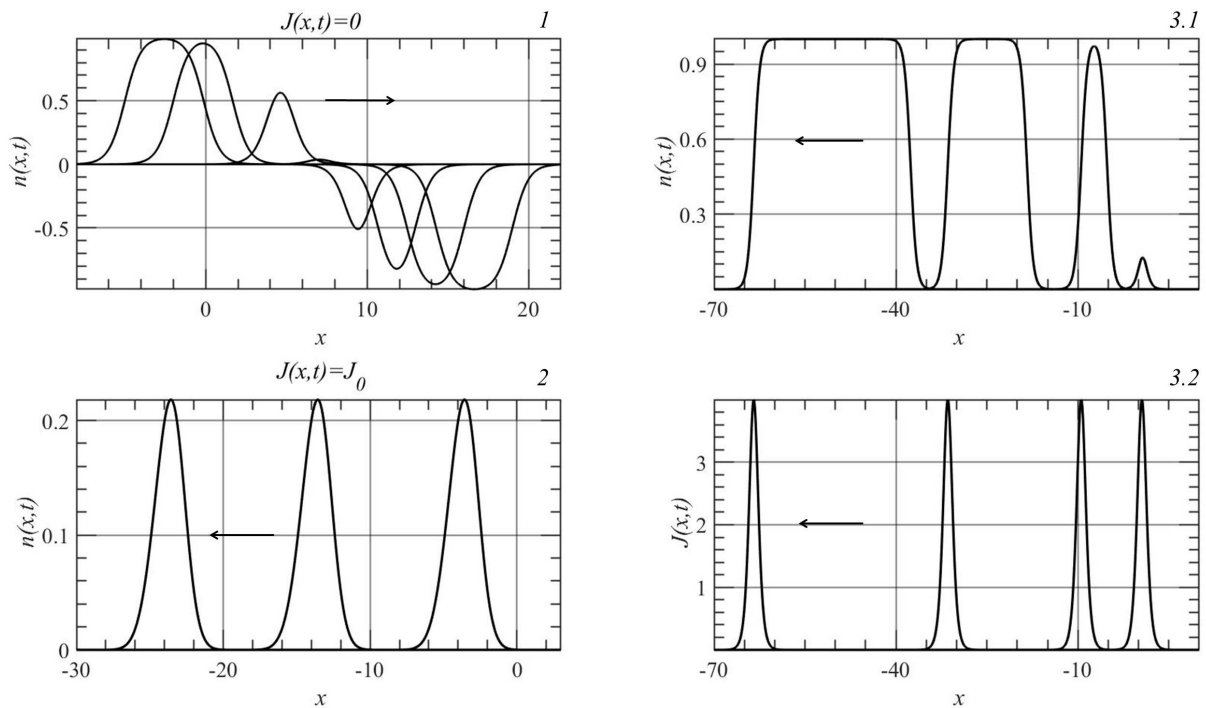


Рис. 1. Распределения концентраций при разных значениях источника $J(x, t)$.

Верхняя левая часть рис. 1 построена для значений: $t = 0.3 k$, $k = \overline{0,8}$, $m = 2$, $\lambda = 1$, $C = -9$, $a = -5$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $\beta_0 = -12$.

Для верхней правой части выбраны следующие значения параметров: $t = 0, 2, 4, 6$; $m = 4$, $J_0 = 1$, $H_1 = 2$, $H_2 = 1$, $\sigma = 1$, $\beta_0 = 10$, $F_0 = 1$, $H_1 = -2$, $H_2 = 1$, $\beta_0 = 4.6$.

Третий рисунок выполнен при значениях $t = 0, 1, 3.2, 6.4$, $m = 2$, $f(t) = f_1 e^{k_0 t}$, $\beta_0 = -5$, $f_1 = 1$, $H_1 = 0.5$, $k_0 = -20$.

Литература

1. Peruani F. A kinetic model and scaling properties of non-equilibrium clustering of self-propelled particles [Текст] / F. Peruani, M. Baer // New Journal of Physics. 2013. Т. 15. No 6. – P. 15 - 30.
2. Ghoniem N.M. Theory and experiment of nanostructure self-organization in irradiated materials [Текст] / N.M. Ghoniem, D. Walgraef, S.J. Zinkle // Journal of computer-aided materials design. 2001. Т. 8. No 1. P. 1 - 38.
3. Alsabbagh A. Microstructure and mechanical behavior of neutron irradiated ultrafine grained ferritic steel [Текст] / A. Alsabbagh, A. Sarkar, B. Miller, J. Burns, L. Squires, D. Porter, J.I. Cole, K.L. Murty // Materials Science and Engineering: A. 2014. Т. 615. P. 128 - 138.
4. Журавлев В.М. Лазерно-индуцированная генерация поверхностных периодических структур в средах с нелинейной диффузией [Текст] / В.М. Журавлев, И.О. Золотовский, Д.А. Коробко, В.М. Морозов, В.В. Светухин, И.О. Явтушенко, М.С. Явтушенко // ФТТ. 2017. No 12. P. 2291 - 2998.

5. Морозов В.М. Модель радиационно-стимулированного роста когерентных структур в кристаллической среде с быстрой релаксацией и медленной диффузией [Текст] / В.М. Морозов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. No 2. P. 78 – 104.

MSC 34D20

Nonlinear functional substitutions method for nonlinear diffusion and wave equations

Morozov V.M.^{1,2}, Zhuravlev V.M.³

Samara National Research University¹,
Ulyanovsk instrument manufacturing design bureau²,
Ulyanovsk State University³

Abstract: In this work we develop a generalization of the functional substitutions method — nonlinear functional substitutions (NFS), based on a nonlinear system of basic relations. Using NFS, Backlund transformations and exact solutions of the Liouville and diffusion equations are constructed.

Keywords: functional substitutions method, Backlund transformation, nonlinear diffusion.

References

1. Peruani F., Baer M. A kinetic model and scaling properties of non-equilibrium clustering of self-propelled particles // *New Journal of Physics*. 2013. T.15. P.15-30.
2. Ghoniem N.M., Walgraef D., Zinkle S.J. Theory and experiment of nanostructure self-organization in irradiated materials // *Journal of computer-aided materials design*. 2001. T.8. No.1. P. 1-38.
3. Alsabbagh A., Sarkar A., Miller B., Burns J., Squires L., Porter D., Cole J.A., Murty K.L. Microstructure and mechanical behavior of neutron irradiated ultrafine grained ferritic steel // *Materials Science and Engineering: A*. 2014. T.615. P. 128-138.
4. Zhuravlev V. M. Et al. Laser-induced generation of surface periodic structures in media with nonlinear diffusion // *Physics of the Solid State*. 2017. T.59. P. 2313-2320.
5. Morozov V.M. Model of radiation-stimulated growth of coherent structures in a crystalline medium with fast relaxation and slow diffusion. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022. P. 99–133. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2022-2-7

УДК 517.925.5, 537.611.44, 51-73

Модель роста когерентных структур в среде с быстрой релаксацией и медленной диффузией*

Морозов В.М.^{1,2}, Журавлев В.М.³

Самарский национальный исследовательский университет¹,
Ульяновское конструкторское бюро приборостроения²,
Ульяновский государственный университет³

Аннотация: В работе предлагается модель радиационно-стимулированного роста когерентных структур в кристаллической среде, основанная на уравнениях нелинейной диффузии точечных дефектов. Выявлены возможные режимы роста сверхрешеток и получены распределения концентраций и концентрационные профили по глубине материала.

Ключевые слова: нелинейная диффузия, когерентные структуры, метод много-масштабных разложений.

1. Модель «Быстрая релаксация-медленная диффузия»

Предлагаемая модель роста когерентных структур [1–3] основана на системе уравнений диффузии точечных дефектов (вакансии, междоузлия) [4, 5]:

$$\frac{\partial n_v}{\partial \tau} = \tilde{\lambda}_c(N_c - n_v)g + \tilde{\lambda}_i(N_c - n_v)n_i - \tilde{\gamma}n_vn_i - \tilde{\mu}_vn_v + \nabla [D_v(n_i, n_v)\nabla n_v], \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} = -\tilde{\sigma}_i\frac{\partial n_i}{\partial z_3} + \tilde{\lambda}_c(N_c - n_v)g + \tilde{\lambda}_i(N_c - n_v)n_i - \tilde{\gamma}n_vn_i - \tilde{\mu}_in_i + \nabla [D_i(n_i, n_v)\nabla n_i], \quad (3)$$

с коэффициентами диффузии $D_{v,i}(n_i, n_v)$, зависящими от концентраций, и переменным источником $J = \tilde{\lambda}_c(N_c - n_v)g + \tilde{\lambda}_i(N_c - n_v)n_i$.

Налетающие частицы с концентрацией $g(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, рассматриваются как часть динамической системы. Концентрация $g(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ удовлетворяет такому уравнению переноса:

$$g_\tau = -\sigma_r\frac{\partial g}{\partial z_3} - \tilde{\lambda}_c(N_c - n_v)g - \tilde{\lambda}_rn_ig - \tilde{\kappa}g, \quad (4)$$

Решение задачи ищется в виде разложений безразмерных концентраций по малому параметру ε вида:

$$u(t, \vec{X}, T, \varepsilon) = u^{(0)}(t, \vec{X}, T) + u^{(1)}(t, \vec{X}, T)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (5)$$

Коэффициенты разложения $u^{(k)}$ зависят от медленных координат $\vec{X} = \sqrt{\varepsilon}\vec{x}$ и медленного времени $T = \varepsilon t$.

*Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

Малый параметр ε имеет следующий вид:

$$\varepsilon^4 = \frac{D_0 \tilde{\lambda}_c N_c}{\sigma_r^2} = \frac{D_0}{\sigma_r} \frac{1}{\sigma_r \tau_d} \frac{\tau_d (\dot{g})_{abs}}{I/\sigma_r} = e_0 \frac{\langle v \rangle}{\sigma_r} \frac{\langle l \rangle}{\langle l_i \rangle} \frac{(\delta g)_{abs}}{g_{irr}} \ll 1.$$

Здесь τ_d – характерное время диффузии в необлученном кристалле, $\langle v \rangle$ – средняя «тепловая» скорость частиц вещества, e_0 – числовой коэффициент, зависящий от типа кристаллической решетки, $\langle l \rangle$ – длина свободного пробега частиц вещества в необлученном кристалле, $\langle l_i \rangle = \sigma_r \tau_d$ – расстояние, которое проходят без столкновения частицы излучения за то же время.

Разделение пространственных и временных масштабов приводит к тому, что исходная система уравнений распадается на две – уравнения релаксации и уравнения, описывающие рост крупномасштабной структуры.

В асимптотике при $t \rightarrow \infty$ распределение концентраций определяется функцией медленных переменных $A(\vec{X}, T)$, удовлетворяющей уравнению такого вида:

$$\left(1 + \frac{\nu^2}{A^2}\right) A_T + \sigma_i \frac{\nu^2}{A^2} A_Z = \nabla (\mathcal{D}_{\downarrow f}(A) \nabla A) - S(A), \quad (6)$$

где $S(A) = \mu_v A + \mu_i \nu^2 - \mu_i \frac{\nu^2}{A} + \frac{\lambda_i \mu_v}{\gamma}$, а эффективный коэффициент диффузии имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\downarrow f}(A) = & \frac{\nu^\varepsilon}{A^\varepsilon} \mathcal{D}_\triangleright \left(\frac{\mathcal{N}_J \alpha_\infty \nu^\varepsilon}{A} - \mathcal{N}_J \alpha_\infty \nu^\varepsilon, \mathcal{N}_J \alpha_l + \mathcal{N}_J \alpha_\infty A \right) + \\ & + \mathcal{D}_\sqsubseteq \left(\frac{\mathcal{N}_J \alpha_\infty \nu^\varepsilon}{A} - \mathcal{N}_J \alpha_\infty \nu^\varepsilon, \mathcal{N}_J \alpha_l + \mathcal{N}_J \alpha_\infty A \right). \end{aligned} \quad (7)$$

При некоторых значениях параметра $\nu = \sqrt{\frac{g_0}{\gamma}}$ (интенсивности падающего излучения), функция $\mathcal{D}_{\downarrow f}(A)$ может принимать отрицательные значения, что соответствует росту упорядоченной структуры.

Литература

1. Peruani F. A kinetic model and scaling properties of non-equilibrium clustering of self-propelled particles [Текст] / F. Peruani, M. Baer // New Journal of Physics. 2013. Т. 15. No 6. – P. 15 - 30.
2. Ghoniem N.M. Theory and experiment of nanostructure self-organization in irradiated materials [Текст] / N.M. Ghoniem, D. Walgraef, S.J. Zinkle // Journal of computer-aided materials design. 2001. Т. 8. No 1. P. 1 - 38.
3. Alsabbagh A. Microstructure and mechanical behavior of neutron irradiated ultrafine grained ferritic steel [Текст] / A. Alsabbagh, A. Sarkar, B. Miller, J. Burns, L. Squires, D. Porter, J.I. Cole, K.L. Murty // Materials Science and Engineering: A. 2014. Т. 615. P. 128 - 138.
4. Журавлев В.М. Лазерно-индуцированная генерация поверхностных периодических структур в средах с нелинейной диффузией [Текст] / В.М. Журавлев, И.О. Золотовский, Д.А. Коробко, В.М. Морозов, В.В. Светухин, И.О. Явтушенко, М.С. Явтушенко // ФТТ. 2017. No 12. P. 2291 - 2998.

5. Морозов В.М. Модель радиационно-стимулированного роста когерентных структур в кристаллической среде с быстрой релаксацией и медленной диффузией [Текст] / В.М. Морозов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. No 2. P. 78 – 104.

MSC 34D20

Model of growth of coherent structures in a medium with fast relaxation and slow diffusion

V.M. Morozov^{1,2}, V.M. Zhuravlev³

Samara National Research University¹,
Ulyanovsk instrument manufacturing design bureau²,
Ulyanovsk State University³

Abstract: The paper proposes a model of radiation-stimulated growth of coherent structures in a crystalline medium based on the equations of nonlinear diffusion of point defects. Possible modes of growth of superlattices are revealed, and concentration distributions and concentration profiles over the depth of the material are obtained.

Keywords: nonlinear diffusion, coherent structures, multiscale expansion method.

References

1. Peruani F., Baer M. A kinetic model and scaling properties of non-equilibrium clustering of self-propelled particles // *New Journal of Physics*. 2013. T.15. P.15-30.
2. Ghoniem N.M., Walgraef D., Zinkle S.J. Theory and experiment of nanostructure self-organization in irradiated materials // *Journal of computer-aided materials design*. 2001. T.8. No.1. P. 1-38.
3. Alsabbagh A., Sarkar A., Miller B., Burns J., Squires L., Porter D., Cole J.A., Murty K.L. Microstructure and mechanical behavior of neutron irradiated ultrafine grained ferritic steel // *Materials Science and Engineering: A*. 2014. T.615. P. 128-138.
4. Zhuravlev V. M. Et al. Laser-induced generation of surface periodic structures in media with nonlinear diffusion // *Physics of the Solid State*. 2017. T.59. P. 2313-2320.
5. Morozov V.M. Model of radiation-stimulated growth of coherent structures in a crystalline medium with fast relaxation and slow diffusion. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022. P. 99–133. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2022-2-7

УДК 517.925

О возмущениях автономных систем ОДУ, сохраняющих некоторые свойства решений

Мусафиров Э.В.

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Аннотация: Рассматривается неавтономное возмущение автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое представляет собой правую часть автономной системы, умноженную на скалярную функцию, зависящую от времени. Доказано, что это возмущение сохраняет качественные свойства решений автономной системы, такие как наличие периодических решений и устойчивость решений по Ляпунову. Полученные теоремы позволяют определить вид возмущений, не влияющих на качественное поведение решений при моделировании реальных процессов.

Ключевые слова: отражающая функция Мироненко, периодическое решение, точка равновесия, равномерная асимптотическая устойчивость по Ляпунову, предельный цикл.

1. Введение

В качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений большое внимание уделяется вопросу о существовании, числе и местоположении периодических решений. Иногда на этот вопрос можно ответить, используя отражающую функцию Мироненко (ОФМ) [1–3].

При изучении качественного поведения решений некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений эта система может быть заменена эквивалентной в смысле совпадения ОФМ. Иногда это можно сделать, даже если ОФМ системы неизвестна (см., например, [4–6]). В частности, это можно сделать с помощью следующей теоремы [7].

Теорема 1. Пусть $\alpha(t)$ — произвольная скалярная непрерывная нечетная функция, тогда любая автономная система

$$\dot{x} = X(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

эквивалентна (в смысле совпадения ОФМ) неавтономной системе

$$\dot{x} = (1 + \alpha(t)) X(x). \quad (2)$$

Теорема 1 является частным случаем теоремы 1 из [5], с помощью которой было получено много результатов, обладающих теоретической и практической значимостью.

Целью данного исследования является выяснение связи между свойствами решений систем (1) и (2), где $\alpha(t)$ — произвольная скалярная непрерывная функция (не обязательно нечетная). Отличительной особенностью является то, что мы не требуем, чтобы функция $\alpha(t)$ была нечетной, а это означает, что ОФМ систем (1) и (2) могут не совпадать.

2. Основной результат

Лемма 1. Если $\eta(t)$ — решение системы (1), то $\eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds)$ — решение системы (2), где $\alpha(t)$ — произвольная скалярная непрерывная функция.

Доказательство. Так как $\eta(t)$ является решением системы (1), то $\dot{\eta}(t) = X(\eta(t))$. Дифференцируя $\eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds)$ по t , получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds) \right) = (1 + \alpha(t)) \dot{\eta}(t + \int_0^t \alpha(s)ds).$$

Отсюда, учитывая, что $\dot{\eta}(t) = X(\eta(t))$, следует

$$\frac{d}{dt} \left(\eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds) \right) = (1 + \alpha(t)) X(\eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds)).$$

Это означает, что $\eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds)$ является решением системы (2).

Доказательство завершено.

Теорема 2. Пусть решение $\eta(t)$ системы (1) и непрерывная скалярная функция $\alpha(t)$ ω -периодичны. Если дополнительно $\int_0^\omega \alpha(s)ds = 0$, то решение $\eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds)$ системы (2) является ω -периодическим (период ω не обязательно минимальный).

Доказательство. Заметим, что по лемме 1, если $\eta(t)$ является решением системы (1), то $\eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds)$ является решением системы (2). Пусть $\alpha(t)$ — скалярная непрерывная ω -периодическая функция. Обозначим $A(t) = \int_t^{t+k\omega} \alpha(s)ds$, где $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\alpha(t)$ — непрерывная функция, то (по свойствам интеграла с переменным верхним пределом интегрирования) $A(t)$ — дифференцируемая функция и $\dot{A}(t) = \alpha(t + k\omega) - \alpha(t) \forall t \in \mathbb{R}$. Так как функция $\alpha(t)$ является ω -периодической, то $\dot{A}(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$, т. е. $A(t) = \text{const} \forall t \in \mathbb{R}$. В частности, $A(t) = A(0) \forall t \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\int_t^{t+k\omega} \alpha(s)ds = \int_0^{k\omega} \alpha(s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Пусть решение $\eta(t)$ системы (1) является ω -периодическим и $\int_0^\omega \alpha(s)ds = 0$. Поскольку $\eta(t)$ является ω -периодической функцией, то

$$\eta(t + \omega + \int_0^{t+\omega} \alpha(s)ds) = \eta(t + \int_0^{t+\omega} \alpha(s)ds) = \eta(t + \int_0^t \alpha(s)ds) + \int_t^{t+\omega} \alpha(s)ds.$$

Используя (3), мы имеем

$$\eta(t) + \int_0^t \alpha(s) ds + \int_t^{t+\omega} \alpha(s) ds = \eta(t) + \int_0^t \alpha(s) ds + \int_0^\omega \alpha(s) ds = \eta(t) + \int_0^t \alpha(s) ds,$$

т. е. $\eta(t+\omega) + \int_0^{t+\omega} \alpha(s) ds = \eta(t) + \int_0^t \alpha(s) ds$. В свою очередь это означает ω -периодичность функции $\eta(t) + \int_0^t \alpha(s) ds$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Замечание 6. Если $\alpha(t)$ — скалярная непрерывная нечетная ω -периодическая функция, то $\int_0^\omega \alpha(s) ds = 0$. Следовательно, теорема 2 остается справедливой, если предположение $\int_0^\omega \alpha(s) ds = 0$ заменить предположением о нечетности $\alpha(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\alpha(t)$ — скалярная непрерывная ω -периодическая функция, то выполняется тождество (3). Из тождества (3) для $t = -\omega$ и $k = 1$ следует, что $\int_{-\omega}^0 \alpha(s) ds = \int_0^\omega \alpha(s) ds$. Поскольку $\alpha(t)$ нечетная функция, то $-\int_{-\omega}^0 \alpha(s) ds = \int_0^\omega \alpha(s) ds$ и, следовательно, $\int_0^\omega \alpha(s) ds = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Теорема 3. Пусть $X(x)$ локально липшицева и $X(0) = 0$. Кроме того, пусть $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная скалярная функция такая, что

$$\int_0^t \alpha(s) ds \geq -t \quad \forall t \geq 0. \quad (4)$$

1. Если точка равновесия $x = 0$ системы (1) устойчива по Ляпунову, то точка равновесия $x = 0$ системы (2) равномерно устойчива по Ляпунову.
2. Если $\int_0^{+\infty} (\alpha(s) + 1) ds = +\infty$ и точка равновесия $x = 0$ системы (1) неустойчива по Ляпунову, то точка равновесия $x = 0$ системы (2) неустойчива по Ляпунову.
3. Если $\int_0^{+\infty} (\alpha(s) + 1) ds = +\infty$ и точка равновесия $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчива по Ляпунову, то точка равновесия $x = 0$ системы (2) равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X(0) = 0$, тогда $x = 0$ является точкой равновесия как системы (1), так и системы (2). Заметим, что по лемме 1, если $x(t)$ является решением системы (1), то $x(t) + \int_0^t \alpha(s) ds$ является решением системы (2).

1) Пусть точка равновесия $x = 0$ системы (1) устойчива по Ляпунову, тогда по определению (см. [8, с. 112]): $\|x(0)\| < \delta_1 \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon_1 \forall t \geq 0$. По определению (см. [8, с. 149]) точка равновесия $x = 0$ системы (2) равномерно устойчива по Ляпунову, если $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ такое, что если $\left\| x(t_0 + \int_0^{t_0} \alpha(s) ds) \right\| < \delta_2 \Rightarrow \left\| x(t + \int_0^t \alpha(s) ds) \right\| < \varepsilon_2 \forall t \geq t_0 \geq 0$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, условие $\forall t_0 \geq 0 \left\| x(t_0 + \int_0^{t_0} \alpha(s) ds) \right\| < \delta$ подразумевает $\|x(0)\| < \delta \forall \delta > 0$. Отсюда по определению устойчивости по Ляпунову точки равновесия $x = 0$ системы (1) следует, что $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \forall t \geq t_0 \geq 0$ и так как (в силу (4)) $t + \int_0^t \alpha(s) ds \geq 0 \forall t \geq 0$, то $\left\| x(t + \int_0^t \alpha(s) ds) \right\| < \varepsilon \forall t \geq t_0 \geq 0$. Это (по определению) означает, что точка равновесия $x = 0$ системы (2) равномерно устойчива по Ляпунову.

2) Пусть точка равновесия $x = 0$ системы (1) неустойчива по Ляпунову, тогда по определению: $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0 \|x(0)\| < \delta$, но $\exists t^* \geq 0$ такое, что $\|x(t^*)\| \geq \varepsilon$. Так как интеграл с переменным верхним пределом интегрирования $\int_0^t (\alpha(s) + 1) ds$ непрерывен, $\int_0^0 (\alpha(s) + 1) ds = 0$ и $\int_0^{+\infty} (\alpha(s) + 1) ds = +\infty$, то $\exists t_1 \geq 0$ такое, что $\int_0^{t_1} (\alpha(s) + 1) ds = t^*$ и, следовательно, $\left\| x(t_1 + \int_0^{t_1} \alpha(s) ds) \right\| \geq \varepsilon$. Это означает, что точка равновесия $x = 0$ системы (2) неустойчива по Ляпунову.

3) Пусть точка равновесия $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчива по Ляпунову. По определению (см. [8, с. 112]) это означает, что точка равновесия $x = 0$ системы (1) устойчива по Ляпунову и $\exists \delta_1 > 0$ такое, что если $\|x(0)\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. По определению (см. [8, с. 150]) точка равновесия $x = 0$ системы (2) является равномерно асимптотически устойчивой по Ляпунову, если она равномерно устойчива по Ляпунову и $\exists \delta_2 > 0$, не зависящее от t_0 , такое, что для всех $\left\| x(t_0 + \int_0^{t_0} \alpha(s) ds) \right\| < \delta_2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t + \int_0^t \alpha(s) ds) = 0$ равномерно по t_0 . Равномерная устойчивость по Ляпунову точки равновесия $x = 0$ системы (2) следует из пункта 1) теоремы.

Из определения асимптотической устойчивости по Ляпунову точки равновесия $x = 0$ системы (1) следует, что $\exists \delta = \delta_1 > 0$ такое, что при $\left\| x(t_0 + \int_0^{t_0} \alpha(s) ds) \right\| < \delta \forall t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, а так как по условию теоремы $\int_0^{+\infty} (\alpha(s) + 1) ds = +\infty$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t + \int_0^t \alpha(s) ds) = 0$. Что, по определению, означает, что точка равновесия $x = 0$ системы (2) равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Замечание 7. Условие (4) выполняется, если $\alpha(t) \geq -1 \quad \forall t \geq 0$.

3. Примеры

Приведенные выше результаты могут быть использованы для изучения качественного поведения решений возмущенных систем.

Пример 1. Рассмотрим систему [9, с. 138]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2), \quad t, x, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5)$$

и возмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(1 + \cos \frac{t}{2}\right) (-y + x(1 - x^2 - y^2)), \\ \dot{y} &= \left(1 + \cos \frac{t}{2}\right) (x + y(1 - x^2 - y^2)), \quad t, x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно [9, с. 139], система (5) имеет (орбитально) устойчивый предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$. Этот цикл соответствует 2π -периодическому (а значит, и 4π -периодическому) решению $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ системы (5) с начальными условиями $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Поскольку функция $\alpha(t) = \cos \frac{t}{2}$ является 4π -периодической и $\int_0^{4\pi} \alpha(s) ds = 0$, то из теоремы 2 следует, что система (6) имеет 4π -периодическое решение

$$(x(t), y(t)) = \left(\cos \left(t + 2 \sin \frac{t}{2} \right), \sin \left(t + 2 \sin \frac{t}{2} \right) \right),$$

что соответствует предельному циклу $x^2 + y^2 = 1$.

Пример 2. Рассмотрим систему Лэнгфорда (см. [10, 11])

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - 1)x - y + xz, \\ \dot{y} &= x + (a - 1)y + yz, \\ \dot{z} &= az - (x^2 + y^2 + z^2), \quad a, t, x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) имеет две точки равновесия $O_1(0, 0, 0)$, $O_2(0, 0, a)$ и очень богатое бифуркационное поведение. Наряду с системой (7) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + \alpha(t)) ((a - 1)x - y + xz), \\ \dot{y} &= (1 + \alpha(t)) (x + (a - 1)y + yz), \\ \dot{z} &= (1 + \alpha(t)) (az - (x^2 + y^2 + z^2)), \quad a, t, x, y, z \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha(t)$ — скалярная непрерывная функция такая, что

$$\int_0^t \alpha(s) ds \geq -t \quad \forall t \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} (\alpha(s) + 1) ds = +\infty.$$

Примером такой функции может быть $\alpha(t) = \cos t$. Согласно [11], для системы (7) точка равновесия $O_1(0, 0, 0)$ асимптотически устойчива по Ляпунову при $a < 0$ и неустойчива по Ляпунову при $a > 0$, а точка равновесия $O_2(0, 0, a)$ асимптотически устойчива по Ляпунову при $0 < a < 1/2$ и неустойчива по Ляпунову при $a < 0$ или $a > 1/2$. Из теоремы 3 следует, что для возмущенной системы (8) точка равновесия $O_1(0, 0, 0)$ равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову при $a < 0$ и неустойчива по Ляпунову при $a > 0$, а точка равновесия $O_2(0, 0, a)$ равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову при $0 < a < 1/2$ и неустойчива по Ляпунову при $a < 0$ или $a > 1/2$.

4. Заключение

Доказано, что неавтономное возмущение $\alpha(t)X(x)$ автономной системы (1) сохраняет качественные свойства решений автономной системы, такие как наличие периодических решений и устойчивость решений по Ляпунову. Эти результаты позволяют узнать, какое возмущение не повлияет на качественное поведение решений при моделировании реальных процессов.

Литература

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. 2004. 196 с.
2. Мусафиров Э.В. О дифференциальных системах, отражающая матрица которых представляет собой произведение матричных экспонент. // Вести НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. 2002. № 1. С. 44–50.
3. Мусафиров Э.В. Двумерные линейные дифференциальные системы с отражающей матрицей, представляющей собой произведение двух матричных экспонент // Вестник фонда фундаментальных исследований. 2006. № 4. С. 75–84.
4. Белокурский М.С., Деменчук А.К. Периодическая отражающая функция нелинейной квазипериодической дифференциальной системы с двухчастотным базисом // Дифференциальные уравнения. 2013. Т.49. № 10. 1356 с.
5. Mironenko V.I., Mironenko V.V. How to construct equivalent differential systems // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol.22. No.9. P. 1356-1359.
6. Чжоу Чж. О периодических решениях рациональных дифференциальных уравнений // Проблемы физики, математики и техники. 2014. №.1(18). С. 81-84.
7. Мусафиров Э.В. Временные симметрии дифференциальных систем. Пинск : ПолесГУ. 2009. 191 с.
8. Khalil H.K. Nonlinear Systems. Pearson Education. Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall. 2002. 750 p.
9. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука. 1987. 160 с.

10. Musafirov E.V. Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2017. Vol.27. No.0. P. 1750154–1–5.
11. Guo G., Wang X., Lin X., Wei M. Steady-state and Hopf bifurcations in the Langford ODE and PDE systems // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2017. Vol.34. P. 343–362.

MSC 34D10

On perturbations of autonomous ODE systems preserving some properties of solutions

E.V. Musafirov

Yanka Kupala State University of Grodno

Abstract: A non-autonomous perturbation of an autonomous system of ordinary differential equations is considered, which is the right part of an autonomous system multiplied by a scalar function depending on time. It is proved that this perturbation preserves the qualitative properties of solutions of an autonomous system, such as the presence of periodic solutions and the Lyapunov stability of solutions. These results allow us to find out which perturbation will not affect the qualitative behavior of solutions when modeling real processes.

Keywords: Mironenko reflecting function, periodic solution, equilibrium point, uniform asymptotic Lyapunov stability, limit cycle.

References

1. Mironenko V.I. Reflecting function and investigation of multivariate differential systems. Gomel : Gomel University Press. 2004. 196 p. (in Russian).
2. Musafirov E.V. On the systems with a reflective matrix representing by product of exponential matrix // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and mathematics series. 2002. No.1. P. 44–50.
3. Musafirov E.V. Bidimensional linear differential systems with the reflective matrix represented as a product of two exponential matrices // Vestnik of the Foundation for Fundamental Research. 2006. No.4. P. 75–84.
4. Belokurskii M.S., Demenchuk A.K. Periodic reflecting function of a nonlinear quasiperiodic differential system with a two-frequency basis // Differential Equations. 2013. Vol.49. No.10. P. 1323-1327.
5. Mironenko V.I., Mironenko V.V. How to construct equivalent differential systems // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol.22. No.9. P. 1356-1359.
6. Zhou Zh. On the periodic solutions of the rational differential equations // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. No.1(18). P. 81-84 (in Russian).
7. Musafirov E.V. Time symmetries of differential systems. Pinsk : PolesSU. 2009. 191 p. (in Russian).
8. Khalil H.K. Nonlinear systems. Pearson Education. Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall. 2002. P. 750.
9. Amel'kin V.V. Differential equations in applications. Moscow : Mir. 1990. Vol.21. 286 p.

10. Musafirov E.V. Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2017. Vol.27. No.10. P. 1750154–1–5.
11. Guo G., Wang X., Lin X., Wei M. Steady-state and Hopf bifurcations in the Langford ODE and PDE systems // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2017. Vol.34. P. 343–362.

УДК 517.91

Моделирование стохастически обусловленных популяционных инвазий в уравнениях с запаздывающим противодействием*

Переварюха А.Ю.¹, Трофимова И.В.², Михайлов В.В.¹

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН¹,
Санкт-Петербургский Государственный Университет²

Аннотация: Агрессивные инвазионные процессы все интенсивнее наблюдаются в северных экосистемах из-за климатических изменений. Южные виды активно вытесняют автохтонную фауну. Процессы при инвазиях оказываются чрезвычайно разнообразны даже для одного переселяющегося вида в разных средах. Актуальны сценарии изменения биоразнообразия сообществ в моделях с различным заданным воздействием. Нами предложены математические модели сценариев противоборства вселенцев и биотической среды, описанные уравнениями с возмущенным запаздывающим воздействием, имитирующим адаптацию. Получен прогноз ситуации длительных колебаний численности в модели с итоговым состоянием критического минимума после первичной вспышки избыточно агрессивного инвазионного вида.

Ключевые слова: моделирование инвазионных процессов, стохастическое возмущение, уравнения с запаздыванием.

1. Введение

Динамика инвазионных процессов отличается значительным качественным разнообразием. Построение общей модели инвазии не представляется возможным, поскольку для описания возникающих экологических ситуаций со стремительными изменениями требуются различные нелинейные эффекты, которые не будут совместимы в одной схеме развития процесса. Математический аппарат целесообразно выбирать исходя из актуальной задачи. Определение нужных свойств решения имитирующей поведением биосистемы динамической модели необходимо проводить на основе анализа конкретной исследуемой ситуации. Вариантов ситуаций множество, некоторые – уникальны, другие поддаются типизации. Актуально создание общепринятой классификации типов развития инвазионных процессов в краткой и долгосрочной перспективах. Много внимания уделяется моделированию эруптивной стадии вселения чужеродного организма – первым фазам развития инвазионного процесса, которые часто сопровождаются стремительными вспышками с угрозой для среды, тогда как на самом деле для экодинамики наиболее интересна длительная асимптотическая динамика. Для моделирования различных ситуаций можно выбирать дискретные или непрерывные системы, которые лучше соответствуют динамическим свойствам обстановки в биосистеме, отраженной на графиках наблюдений. С анализа графиков и факторов изменения численности необходимо начинать системный анализ ситуации и далее выбирать подходящий метод математической формализации на основе критериев соответствия. Нелинейные эффекты формируют наш набор опи-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект РФФИ № 23-21-00339) в СПб ФИЦ РАН.

сательных средств. Для моделирования вариантов развития ситуации с переходом инвазии от стремительной вспышки к глубокой депрессии нами выбраны уравнения с отклоняющимся аргументом в качестве математического средства описания процессов. В функциональные составляющие регуляции актуально внести стохастическое возмущение для имитации вариативности развития. Дополнительно мы учли фактор неполной предопределенности при формировании запаздывающего ответа. В модели добавлен аспект заранее неизвестного времени выработки противодействия со стороны автохтонного биотического окружения.

2. Уравнение для сценария инвазионного кризиса

С целью выбора искусственного противодействия расселению агрессивного инвазионного вида насекомых или моллюсков проводится специальная интродукция еще одного вида-антагониста. Примеров включения биологической борьбы достаточно много, но эффективность такого метода подавления на практике непостоянна. Такое популярное направление как «биохакинг» развивает методики активного вмешательства и подавления инвазионных процессов, например, с использованием патогенных микроорганизмов: вирусов и микромицетов, способных поражать личиночные стадии насекомых. Разработаны математические модели в дифференциальных уравнениях для специфических сценариев популяционной динамики, описывающие активность вида-антагониста против чужеродной популяции. Уравнения включают два механизма борьбы: с временной отложенной адаптацией и с запаздывающей активацией воздействия. В вычислительном эксперименте получен сценарий преодоления глубокой депрессии для атакуемого вида с высоким репродуктивным коэффициентом и с дальнейшим установлением равновесного состояния. Примером описанной ситуации служит динамика растущей колонии бактерий кишечной палочки, задействовавших адаптационный механизм защиты после вселения нового вируса-бактериофага. Преодоление кризиса при взаимодействии случается, если РНК-белковый комплекс *CRISPR/Cas-9* у выживших кишечных палочек через небольшой промежуток времени обучается распознавать выбранные уникальные краткие фрагменты генома в 20 оснований, присутствующего только в РНК данного штамма вируса, и разрывать в этом месте цепочку нуклеотидов. Вирусы мутируют в ответ. По причине адаптации и разнообразия вирионов терапия с бактериофагами теряет эффективность.

Имитационное моделирование для лимитированного средой роста продолжает развиваться в современных модификациях с коэффициентами с $\dot{N} = rF(N(t))^\ominus$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t))/(K + \vartheta N)^\ominus}{(1 - N(t))/K(1 - \gamma)}, \quad (1)$$

где $N(t)$ – численность вида, r – репродуктивный потенциал, K – емкость экологической ниши, γ – равномерно распределенная случайная величина, ϑ – числовой параметр. Решения (1) описывают уравнивающиеся процессы $\forall N(0) > 0$. Не все уравнения можно дополнять включением $t - \tau$. Основное отличие у моделей ограниченного роста в положении точки перегиба $N_p \neq 0$ на графике решения $N(t)$. Положение ординаты точки перегиба N_p важно для выбора оптимальной эксплуатации и расчета вылова $\dot{N} = rf(N(t)) - Q$. Оптимально: $N_p = \frac{K}{2}$, абсцисса $t_p = r^{-1} \frac{\ln(K - N(0))}{N(0)}$. Прирост численности в N_p максимален, популяция демонстрирует лучшую продуктивность [1]. Идея, что излишек прироста можно изымать

чрезвычайно опасна для промысла популяций с критическими пороговыми состояниями. Модель $\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - F(N)$ с запаздывающей регуляцией без параметра ниши K с $f(x) = rxe^{-bx}$ предложена для опытов А. Николсона с лабораторными насекомыми:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau) \exp(-bN(t - \tau)) - \delta N(t), \quad (2)$$

где δ – гибель от факторов среды, b – уровень внутренней конкуренции за ресурсы. При $r\tau \gg \frac{\pi}{2}$ модель (2) демонстрирует релаксационные колебания $\min N_*(t) \rightarrow \epsilon$.

Сравним динамику разработанной нами детерминированной модели инвазионного процесса для агрессивного вселенца с $N(t - \tau)$ и модель инвазии в форме уравнения с отклоняющимся аргументом, где величина запаздывания τ возмущена равномерно распределенной случайной величиной $\gamma \in [-0.5, 0.5]$, что отражает влияние случайных факторов на небольшую исходную группу особей-вселенцев. Для включения стохастической компоненты лучше возмущать именно величину запаздывания $\gamma\tau$, что качественно отразится на сценариях завершения инвазионного процесса. Возмущение репродуктивного параметра r не несет существенного смысла, но стохастика запаздывания τ позволяет рассматривать сценарии — сравнивать различные варианты, актуальные для разрушающих среду вредителей.

Выполнено моделирование специфических экстремальных кризисных процессов популяций вне равновесного состояния популяции со средой. Исследуемые экстремальные биофизические процессы происходят при инвазиях агрессивных чужеродных видов в адаптирующуюся среду. Время адаптации нового биотического окружения и восстановление истощенных активным вселенцем ресурсов среды важные характеристики уравнений с возмущенным запаздыванием и с пороговыми триггерными функциями популяционного процесса. Для отражения запаздываний различного феноменологического типа эффекты запаздывания разделены на три типа по биологическому генезису и роли в развитии процессов. Инвазионные процессы проходят этап кризисной динамики $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$ и сопровождаются длительными осцилляциями. Биосистема получит несколько сценариев динамики кризиса, включая гибель $N(t_\infty) = 0$. Зададим пороговое развитие инвазионного популяционного процесса с кризисом в уравнении с функцией сопротивления среды $\dot{N} = F(N(t - \tau)) - \Psi(N(t - \nu))$. Пороговый эффект реакции агрессивному росту численности вселенца выразим \ln_K -регуляцией в функции противодействия $\Psi(N(t - \nu))$ и при $Q > q$, $m \geq 2$, $N(0) < J < K$ так:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau)} \right) - Q \frac{N^m(t - \nu)}{(J - N(t))^2} - qN(t). \quad (3)$$

Разработанной нами модели (3) на начальном этапе идет увеличение численности небольшой группы $N(0) < J$. Далее рост остановлен. Вместо стабилизации $N(t) \rightarrow K$, $N(t_S) < K$ или превышения равновесия K начинается стадия резкого кризиса с возрастанием $F(N^2; J^{-1})$ при $N \rightarrow J$, потенциал роста еще не нивелирован \ln_K -регуляцией.

При анализе стремительных инвазий и инфекций актуален сценарий, когда достигнутая численность $N(t) \rightarrow K$ не будет устойчивой. Стохастическое возмущение динамики значимо при активации противоборства в состоянии критическом для среды. При приближении к порогу разрушения среды наблюдается усиление противодействия, что типично для иммунного ответа организма. Время активации вариативно, но не менее τ_1 . Пусть τ_1 варьируется случайной величиной γ в ограниченном

диапазоне. Предложим модель инвазии с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2]. \quad (4)$$

Приближение $N(t)$ к пороговому значению J , $N(0) < J < \mathcal{K}$ влечет резкий переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$. Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний $N(t) \rightarrow N_*(t)$, $\max N_*(t) < J$ зависит от стохастических τ -факторов. Согласно (4) популяция гарантированно погибает при увеличении репродуктивного потенциала r . Можно показать, что существует $r = \bar{r}$, что для события

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} N(t; \bar{r}\tau) = 0$$

вероятность $P > 0$ и $\exists \hat{r} > \bar{r}$, $t < \infty$ реализуется для данного события $P = 1$. \hat{r} критический порог репродуктивной активности, ведущий к инвазионному кризису после вспышки.

Литература

1. Соловьева Т.Н., Переварюха А.Ю. Динамическая модель деградации запасов осетровых рыб со сложной внутривидовой структурой // Информационно-управляющие системы. 2016. № 4 (83). С. 60-67.

MSC 34D20

Modeling stochastically driven population invasions in equations by delayed counteraction

A.Yu. Perevaryukha¹, I.V. Trofimova², V.V. Mikchailov¹

St. Petersburg Federal Research Center RAS¹,
St. Petersburg State University²

Abstract: Aggressive invasive processes are increasingly observed in the northern ecosystems due to climate change, southern species are actively crowding out the autochthonous fauna. Processes during invasions turn out to be extremely diverse even for one migratory species in different environments. It is important to consider scenarios for changing the biodiversity of communities in models with variously specified impacts. To describe scenarios of confrontation between invaders and the biotic environment, the paper proposes equations with a perturbed delayed action that simulates adaptation. A description of the situation of long-term fluctuations in abundance with the final state of a critical minimum after the primary outbreak of an overly aggressive invasive species is obtained.

Keywords: Modeling of invasion processes, stochastic perturbation, equations with delay.

References

1. Solovieva T.N., Perevaryukha A.Yu. Dynamic model of degradation of stocks of sturgeons with a complex intrapopulation structure, *Information and control systems*, 2016. Vol. 4. P. 60-67 (in Russian).

УДК 519.63

О применении явно-итерационной схемы ЛИ-М к моделированию дозвуковых реагирующих газовых потоков*

Пескова Е.Е., Язовцева О.С., Макарова Е.Ю.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В работе разработан алгоритм на основе явно-итерационной схемы ЛИ-М интегрирования диссипативных членов для математической модели дозвукового течения многокомпонентных реагирующих газовых потоков, в основу которой положены уравнения Навье-Стокса. Модель построена с учетом взаимной диффузии газов, их вязкости, теплопроводности и химических реакций. Вычислительный алгоритм в силу высокой жесткости системы базируется на принципе расщепления по физическим процессам: различные методы решения использованы для интегрирования уравнений химической кинетики, конвективных потоков, диссипативных членов и давления. Сравнительный анализ показал эффективность разработанного алгоритма по сравнению с алгоритмом, основанным на интегро-интерполяционном методе, в котором диссипативные члены рассчитываются по схеме с центральными разностями.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнения Навье-Стокса, расщепление по физическим процессам, чебышёвская явно-итерационная схема, конверсия метана.

В настоящее время актуальным вопросом является разработка кодов для исследования промышленных химических процессов. Существующие комплексы громоздки и дорогостоящи, кроме того, в настоящей геополитической ситуации использование иностранного программного обеспечения зачастую невозможно. Разрабатываемые коды должны отвечать определенным требованиям: для проведения серийных расчетов результат должен быть получен за короткое время, для практической значимости вычисления должны отвечать заданной точности, при этом программа должна удовлетворять ограничениям по объему и занимаемой памяти. Для выполнения требований в основу программы должен быть положен эффективный вычислительный алгоритм. Известной проблемой численного моделирования химических процессов является потребность в учёте разномасштабных явлений в рамках одной модели, что приводит к необходимости решения жёстких систем уравнений. Быстродействие алгоритма может быть достигнуто за счет использования специализированных методов расчета для каждой части математической модели, отвечающей различным физическим процессам. Подобный подход носит название «принцип расщепления по физическим процессам» [1].

Настоящая работа посвящена построению вычислительного алгоритма для моделирования многокомпонентных дозвуковых газодинамических потоков с учётом диффузии, вязкости, теплопроводности и химических реакций. Вычислительный алгоритм построен на основе расщепления по физическим процессам: различные методы решения использованы для интегрирования уравнений химической кинетики,

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00202, <https://rscf.ru/project/23-21-00202/>.

конвективных потоков, диссипативных членов и давления. В качестве объекта исследования выбран процесс высокотемпературной конверсии метана с радикальноцепными реакциями и учетом энергопоглощения вследствие эндотермического характера реакций [2].

Для интегрирования уравнений химической кинетики применен трехстадийный метод Рунге-Кутты пятого порядка точности, известный также как метод РАДО [3]. Этот метод хорошо зарекомендовал себя для решения систем уравнений, описывающих детализированные химические превращения [3]. Расчет процессов конвективного переноса проведен с использованием потоков Русанова [5].

Наибольшие затруднения с точки зрения вычислительного алгоритма вызывают расчеты, связанные с диссипативными процессами. Диссипативные члены и динамика давления рассчитаны с использованием метода локальных итераций, основанного на явном итерационном процессе с параметрами, отвечающими корням многочленов Чебышева [6]. Вычисления проводятся в три этапа: отдельно вычисляются диффузионные потоки, вязкость и процессы теплопроводности. На последнем этапе осуществлен перерасчет вектора скорости, связанный с динамической составляющей давления.

Для оценки эффективности алгоритма было проведено сравнение нового разработанного алгоритма с построенным на основе интегро-интерполяционного метода, в котором диссипативные потоки вычисляются по схеме с центральными разностями [7]. Сравнительный анализ показал значительное ускорение расчетов. Это связано со снятием ограничения на шаг интегрирования диссипативных процессов.

Помимо очевидного преимущества во времени расчета предлагаемый подход обладает еще одним достоинством – в силу использования явной схемы алгоритм достаточно просто адаптировать под распределенные вычисления, что несомненно будет востребовано при решении трехмерных задач.

Полученный результат свидетельствует о правомерности применения предложенного подхода для задач моделирования дозвуковых реагирующих газовых потоков, в том числе и с учетом дополнительных источников энергии, например, лазерного излучения.

Литература

1. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
2. Лашина Е.А., Пескова Е.Е., Снытников В.Н. Математическое моделирование нестационарной температурной конверсии метан-этановых смесей в широком диапазоне температур // Химия в интересах устойчивого развития, 2023. № 3.
3. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
4. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol. 11. No.3. 669 p. DOI: 10.3390/math11030669.
5. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961. Т.1. № 2. С. 267-279.

6. Жуков В.Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Математическое моделирование, 2010. Т.22. № 10. С. 127-158.
7. Жалнин Р.В., Пескова Е.Е., Стадниченко О.А., Тишкин В.Ф. Моделирование течения многокомпонентного реагирующего газа с использованием алгоритмов высокого порядка точности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2017. Т. 27. № 1. С. 608-617.

MSC 65L20

On the application of the explicit-iterative LI-M scheme to the modeling of subsonic reacting gas flows

E.E. Peskova, O.S. Yazovtseva, E.Yu. Makarova

National Research Mordovia State University

Abstract: The paper develops an algorithm based on the explicit iterative scheme of the Li-M integration of dissipative terms for a mathematical model of the subsonic multicomponent reacting gas flow. It is based on the Navier-Stokes equations. The model is constructed taking into account the mutual diffusion of gases, their viscosity, thermal conductivity and chemical reactions. The computational algorithm is based on the principle of splitting by physical processes due to the high stiffness of the system: various solution methods are used to integrate the equations of chemical kinetics, convective flows, dissipative terms and pressure. Comparative analysis has shown the effectiveness of the developed algorithm in comparison with the algorithm based on the integro-interpolation method, in which the dissipative terms are calculated according to the scheme with central differences.

Keywords: mathematical modeling, Navier-Stokes equations, splitting by physical processes, Chebyshev explicit-iterative scheme, methane conversion.

References

1. Marchuk G.I. Splitting methods. M.: Nauka, 1988.
2. Lashina E.A., Peskova E.E., Snytnikov V.N. Mathematical modeling of unsteady temperature conversion of methane-ethane mixtures in a wide temperature range // Chemistry in the interests of sustainable development. 2023. No 3.
3. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
4. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol. 11. No. 3. 669 p. DOI: 10.3390/math11030669.
5. Rusanov V.V. Calculation of the interaction of unsteady shock waves with obstacles // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1961. Vol. 1. No. 2. P. 267-279.
6. Zhukov V.T. On explicit numerical integration methods for parabolic equations // Mathematical modeling, 2010. Vol. 22. No.10. C. 127-158.
7. Zhalnin R.V., Peskova E.E., Stadnichenko O.A., Tishkin V.F. Modeling of multicomponent reacting gas flow using high-order accuracy algorithms // Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science, 2017. Vol.27. No.1. C. 608-617.

УДК 519.635.1

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины

Попов В.Н., Гермидер О.В.

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

Аннотация: Предложена и реализована новая модификация метода коллокации для построения решения неоднородного бигармонического уравнения в рамках моделирования напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины. Предложенная модификация основывается на полиномиальной аппроксимации Чебышева смешанной частной производной искомой функции. В качестве базисных функций использованы многочлены Чебышева первого рода. Предложенный метод применен для моделирования изгиба упругой изотропной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки. Проведен анализ результатов, полученных методом коллокации с применением интегрального подхода и в его отсутствие при использовании нулей многочленов Чебышева первого рода в качестве точек коллокации.

Ключевые слова: многочлены Чебышева первого рода, метод коллокации, изотропная пластина, напряженно-деформированное состояние

1. Введение

Многие конструктивные элементы представляют собой пластины различной формы и структуры с переменными геометрическими и физико-механическими параметрами [1]. При описании напряженно-деформированного состояния этих пластин возникает необходимость решения неоднородного бигармонического уравнения [1–8]. Построение решения этого уравнения вызывает ряд трудностей, оказывающих существенное влияние на обусловленность краевых задач в механике деформируемого твердого тела и теории упругости и связанных, в частности, порядком уравнения в частных производных [8]. При этом достижение требуемой степени детализации области интегрирования предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразрезанной матрицей [7]. Одним из перспективных подходов к решению проблемы является развитие методов полиномиальной аппроксимации.

Представленная работа посвящена построению решения неоднородного бигармонического уравнения с использованием системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода в рамках моделирования напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины. Выбор в качестве базисных функций многочленов Чебышева обусловлен тем, что такое приближение минимизирует количество членов усеченного ряда, необходимых для аппроксимации решения [9, 10]. В представленной работе предложена и реализована новая модификация метода коллокации на основе аппроксимации смешанной производной искомой функции с использованием многочленов Чебышева и выбора в качестве точек коллокации нулей этих многочленов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу моделирования напряженно-деформированного состояния изотропной пластины, защемленной по краям $x = 0$, $x = d_1$ и $y = 0$ и свободной на крае $y = d_2$, которая находится под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$. Предполагаем, что пластина является тонкой. Для описания изгиба ее срединной поверхности $\omega(x, y)$ используем бигармоническое уравнение Софи Жермен–Лагранжа, которое запишем в виде [11]:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона изотропного материала пластины.

3. Построение решения краевой задачи

Для построения решения краевой задачи представляем смешанную производную функции $\omega(x, y)$ в виде усеченного ряда по полиномам Чебышева первого рода [9]

$$\{T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i), j_i = \overline{0, n_i}\} \quad (2)$$

по каждой введенной новой переменной $x_i \in [-1, 1]$ ($n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$):

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1, \quad x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1. \quad (3)$$

Записываем уравнение (1) в новых переменных x_1 и x_2 . Последовательно интегрируя по переменным x_1 и x_2 конечную сумму ряда по полиномам Чебышева смешанной производной функции $\omega(x, y)$, восстанавливаем искомую функцию $\omega(x, y)$ методом коллокации с использованием нулей многочленов Чебышева первого рода $T_{n_i+1}(x_i)$ [9] в качестве точек коллокации

$$x_{i,j_i} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2j_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Уравнения коллокации при этом представляем в матричной форме. Для приведения матрицы системы линейных алгебраических уравнений к разреженной и уменьшения числа вычислений при ее заполнении применяем свойство конечных сумм многочленов Чебышева в точках (4) [9]:

$$\sum_{j_i=0}^{n_i} T_{l_i}(x_{i,j_i}) T_{q_i}(x_{i,j_i}) = \gamma_{l_i} \delta_{l_i, q_i}, \quad i = 1, 2,$$

где δ_{l_i, q_i} – символ Кронекера, коэффициент $\gamma_{l_i} = \frac{1}{2}$, если $l_i = 0$, иначе $\gamma_{l_i} = 1$. При проведении вычислений используем значения физических параметров из [1, 2]: $d_1 = d_2 = 10$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$.

4. Заключение

В работе получено решение задачи моделирования напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины под действием заданной поперечной нагрузки для случая заземления краев этой пластины и свободного края методом коллокации в матричной нотации с использованием предложенного и реализованного интегрального подхода. Для верификации полученных результатов проведен ряд вычислительных экспериментов при различных видах закрепления, способах нагружения и относительных размерах изотропной пластины.

Литература

1. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычисл. технологии. 2013. Т.18. № 6. С. 31-43.
2. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. H-, p-, and HP-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications // Comput. Math. Math. Phys. 2022. V.62. No.4. P. 517-537.
3. Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2022. V.143. P. 687-699.
4. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Appl. Math. Model. 2015. V.39. No.9. P. 2554-2569.
5. Ye X., Zhang Sh. A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Results in Applied Mathematics. 2022. V.15. 100318.
6. Карчевский А.Л. Вычисление напряжений в угольном пласте с учетом диффузии газа // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т.19. № 4. С. 31-43.
7. Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2013. Т.1. С. 52-62.
8. Шапеев В.П., Брындин Л.С., Беляев В.А. Нр-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т.26. № 3. С. 556-572.
9. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press. 2003.
10. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Applied Mathematics and Computation. 2018. V.322. P. 55-65.
11. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book Comp. 1959.

MSC 65D40, 31A30

Mathematical modeling of the stress-strain state of a thin isotropic plate

V.N. Popov, O.V. Germider

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov

Abstract: A new modification of the collocation method is proposed and implemented for constructing a solution to an inhomogeneous biharmonic equation in the framework of modeling the stress-strain state of a thin isotropic plate. The proposed modification is based on the Chebyshev polynomial approximation of the mixed partial derivative of the desired function. Chebyshev polynomials of the first kind are used as basis functions. The proposed method is used to simulate the bending of an elastic isotropic plate under the action of a transverse load. An analysis is made of the results obtained by the collocation method using the integral approach and in its absence when using the zeros of Chebyshev polynomials of the first kind as collocation points.

Keywords: Chebyshev polynomials of the first kind, collocation method, isotropic plate, stress-strain state.

References

1. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. The method of collocations and least residuals in applications to problems in the mechanics of isotropic plates // Vychisl. technologies. 2013. V.18. No.6. P. 31-43.
2. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. H-, p-, and HP-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications // Comput. Math. Math. Phys. 2022. V.62. No.4. P. 517-537.
3. Mai-Duy N., Strumin D., Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2022. V.143. P. 687-699.
4. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Appl. Math. Model. 2015. V.39. No.9. P. 2554-2569.
5. Ye X., Zhang Sh. A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Results in Applied Mathematics. 2022. V.15. 100318.
6. Karchevskiy A.L. Vychislenie napryazheniy v ugolnom plaste s uchetom diffuzii gaza // Sib. zhurn. industr. matematiki. 2016. T.19. No.4. P. 31-43.
7. Ryazhskih V.I., Slyusarev M.I., Popov M.I. Chislennoe integrirovaniye bigarmonicheskogo uravneniya v kvadratnoy oblasti // Vestn. S.- Peterburg. un-ta. Ser. 10. Prikl. matem. Inform. Proc. upr. 2013. T. 1. P. 52-62.
8. Shapeev V.P., Bryndin L.S., Belyaev V.A. Hp-Variant metoda kollokacii i naimenshih kvadratov s integralnymi kollokაციями resheniya bigarmonicheskogo

uravneniya // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.- mat. nauki. 2022. T.26. No.3. P. 556-572.

9. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press. 2003.
10. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Applied Mathematics and Computation. 2018. V.322. P. 55-65.
11. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book Comp. 1959.

УДК 517.956.4

Двусторонние оценки решения одномерного уравнения теплопроводности

Рассадин А.Э.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Аннотация: В статье для решения задачи Коши на прямой для линейного уравнения диффузии-теплопроводности с начальными условиями специального вида получены оценки решения снизу и сверху. С помощью вычислительного эксперимента показано, что по прошествии некоторого промежутка времени в качестве приближённого решения этой задачи можно брать любую из этих оценок.

Ключевые слова: интеграл Пуассона, прямое и обратное неравенства Гёльдера, функция ошибок, компактный носитель, функция Хевисайда, относительная погрешность.

1. Введение

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа на прямой:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = U(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

находит многочисленные применения в задачах тепломассообмена [1], теории случайных процессов [2] и т. д.

Как хорошо известно, для ограниченного начального условия $U(x)$ точное решение $u(x, t)$ задачи Коши (1) выражается интегралом Пуассона [1]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] U(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Очевидно, что интеграл (2) вычисляется точно далеко не для каждой функции $U(x)$. Однако часто возникает необходимость знать детали пространственно-временного поведения функции $u(x, t)$. Ясно, что для того, чтобы получить эту информацию, кроме условия ограниченности функции $U(x)$ нужно наложить на неё некие дополнительные условия. В данной работе этими условиями являются требования неотрицательности и финитности функции $U(x)$.

Далее статья имеет следующую структуру: в разделе 2 выведены двусторонние оценки для точного решения (2). Раздел 3 посвящён описанию вычислительного эксперимента, иллюстрирующего полученные в разделе 2 соотношения. В Заключение суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

2. Вывод основных соотношений

Пусть начальное условие в задаче Коши (1) имеет следующий вид:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n c_i U_i(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где функции $U_i(x) \geq 0$ и обладают компактным носителем: $\text{supp } U_i = [a_i, b_i]$, причём $b_i \leq a_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$, а постоянные $c_i > 0$.

Подставив сумму (3) в интеграл Пуассона (2), получим:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x, t), \quad (4)$$

где введены новые неизвестные функции:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] U_i(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Далее, выберем $2n$ вещественных чисел p_i^\pm так, чтобы для каждого $i = \overline{1, n}$ выполнялись неравенства $0 < p_i^- < 1 < p_i^+$, и, кроме того, чтобы сошлись все $2n$ интегралов по отрезкам $[a_i, b_i]$ в величинах:

$$N_i^\pm = \left(\int_{a_i}^{b_i} U_i^{q_i^\pm}(x) dx \right)^{1/q_i^\pm}, \quad q_i^\pm = \frac{p_i^\pm}{p_i^\pm - 1}. \quad (6)$$

Если все величины (6) конечны, то каждый из интегралов (5) может быть оценен и сверху — с помощью прямого интегрального неравенства Гёльдера, и снизу — с помощью обратного интегрального неравенства Гёльдера [3] — следующим образом:

$$N_i^- v_i^-(x, t) \leq u_i(x, t) \leq N_i^+ v_i^+(x, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где

$$v_i^\pm(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(\int_{a_i}^{b_i} \exp\left[-p_i^\pm \frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi \right)^{1/p_i^\pm}. \quad (8)$$

Легко видеть, что с помощью известной функции вероятности ошибок функции (8) могут быть выражены следующим образом:

$$v_i^\pm(x, t) = \frac{1}{2} (\pi t)^{-\frac{1}{2q_i^\pm}} (p_i^\pm)^{-\frac{1}{2p_i^\pm}} \left(\text{erf}\left[\frac{\sqrt{p_i^\pm}(x-a_i)}{2\sqrt{t}}\right] - \text{erf}\left[\frac{\sqrt{p_i^\pm}(x-b_i)}{2\sqrt{t}}\right] \right)^{1/p_i^\pm}. \quad (9)$$

Наконец, умножая каждое из неравенств (7) на константы c_i из формулы (3) и суммируя их по i , получим двусторонние оценки для функции (4):

$$u^-(x, t) \leq u(x, t) \leq u^+(x, t), \quad (10)$$

где

$$u^\pm(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i N_i^\pm v_i^\pm(x, t). \quad (11)$$

3. Вычислительный эксперимент

Оценки (9)-(11) даны для различных моментов времени $t > 0$, поэтому для того, чтобы понять, как ведёт себя неравенство (10) с течением времени, необходимо провести вычислительный эксперимент.

Положим $n = 2$, $a_1 = -2$, $b_1 = -1$, $a_2 = -0.5$, $b_2 = 3$, $U_i(x) = \theta(x - a_i) - \theta(x - b_i)$ ($i = 1, 2$; $\theta(x)$ – функция Хевисайда), $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, и сформируем по формуле (3) по этим данным начальное условие к задаче Коши (1). График этой функции приведён на рис. 1.

Далее, выберем $p_1^+ = p_2^+ = 2$ и $p_1^- = p_2^- = 0.5$. Графики оценок решения задачи Коши (1), построенные по формулам (11), приведены на рис. 2-5.

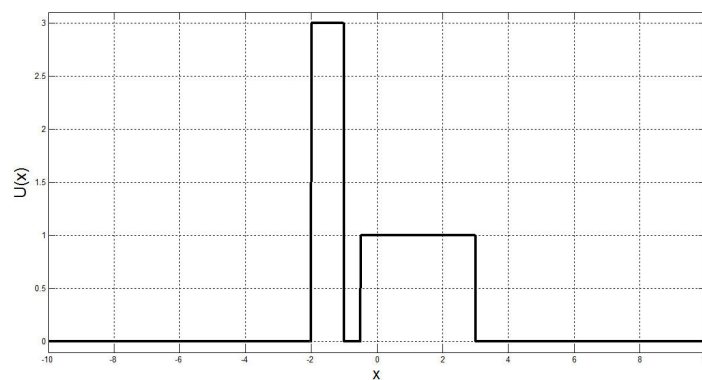


Рис. 1. График начального условия

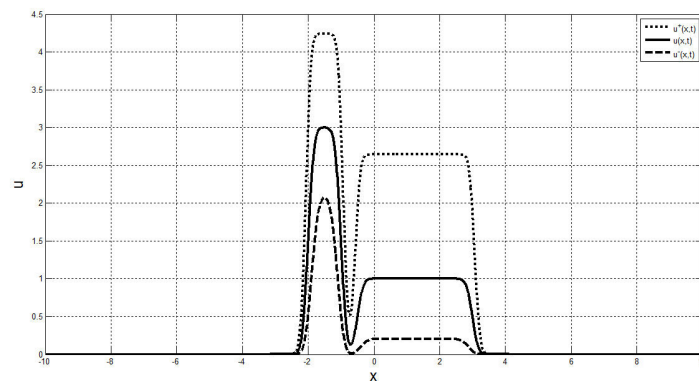


Рис. 2. Графики оценок решения при $t = 0.01$

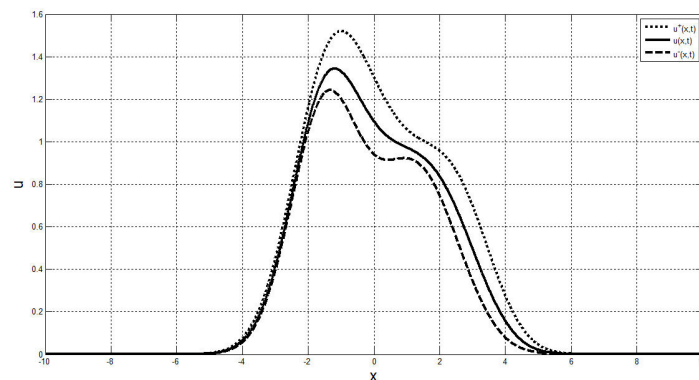


Рис. 3. Графики оценок решения при $t = 0.5$

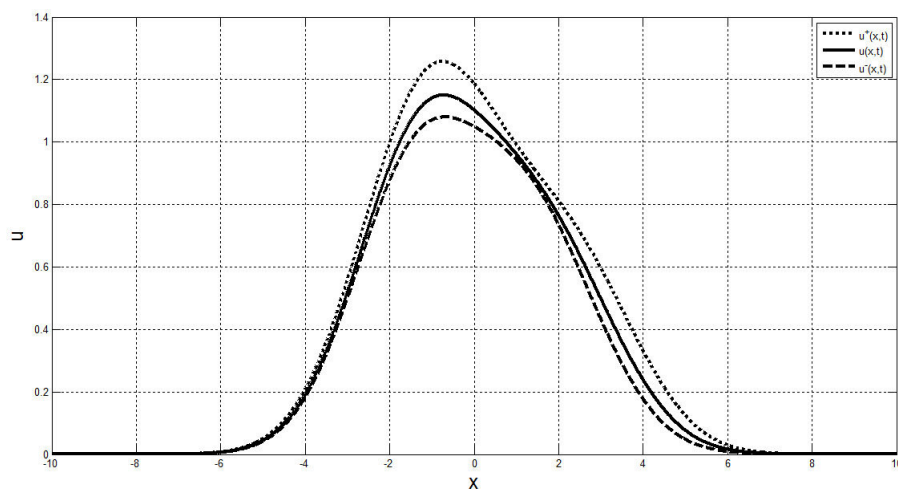


Рис. 4. Графики оценок решения при $t = 1.0$

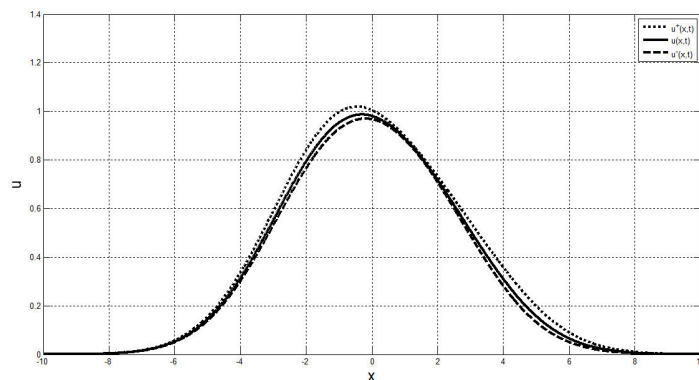


Рис. 5. Графики оценок решения при $t = 2.0$

На рис. 2-5 сплошной линией показано точное решение задачи Коши (1), соответствующее начальному условию, график которого приведён на рис. 1. Это точное решение равно:

$$u(x, t) = \frac{3}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+2}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+1/2}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-4}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (12)$$

Из рис. 2-5 видно, что с течением времени верхняя и нижняя оценки точного решения (12) неограниченно сближаются друг с другом, следовательно, при заданной относительной погрешности приближения δ существует такое значение времени t_* , что при $t > t_*$:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{u^+(x, t) - u^-(x, t)}{u^-(x, t)} < \delta. \quad (13)$$

Другими словами, формула (13) означает, что при $t > t_*$ вместо точного решения (12) можно пользоваться любой из его оценок (11).

4. Заключение

Для начального условия вида (3) в работе получены двусторонние оценки (11) точного решения (2) задачи Коши (1). Для построения этих оценок существенны величины интегрального характера (6) и значения координат левых a_i и правых b_i концов носителей функций $U_i(x)$, но не вся функция (3) в целом.

В результате вычислительного эксперимента выяснено, что при возрастании времени эти оценки стремятся друг к другу в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, значит, на больших временах для достижения инженерной точности вместо интеграла Пуассона (2) можно брать любую из оценок (11).

Перспективой развития данной работы является создание вычислительного комплекса в системе компьютерной математики MATLAB с пользовательским интерфейсом, написанным в среде GUIDE [4], на основе развитой выше теории. Кроме того, представляет значительный интерес минимизация функции относительной погрешности приближения (13) по параметрам p_i^\pm ($i = 1, 2, \dots, n$) в области применимости прямого и обратного неравенств Гёльдера при фиксированном значении времени $t > 0$ как задача многомерной оптимизации (см. [4] и ссылки там).

Двусторонние оценки (11) могут быть применены к оценке решений задач Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, сводящихся к задаче Коши (1) заменой переменных, реализующейся строго монотонной функцией.

Например, рост приведённой высоты поверхности твёрдого тела с цилиндрической образующей $h(x, t)$ описывается одномерным уравнением Кардара-Паризи-Жанга (см. [5] и ссылки там):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (14)$$

Заменой в виде монотонно возрастающей функции $h = 2 \ln(1 + u)$ уравнение (14) сводится к одномерному уравнению диффузии-теплопроводности (1).

Наконец, полезно распространить полученные результаты на многомерное уравнение теплопроводности. Однако в этом случае аналоги функций (9) будут гораздо более разнообразными из-за того, что компактные носители функций U_i будут замкнутыми областями в пространствах \mathbb{R}^m с $m \geq 2$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975. 320 с.
3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
4. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 6.x: программирование численных методов. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 672 с.
5. Rassadin A.E., Sazanova T.S., Stepanov A.V., Fomin L.A. Some notes about scanning probe microscopy, nanoengineering and methods of quantum mechanics // IOP Conference Series: Material Science and Engineering (MSE). 2018. Vol.443.

Article 012027. URL:

<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/443/1/012027>

MSC 35K05

Double-sided bounds for solution of one-dimensional heat equation

A.E. Rassadin

HSE University

Abstract: In the article, to solve the Cauchy problem on a straight line for a linear diffusion-thermal conductivity equation with initial conditions of a special type, estimates of this solution are obtained from below and from above. Using a numerical test, it is shown that after a certain period of time, any of these estimates can be taken as an approximate solution of this problem.

Keywords: Poisson integral, direct and reverse Hölder inequalities, error function, compact support, Heaviside step function, relative error.

References

1. Tihonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics, Nauka Publ., Moscow, 1966. 724 p.
2. Ventsel A.D. Course of theory of random processes, Nauka Publ., Moscow, 1975. 320 p.
3. Sobolev S.L. Some applications of functional analysis in mathematical physics, Nauka Publ., Moscow, 1988. 336 p.
4. Ketkov Yu.L., Ketkov A.Yu., Shultz M.M. MATLAB 6.x: programming numerical methods, BHV-Peterburg, Saint-Petersburg, 2004. 672 p.
5. Rassadin A.E., Sazanova T.S., Stepanov A.V., Fomin L.A. Some notes about scanning probe microscopy, nanoengineering and methods of quantum mechanics, *IOP Conference Series: Material Science and Engineering (MSE)*, 2018. Vol.443. Article 012027.
URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/443/1/012027>

УДК 517.95

Линейные обратные задачи для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями

Садыхзаде Р.Ш., Мегралиев Я.Т.

Бакинский Государственный Университет

Аннотация: В работе исследуется обратная краевая задача с неизвестной правой частью, зависящей от времени, для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями. Решая исходную обратную краевую задачу осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной задаче. При помощи принципа сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Далее переход к исходной обратной задаче позволяет сделать вывод о ее разрешимости на основе доказанной разрешимости вспомогательной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, псевдогиперболическое уравнение третьего порядка, метод Фурье, классическое решение.

1. Введение

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения надо определить также коэффициенты самого уравнения, либо же его правую часть, в математике называют обратными задачами. Если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача называется линейной; если же неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной.

В настоящее время обратные задачи активно развиваются и являются перспективным разделом современной математики. В последнее время они широко применяются в различных областях науки. Обратные задачи для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим работы А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2, 3], А.М. Денисова [4], М.И. Иванчова [5] и их последователей.

Псевдогиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа при распространении начальных уплотнений в вязком газе [6], в теории солитонов [7] при описании процесса движения электронов в системе «сверхпроводник-диэлектрик с туннельной проводимостью-сверхпроводник». Разрешимость обратных задач в различных постановках с теми или иными условиями переопределения для псевдогиперболических уравнений была предметом исследования в работах [8-13].

2. Постановка задачи и сведение её к эквивалентной задаче.

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x, t) - \alpha u_{txx}(x, t) - \beta u_{xx}(x, t) = a(t)g(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

периодическим условием

$$u(0, t) = u(1, t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

и дополнительным условием

$$u(x_0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

где $x_0 \in (0, 1), \alpha > 0, \beta > 0$ – заданные числа, $f(x, t), g(x, t), \phi(x), \psi(x), h(t)$ – заданные функции, а $u(x, t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Введем следующее обозначение $\tilde{C}^2(D_T) = \{u(x, t) : u(x, t) \in C^2(D_T), u_{txx}(x, t) \in C(D_T)\}$.

Определение 1. Пару функций $\{u(x, t), a(t)\}$, $u(x, t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$, $a(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющих уравнению (1) в D_T , условиям (2) в $[0, 1]$, условиям (3)-(5) в $[0, T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5).

Теорема 1. Пусть $f(x, t) \in C(\bar{D}_T)$, $\int_0^1 f(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$), $g(x, t) \in C(\bar{D}_T)$, $\int_0^1 g(x, t) dx = 0$, ($0 \leq t \leq T$), $\phi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$, $h(t) \in C^2[0, T]$, $g(x_0, t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$), и выполняются условия согласования:

$$\int_0^1 \phi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad (6)$$

$$\phi(x_0) = h(0), \quad \psi(x_0) = h'(0), \quad (7)$$

Таким образом задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x, t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$ и $a(t) \in C[0, T]$, из соотношений (1)-(3) и

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (8)$$

$$h''(t) - \alpha u_{txx}(x_0, t) - \beta u_{xx}(x_0, t) = a(t)g(x_0, t) + f(x_0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (9)$$

3. О разрешимости обратной краевой задачи.

Очевидно, что система функций

$$1, \quad \cos \lambda_1 x, \quad \sin \lambda_1 x, \quad \dots, \quad \cos \lambda_k x, \quad \sin \lambda_k x, \quad \dots \quad (10)$$

образует базис в $L_2(0, 1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ ($k = 0, 1, \dots$). Из этого следует, что для каждого решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (8), (9) первая компонента $u(x, t)$ имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k) \quad (11)$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t; a) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (12)$$

$$u''_{ik}(t) + \alpha \lambda_k^2 u'_{ik}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{ik}(t) = F_{ik}(t; a) \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (13)$$

$$u_{10}(0) = \phi_{10}, \quad u'_{10}(0) = \psi_{10}, \quad (14)$$

$$u_{ik}(0) = \phi_{ik}, \quad u'_{ik}(0) = \psi_{ik} \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots), \quad (15)$$

где

$$F_{1k}(t, u) = a(t)g_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad (k = 0, 1, \dots), \quad f_{10}(t) = \int_0^1 f(x, t) dx,$$

$$g_{10}(t) = \int_0^1 g(x, t) dx, \quad f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad \phi_{10} = \int_0^1 \phi(x) dx, \quad \psi_{10} = 2 \int_0^1 \psi(x) dx,$$

$$\phi_{1k} = 2 \int_0^1 \phi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_{1k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$F_{2k}(t, a) = a(t)g_{2k}(t) + f_{2k}(t), \quad f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin \lambda_k x dx,$$

$$g_{2k}(t) = 2 \int_0^1 g(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\phi_{2k} = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \psi_{2k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Теперь предположим, что $\frac{\alpha^2 \pi^2}{8} - \beta > 0$.

Решая задачу (12)-(13), находим:

$$u_{10}(t) = \phi_{10} + t \psi_{10} + \int_0^t (t - \tau) F_{10}(\tau; a) d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (16)$$

$$u_{ik}(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t} - \mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{ik} + (e^{\mu_{2k}t} - e^{\mu_{1k}t})\psi_{ik} + \int_0^t F_{ik}(\tau; a)(e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau \right] \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

где $\mu_{ik} = -\frac{\alpha\lambda_k^2}{2} + (-1)^i\lambda_k\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k^2}{4} - \beta}$ ($i = 1, 2$), $\gamma_k = \mu_{2k} - \mu_{1k} = 2\lambda_k\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k^2}{4} - \beta}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Подставляя выражения из (16), (17) в (11), для определения компоненты $u(x, t)$ решения задачи (1)-(3), (8), (9) получаем:

$$u(x, t) = \phi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t - \tau)F_{10}(\tau; a)d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t} - \mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{1k} + (e^{\mu_{2k}t} - e^{\mu_{1k}t})\psi_{1k} + \int_0^t F_{1k}(\tau; a)(e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau \right] \right\} \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t} - \mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{2k} + (e^{\mu_{2k}t} - e^{\mu_{1k}t})\psi_{2k} + \int_0^t F_{2k}(\tau; a)(e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau \right] \right\} \sin \lambda_k x. \quad (18)$$

Из (9), с учетом (17), имеем:

$$a(t) = [g(x_0, t)]^{-1} \left\{ h''(t) - f(x_0, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k}\mu_{2k}(\mu_{1k}e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{1k} + (\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}t})\psi_{1k} + \int_0^t F_{2k}(\tau; a)(\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau \right] \cos \lambda_k x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k}\mu_{2k}(\mu_{1k}e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{2k} + (\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}t})\psi_{2k} + \int_0^t F_{2k}(\tau; a)(\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau \right] \sin \lambda_k x_0. \right\} \quad (19)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (8), (9) сведено к решению системы (18), (19) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Допустим, что данные задачи (1)-(3), (8), (9) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\alpha > 0, \beta > 0, \frac{\alpha^2}{8} - \beta > 0$.
2. $\phi(x) \in C^2[0, 1], \phi'''(x) \in L_2(0, 1), \phi(0) = \phi(1), \phi'(0) = \phi'(1), \phi''(0) = \phi''(1)$.
3. $\psi(x) \in C^2[0, 1], \psi'''(x) \in L_2(0, 1), \psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(0) = \psi''(1)$.
4. $f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t) \in C(D_T), f_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T), f(0, t) = f(1, t), f_x(0, t) = f_x(1, t), f_{xx}(0, t) = f_{xx}(1, t) (0 \leq t \leq T)$.
5. $g(x, t), g_x(x, t), g_{xx}(x, t) \in C(D_T), g_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T), g(0, t) = g(1, t), g_x(0, t) = g_x(1, t), g_{xx}(0, t) = g_{xx}(1, t) (0 \leq t \leq T)$.
6. $h(t) \in C^2[0, T], g(x_0, t) \neq 0 (0 \leq t \leq T)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1-6. Тогда задача (1)-(3), (8), (9) имеет единственное решение.

Из теоремы 2 вытекает однозначная разрешимость задачи (1)-(5) в силу теоремы 1.

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2,

$$\int_0^1 f(x, t) dx = 0, \int_0^1 g(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

и выполнены условия согласования (6), (7). Тогда задача (1)-(5) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. Тихонов А.И. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195-198.
2. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 520-521.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М: Наука. 1980. 288 с.
4. Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М: МГУ, 1994. 206 с.
6. Войт С.С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе // Учёные записки МГУ. Сер.: Механика, 1954. Т. 4, вып. 172. С. 125-142.
7. Лонгрен К., Скотт Э. Солитоны в действии. М.: Мир, 1981.
8. Кожанов А.И., Сафиуллова Р.Р. Об одном классе псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом // Челяб. физ.-матем. журн., 2022. Т. 7, выпуск 2. С. 164-180
9. Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523-548.

10. Асанов А.Р. Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Бишкек, 1994.
11. Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с дополнительным интегральным условием // Изв. вузов. Поволж. регион. Сер. Физ.-мат. науки, 2013. № 1. С. 19–33.
12. Elvin I. Azizbayova , Yashar T. Mehraliyev. Inverse Boundary-Value Problem for the Equation of Longitudinal Wave Propagation with Non-self-adjoint Boundary Conditions // Filomat, 2019. V. 33, N 16. DOI: 10.2298/FIL1916259A.
13. Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523–548.

MSC 34D20

Linear inverse problems for third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions

R.Sh. Sadikhzada, Y.T. Mehraliyev

Baku State University

Abstract: In this paper we study an inverse boundary value problem with an unknown time-depended right hand side for a third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions. When solving the original inverse boundary value problem, the transition from the original inverse problem to some auxiliary inverse problem is carried out. The existence and uniqueness of a solution to an auxiliary problem are proved with the help of contracted mappings. Then the transition to the original inverse problem is again made, as a result, a conclusion is made about the solvability of the original inverse problem.

Keywords: inverse boundary value problem, third-order hyperbolic equation, Fourier method, classical solution.

References

1. A.N. Tikhonov. On stability of inverse problems. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1943. V. 39. P. 195–198.
2. M.M. Lavrent'ev. On one inverse problem for the wave equation // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1964.V. 157. No. 3. P. 520-521.
3. M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, S.T. Shishatsky, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. M.: Nauka, 1980.
4. V.K.Ivanov, V.V.Vasin, V.P.Tanina. Theory of linear ill-posed problems and its applications. M.: Nauka, 1978. 206 p.
5. A.M. Denisov, Introduction to Theory of Inverse Problems, M: MSU, 1994. 206 p.
6. S.C. Voight. Propagation of initial densifications in a viscous gas // Uchenye zapiski MGU, 1954. V. 4, N 125–142.
7. K. Longren and E.Scott. Solitons in Action. M.: Mir, 1981.
8. A.I. Kozhanov and R.R. Safiullova. On a class of pseudo-hyperbolic equations with an unknown coefficient. Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., 7:164–180, 2022.
9. A. Lorenzi, E. Paparoni Identification problems for pseudo-hyperbolic integro-differential operator equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523–548.
10. A.R. Asanov. Inverse Problems for Pseudo-hyperbolic Equations. PhD thesis, Institute of Mathematics of Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, 1994.

11. Y.T. Megraliev. On the solvability of an inverse boundary value problem for a fourth order pseudo-hyperbolic equation with an additional integral condition // News of Higher Educational Institutions Volga Region, 2013. P. 19–33.
12. Elvin I. Azizbayova , Yashar T. Mehraliyev. Inverse Boundary-Value Problem for the Equation of Longitudinal Wave Propagation with Non-self-adjoint Boundary Conditions // Filomat, 2019. V. 3, 16 (2019), 5259–5271
<https://doi.org/10.2298/FIL1916259A>
13. A. Lorenzi, E. Paparoni Identification problems for pseudo-hyperbolic integro-differential operator equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523–548.

УДК 517.93

Структурно устойчивые линейные расширения квазипериодических потоков на торе

Сахаров А.Н.

Нижегородский государственный аграрнотехнологический университет

Аннотация: В статье рассматривается задача о геометрии областей устойчивости (неустойчивости) линейных канонических систем 2-го порядка с квазипериодическими коэффициентами, зависящими от параметров. Любая такая система порождает поток, который принято называть линейным расширением квазипериодического потока на торе. Основой для решения этой задачи является переход к системе на индуцируемом проективном расслоении. Если база тор \mathbb{T}^2 , то проективное расслоение трехмерный тор $\mathbb{T}^2 \times S^1$. В периодическом случае такой переход приводит к системе на торе, не имеющей особых точек и ячеек Роба, что позволяет использовать классическую теорию Пуанкаре-Данжуа. При изменении параметров области устойчивости чередуются с областями неустойчивости, которым соответствуют целочисленные значения числа вращения. Границы этих областей представляют собой кривые в пространстве параметров, гладкость которых зависит от гладкости изучаемой системы. В квазипериодическом случае также существует характеристика, аналогичная числу вращения А. Пуанкаре, – число вращения слоя. Однако, полной аналогии с периодическим случаем здесь получить невозможно, о чем свидетельствует, например, существование неправильных по Ляпунову канонических систем. Показывается, что структурно устойчивым линейным расширениям соответствуют проективные потоки, имеющие два инвариантных нормально гиперболических тора (устойчивый и неустойчивый). Кроме того, в системах, зависящих от параметра, интервалы постоянства числа вращения слоя соответствуют структурно устойчивым линейным расширениям.

Ключевые слова: линейное расширение, показатели Ляпунова, проективный поток, число вращения слоя, нормально гиперболическое инвариантное многообразие.

1. Введение

Система

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad (1)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – угловые координаты на торе \mathbb{T}^2 , $x \in \mathbb{R}^2$, а матрица $A(\varphi)$ является функцией на торе, определяет поток на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, который называется линейным расширением потока на торе. Будем считать, что след матрицы $A(\varphi)$ равен нулю, т.е. она представима в виде

$$A(\varphi) = a(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Если компоненты вектора $\omega = (1, \gamma)$ рационально независимы, то поток на торе – квазипериодический.

Рассмотрим задачу об условиях структурной устойчивости (грубости) линейного расширения квазипериодического потока. Под структурной устойчивости имеется

ввиду следующее: при фиксированном потоке на торе существует окрестность матрицы $A(\varphi)$ такая, что все линейные расширения с матрицами из этой окрестности послонно топологически эквивалентны.

Для каждой точки $(\varphi, x) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, можно определить четыре показателя Ляпунова траектории (1), проходящей через эту точку:

$$\lambda_s^\pm(\varphi, x) = \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} t^{-1} \ln \|X^t(\varphi)x\|, \quad \lambda_i^\pm(\varphi, x) = \liminf_{t \rightarrow \pm\infty} t^{-1} \ln \|X^t(\varphi)x\|. \quad (3)$$

Согласно спектральной теореме ([1], теорема 3) множество всех показателей Ляпунова линейного расширения – *спектр показателей Ляпунова*, представляет собой объединение непересекающихся замкнутых интервалов, причем четыре показателя (3) содержатся в одном и том же спектральном интервале. В нашем случае спектр либо $\{-\beta, \beta\}$, либо $[-\beta, \beta]$, либо $\{0\}$ [2]. Эти свойства спектра позволяют ввести следующую классификацию двумерных линейных расширений квазипериодических потоков на торе.

Определение 1. *Линейное расширение называется*

- 1) *равномерно гиперболическим, если его спектр $\{-\beta, \beta\}$;*
- 2) *эллиптическим, если спектр $\{0\}$ и все решения (1) ограничены;*
- 3) *параболическим, если спектр $\{0\}$ и есть как ограниченные, так и неограниченные решения (1);*
- 4) *неравномерно гиперболическим, если спектр невырожденный интервал $[-\beta, \beta]$.*

Неравномерно гиперболические квазипериодические системы (неправильные по Ляпунову) были открыты В.М. Миллионщиковым [3]. Таким образом, динамика линейных расширений над квазипериодическим потоком существенно отличается от периодического случая. Предположение о том, что структурно устойчивость эквивалентна равномерной гиперболичности требует дополнительного обоснования. Для этого сведем задачу к изучению динамики индуцируемого проективного потока. Перейдем от однородных координат к аффинным: $w = \frac{x_2}{x_1}$, в результате чего получим систему

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{w} = (a(\varphi) - b(\varphi))w^2 - 2c(\varphi)w + a(\varphi) + b(\varphi). \quad (4)$$

Эта система определяет *проективный поток*, индуцируемый линейной системой.

Компактификация фазового пространства системы (4) с помощью замены $w = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) преобразует ее в систему на трехмерном торе $\mathbb{T}^3:1$

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = 2a(\varphi) + 2b(\varphi) \cos \theta - 2c(\varphi) \sin \theta, \quad (5)$$

где (φ, θ) – угловые координаты на торе \mathbb{T}^3 . Проективный поток описывает угловую эволюцию решений системы (1). Его можно рассматривать как поток на расслоении $\mathbb{T}^2 \times S^1$ с квазипериодическим потоком на базе \mathbb{T}^2 . Также очевидно, что между системами вида (1) и (5) существует взаимно однозначное соответствие.

Количество публикаций, посвященных динамике линейных расширений над квазипериодическими потоками, необозримо. Мы обратим внимание на работы, непосредственно касающиеся областей устойчивости системы (1). Например, в работе Х. Брура и К. Симо [4] рассматривается уравнение Хилла с двумя параметрами α и β

$$\ddot{x} + (\alpha^2 + \beta p(t))x = 0$$

и квазипериодической функцией $p(t) = \cos t + \cos \gamma t$, где $\gamma = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Это уравнение эквивалентно системе

$$\dot{\varphi} = (1, \gamma), \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 - \beta p(\varphi) & 0 \end{pmatrix} x. \quad (6)$$

Соответственно система на трехмерном торе выглядит так

$$\dot{\varphi} = (1, \gamma), \quad \dot{\theta} = 1 + \alpha^2 + \beta(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + (\alpha^2 + \beta(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - 1) \cos \theta \quad (7)$$

Известно, что система (1) всегда может быть приведена линейным преобразованием к так называемой резонансной нормальной форме такой, что матрица коэффициентов не зависит от φ . Это преобразование, представляет собой ряд Фурье, который не всегда является сходящимся. В работе [4] метод нормальной формы используется при малых значениях параметра β . Для больших β в этой работе строится приближенная матрица монодромии, собственные значения которой определяют области гиперболичности¹ системы (1) в пространстве параметров. Результатом численного моделирования является также гипотеза о том, что при достаточно малых значениях β области неустойчивости отделяются друг от друга областями, в которых показатель Ляпунова равен нулю. Мы будем использовать систему (7) для иллюстрации некоторых конструкций теории, излагаемой ниже.

2. Свойства проективного потока

Свойства потока на расслоении $\mathbb{T}^2 \times S^1$ полностью определяют динамику линейного расширения.

Пусть $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$ – решение (5) с начальными значениями (φ_0, θ_0) . Существует предел

$$\varrho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t, \varphi_0, \theta_0)}{t},$$

который называется *числом вращения слоя*. Этот предел не зависит от начальных данных и является непрерывной функцией параметров системы [5].

Любой поток на торе имеет минимальные множества. В данном случае проективный поток сохраняет двойное отношение², что позволяет оценить число минимальных множеств: поток, порождаемый (5) имеет либо одно минимальное множество, либо два, либо тор \mathbb{T}^3 представляет собой несчетное объединение минимальных множеств [1, теорема 8].

Введем еще одно понятие, играющее существенную роль при изучении линейных расширений.

Определение 2. *Резонансом называется равенство*

$$\langle k, \omega \rangle + l\varrho = 0 \pmod{1}, \quad (k, l) \in \mathbb{Z}^3.$$

¹Острова неустойчивости по терминологии статьи [4].

²Пусть $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\{x, y\}$ матрица, составленная из вектор-столбцов x и y . Тогда, если x, y, z, w – четыре различных вектора, то величина

$$\frac{\det\{x, y\}}{\det\{z, w\}} \cdot \frac{\det\{x, w\}}{\det\{z, y\}}$$

называется двойным отношением.

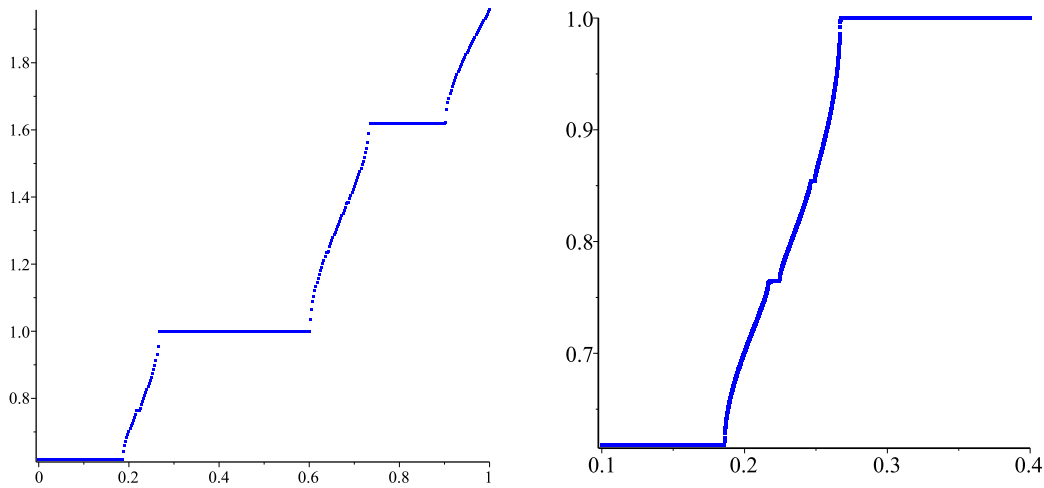


Рис. 1. Число вращения слоя системы (7) при $b = 0.3$ и $a \in [0, 1]$ слева, при $a \in [0.1, 0.4]$ справа.

В нашем случае резонансы существуют только при $l \neq 0$, поэтому соответствующие значения ϱ будем называть резонансными. В разделе 3 мы покажем, что резонансным значениям ϱ могут соответствовать области неустойчивости линейных расширений. Обнаружить существование резонансов можно вычисляя число вращения слоя (рис. 1). Ступеньки соответствуют резонансным значениям ϱ . Однако, численные эксперименты показывают, что не всякому резонансному значению соответствует ступенька. Введем следующее определение.

Определение 3. Говорят, что интервал (α, β) является интервалом захвата фазы¹ для проективного потока, зависящего от параметров, если его число вращения постоянно на этом интервале.

Для потока на торе \mathbb{T}^2 критерием захвата фазы является отсутствие послойной эквивалентности потока линейному

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\theta} = \varrho,$$

где ϱ – рациональное число [6]. Мы покажем ниже, что в рассматриваемой ситуации критерием захвата фазы является гиперболичность линейного расширения.

Показатели Ляпунова линейного расширения, порождаемого системой (1), вычисляются по формуле

$$\lambda_{\pm}(\varphi_0, \theta_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (2c(\omega t + \varphi_0) \cos \theta(s, \varphi_0, \theta_0) + 2b(\omega t + \varphi_0) \sin \theta(s, \varphi_0, \theta_0)) ds, \quad (8)$$

которая является следствием представления решения нетривиального уравнения системы в вариациях для траектории $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$.

¹Захват фазы – явление, состоящее в том, что автоколебательная система при воздействии на неё периодически изменяющейся по времени внешней силы совершает колебания не с частотой автоколебаний, а с частотой внешнего воздействия для некоторого ограниченного диапазона частотных расстроек, называемых полосой захвата.

3. Формулировка результатов

Мы сформулируем теорему о свойствах проективного потока на трехмерном торе, являющейся обобщением так называемой «Gap Labeling Theorem» Р. Джонсона и Ю. Мозера [7].

Теорема 1. *Линейное расширение квазипериодического потока на торе структурно устойчиво тогда и только тогда, когда*

- 1) *линейное расширение равномерно гиперболично;*
- 2) *неблуждающее множество проективного потока состоит из двух инвариантных торов (экспоненциально устойчивого и неустойчивого), являющихся конечно-кратным накрытием базы;*
- 3) *число вращения слоя резонансное и принадлежит некоторому интервалу захвата фазы.*

Доказательство этого результата является применением общих результатов теории проективных потоков Дж. Селгрейда [8].

Литература

1. Sacker R., Sell G.R. A Spectral Theory for Linear Differential Systems // Journal of Diff. Equat. 1978. Vol.27. P. 320-358.
2. Johnson R.A. On a Floquet Theory for Almost-Periodic, Two-Dimensional Linear Systems // Journal of Diff. Equat. 1980. Vol.37. P. 184-205.
3. Миллионщиков В.М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1969. Т.5. № 11. С. 1979-1983.
4. Broer H., Sim'o C. Hill's equations with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena // Bull. Soc. Bras. Math. 1998. Vol.29. P. 253-293.
5. Веременюк В.В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, № 6, С. 1073–1076.
6. Ильяшенко Ю.С., Рыжов Д.А., Филимонов Д.А. Захват фазы для уравнений, описывающих резистивную модель джозефсоновского перехода, и их возмущений // Функциональный анализ и его прил. 2011. Т.45, № 3, С. 41–54.
7. Johnson R., Moser J. The Rotation Number for Almost Periodic Potentials, Commun. Math. Phys. Vol.84. P. 403-438.
8. Selgrade J.F. Isolated invariant sets for flows on vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol.203. P. 359-390.

MSC 34D20

Structurally stable linear extensions quasi-periodic flows on the torus

A.N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University

Abstract: The paper considers the problem of the geometry of the regions of stability (instability) of linear canonical systems of the 2nd order with quasi-periodic coefficients depending on the parameters. Any such system generates a flow, which is usually called a linear extension of a quasi-periodic flow on a torus. The basis for solving this problem is the transition to a system on an induced projective bundle. If the base torus is \mathbb{T}^2 , then the projective bundle three-dimensional torus $\mathbb{T}^2 \times S^1$. In the periodic case, such a transition leads to a system on the torus that does not have singular points and Reeb cells, which makes it possible to use the classical theory Poincaré-Denjoy. When changing the parameters, the stability regions alternate with the instability regions, which correspond to integer rotation number values. The boundaries of these regions are curves in the parameter space, the smoothness of which depends on the smoothness the system under study. In the quasi-periodic case, there is also a characteristic similar to A. Poincaré's rotation number: *fiber rotation number*. However, it is impossible to obtain a complete analogy with the periodic case here, as evidenced, for example, by the existence of Lyapunov's wrong canonical systems. It is shown that structurally stable linear extensions correspond to projective flows having two invariant normally hyperbolic torus (stable and unstable). Moreover, in systems depending on the parameter, the intervals of constancy of the rotation number of the layer correspond to structurally stable linear extensions.

Keywords: linear extension, Lyapunov exponents, projective flow, fiber rotation number, normally hyperbolic invariant manifold.

References

1. Sacker R., Sell G.R. A Spectral Theory for Linear Differential Systems // Journal of Diff. Equat, 1978. Vol.27. P. 320-358.
2. Johnson R.A. On a Floquet Theory for Almost-Periodic, Two-Dimensional Linear Systems // Journal of Diff. Equat, 1980. Vol.37. P. 184-205.
3. Millionshchikov V.M. Proof of the existence of irregular systems of linear differential equations with quasi-periodic coefficients // Differential Equations, 1969. T. 5. № 11. P. 1979-1983.
4. Broer H., Sim'о C. Hill's equations with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena // Bull. Soc. Bras. Math, 1998. Vol.29. P. 253-293.
5. Veremenyuk V.V. Existence of the rotation number of the equation $\dot{x} = \lambda(t, x)$ with right-hand side periodic in x and almost periodic in t // Differ. equations, 1991. T.27. № 6, P. 1073–1076.

6. Ilyashenko Yu.S., Ryzhov D.A., Filimonov D.A. Phase lock for equations describing the resistive model of the Josephson junction and their perturbations // Functional Analysis and its applications, 2011.Т.45, № 3,Р. 41–54.
7. Johnson R., Moser J. The Rotation Number for Almost Periodic Potentials, Commun. Math. Phys. Vol.84. P. 403-438.
8. Selgrade J.F. Isolated invariant sets for flows on vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc, 1975. Vol.203. P. 359-390.

УДК 517.91

Подходы для повышения порядка аппроксимации метода гидродинамика сглаженных частиц (SPH) на гладких решениях*

Стояновская О.П., Григорьев В.В., Савватеева Т.А.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Аннотация: В работе обсуждаются подходы для повышения порядка аппроксимации метода гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) на гладких решениях. Приводится численное решение задачи о движении поршня в газе, показываются проблемы при сопряжении в SPH методов второго и более высоких порядков с граничными условиями газ-твердая стенка.

Ключевые слова: гидродинамика сглаженных частиц, SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics, методы 4 порядка, задача о движении поршня в газе.

1. Введение

Гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) представляет собой численный метод аппроксимации нестационарных уравнений в частных производных [6]. Основу метода составляет способ вычисления пространственных производных от функции, значения которой заданы в подвижных нерегулярно расположенных в пространстве узлах – лагранжевых частицах. Для аппроксимации уравнений по значениям функции, известной в узлах, строится гладкая интерполирующая функция с помощью ядра (функции радиального базиса), носитель которого охватывает несколько соседних частиц. Такой способ интерполяции означает, что пространственное разрешение метода (точность интерполирования и вычисления производных от интерполянта) определяется независимыми параметрами – размером ядра h и расстоянием между модельными частицами Δx , а также видом ядра.

В настоящее время численные модели механики сплошных сред на основе SPH интенсивно развиваются. Об этом свидетельствует большое количество научных публикаций, посвященных SPH, а также появление новых свободно-распространяемых кодов для исследовательских и инженерных расчетов на основе этого метода SPHinxsys [1], Phantom [2], или новых версий давно развиваемых кодов DualPhysics [3], Gadget [4]. Обзор современных достижений в SPH и нерешенных проблем для этого метода можно найти, например, в [5].

2. Подходы к повышению порядка метода SPH

2.1. По радиусу сглаживания – использование немонотонных ядер

В [5] обсуждается проблема конструирования методов высокого порядка на основе SPH и длительное время существовавший «барьер второго порядка». Суть «барьера второго порядка» состоит в невозможности занулить члены погрешности метода

*Исследование проведено за счет проекта РФФИ 23-11-00142 <https://rscf.ru/project/23-11-00142/>

старше второго порядка при использовании классических знакоопределенных ядер в SPH. Под классическими ядрами будем понимать $W(\varphi)$ – положительную финитную функцию радиального базиса (значение функции зависит только от расстояния до нуля), монотонно убывающую от 0, нормированную, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\varphi) d\varphi = 1, \quad (1)$$

и такова, что ее преобразование Фурье $F(kH)W(\varphi)$ имеет следующие свойства

$$\diamond \forall kH \quad 0 < F(kH)W(\varphi) < \frac{2}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\diamond \lim_{kH \rightarrow 0} F(kH)W(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + o((kH)^2).$$

При использовании классических ядер SPH имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях по H -радиусу сглаживания. Для повышения порядка до 4 разработчики метода SPH [6] предложили сконструировать немонотонную функцию радиального базиса $W_*(\varphi) = (A + B\varphi^2)W(\varphi)$, где A, B – константы, удовлетворяющие системе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (A + B\varphi^2)W(\varphi) d\varphi = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (A + B\varphi^2)\varphi^2 W(\varphi) d\varphi = 0. \quad (2)$$

Так группа в Университете Манчестера, Великобритания, занимающаяся развитием идеи знакопеременных ядер высокого порядка аппроксимации при моделировании динамики несжимаемой жидкости на практике показали 4 порядок аппроксимации [7, 8] для ядер, сконструированных на основе этой идеи.

Представленный подход можно расширять на многомерный случай, а также искать большее количество констант, зануляя большее количество интегралов из (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 + A_2\varphi^2 + \dots A_{2n}\varphi^{2n})\varphi^0 W(\varphi) d\varphi = 1, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 + A_2\varphi^2 + \dots A_{2n}\varphi^{2n})\varphi^2 W(\varphi) d\varphi = 0, \dots, \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 + A_2\varphi^2 + \dots A_{2n}\varphi^{2n})\varphi^{2n} W(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4)$$

Предполагается, что это очень дешевый и простой способ повысить порядок аппроксимации SPH на гладких решениях путем замены ядра $W(\varphi)$ на ядро

$$W_{Hn}(\varphi) = (A_0 + A_2\varphi^2 + \dots A_{2n}\varphi^{2n})\varphi^{2n} W(\varphi).$$

2.2. По количеству модельных частиц – использование ядер, имеющих более двух гладких производных

В работе [10] показано, что порядок аппроксимации решения по количеству соседей определяется гладкостью (количеством непрерывных производных) ядра метода. Этот результат был получен теоретически и практически.

Для теоретического обоснования применялся дисперсионный анализ. Путем численного анализа дисперсионного соотношения показано, что погрешность вычисления фазовой скорости волн в SPH немонотонно зависит от расстояния между модельными частицами. Эта зависимость имеет осциллирующий характер, причем амплитуда осцилляций убывает пропорционально величине $\left(\frac{\Delta x}{H}\right)^\alpha$, где α – гладкость ядра. Немонотонная зависимость погрешности затрудняет практическое исследование скорости сходимости метода.

На практике сходимость метода SPH изучена на бесконечно-гладком решении задачи о распространении монохроматической звуковой волны в газе. В вычислительных экспериментах показано, что теоретическая погрешность фазовой скорости движения волн пропорциональна погрешности скорости в базовых физических переменных. Для ядер, представляющих собой полиномы Вендланда гладкости 2 и 4 показана сходимость численного решения к аналитическому со скоростью 2 и 4 соответственно.

3. Вычислительные эксперименты

В настоящей работе мы расширяем систему тестов для изучения порядка аппроксимации SPH. Чтобы иметь возможность количественно оценить ошибки, возникающие при аппроксимации граничных условий газ-твердая стенка (в том числе при использовании осциллирующих ядер), будем решать одномерную задачу о движении поршня в газе.

Пусть бесконечная труба имеет непроницаемую перегородку, справа от перегородки находится покоящийся политропный газ с $\gamma = \frac{4}{3}$. Перегородка (поршень) двигается по заданному закону (см. решение задачи 4.8 стр. 90 в [11])

$$x = X(t) = -\frac{2c_0}{\gamma-1}t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}L \left(\left(1 + \frac{c_0}{L}t\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} - 1 \right), \quad (5)$$

где c_0 – скорость звука в покоящемся газе, $L > 0$ – постоянная (характерный линейный размер), γ – показатель политропы. Тогда параметры газа в трубе описываются с течением времени так:

$$c(x, t) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}u(x, t), \quad (6)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & c_0t \leq x < \infty, \\ \frac{2c_0}{\gamma+1} \frac{x - c_0t}{c_0t + L}, & X(t) < x < c_0t. \end{cases} \quad (7)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(\frac{c(x, t)}{c_0} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p(x, t) = \frac{\rho c^2}{\gamma} = \frac{\rho_0 c^{2\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma c_0^{2/(\gamma-1)}}. \quad (8)$$

Численное решение задачи (36), (43), (44) из [12] с использованием схемы приведено на рис. 1-2. Счетные параметры представлены на самом рисунке.

Граничным частицам (отстоят от поршня не более, чем на $2.1 H$ за поршнем и $2 H$ перед поршнем) предписывается скорость, плотность и внутренняя энергия, определяемая аналитическим решением (данный способ не может быть применим при решении немодельных задач, но выбран для минимизации ошибки, вносимой

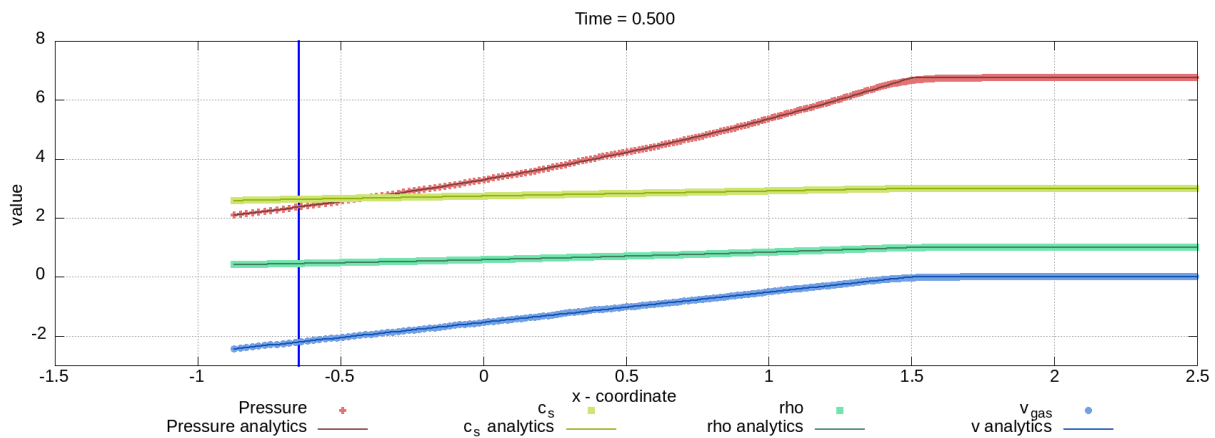


Рис. 1. Решение задачи о выдвигании поршня из газа: численное и аналитическое решение задачи в момент времени $T=0.5$. Вертикальная синяя линия – положение поршня.

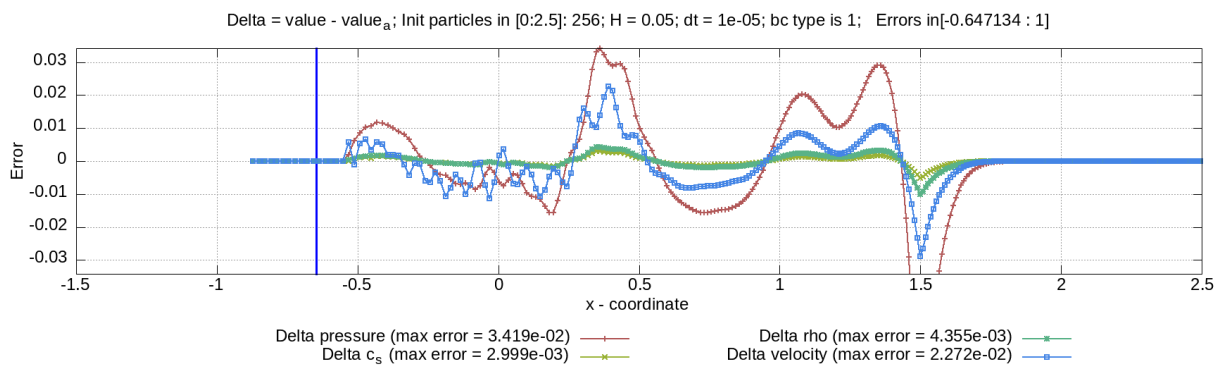


Рис. 2. Решение задачи о выдвигании поршня из газа: абсолютная погрешность решения. Вертикальная синяя линия – положение поршня.

аппроксимацией граничных условий), перемещения частиц рассчитываются согласно предписанной скорости.

Видно, что максимум погрешности наблюдается на границе волны разрежения и невозмущенного газа. Это точка, в которой решение терпит слабый разрыв. Мы убедились, что по погрешностям в этой точке будет получаться первый порядок аппроксимации схемы по H . Кроме того, видно, что даже при использовании аналитических значений макропараметров граничных частиц, от границы поршня в сторону невозмущенного газа идут колебания периода порядка $2H$. Эти колебания нарастают по амплитуде и, по-видимому, носят счетный характер.

4. Предварительные выводы и планы

В работе приведены подходы для повышения порядка аппроксимации SPH на гладких решениях. Приведены результаты численного решения задачи о движении поршня методом SPH. Показано, что нерешенной проблемой является способ аппроксимации граничных условий. Мы предполагаем, что если удастся преодолеть счетную генерацию коротких волн от стенки, то в области волны разрежения можно будет наблюдать высокий порядок аппроксимации SPH при использовании немонотонных ядер повышенной гладкости. В этом случае задача о движении поршня будет одним из базовых тестов определения порядка аппроксимации метода. Кроме того,

отметим, что решение о разлете неизэнтропического газа в вакуум, не содержащее слабого разрыва внутри расчетной области (для газопылевой среды такое решение приведено в [12]), по-видимому, является одним из наиболее простых решений (кроме звуковых волн), на котором можно будет непосредственно наблюдать высокий порядок аппроксимации SPH.

Литература

1. <https://www.sphinxsys.org/>
2. <https://phantomsph.bitbucket.io/>
3. <https://dual.sphysics.org/>
4. <https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/gadget/>
5. Vacondio, R., Altomare, C., De Lefte, M. et al. Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics numerical schemes. *Comp. Part. Mech.* 8, P. 575–588 (2021). URL:<https://doi.org/10.1007/s40571-020-00354-1>
6. Monaghan, J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1992. P. 543-574.
<http://dx.doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
7. Lind S.J., Stansby P.K. High-order Eulerian incompressible smoothed particle hydrodynamics with transition to Lagrangian free-surface motion. *J. Comp. Phys.* 2006. P. 290–311. (doi:10.1016/j.jcp.2016.08.047)
8. Nasar A.M.A., Fourtakas G., Lind S.J., King J.R.C., Rogers B.D., Stansby P.K. High-order consistent SPH with the pressure projection method in 2-D and 3-D *Journal of Computational Physics*. Volume 444, 1 November 2021, 110563 p.
9. Stoyanovskaya O., Lisitsa, V., Anoshin S., Markelova T. Dispersion Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics to Study Convergence and Numerical Phenomena at Coarse Resolution. 2022, *Computational Science and Its Applications - ICCSA 2022 - 22nd International Conference, Proceedings*.
10. Stoyanovskaya O., Lisitsa V., Anoshin S., Markelova T., Savvateeva T.A. Dispersion Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics as a way to understand its order of approximation. Submitted to *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
11. Меньщиков В.М., Тешуков В.М. Газовая динамика. Задачи и упражнения // Новосибирск, Издательство НГУ, 2012. 134 с. URL:
<http://parallels.nsu.ru/efomenko/mss/Chesnokov.pdf>
12. Stoyanovskaya O.P., Grigoryev V.V., Suslenkova A.N., Davydov M.N., Snytnikov N.V. Two-Phase Gas and Dust Free Expansion: Three-Dimensional Benchmark Problem for CFD Codes. *Fluids* 2022, 7, 51 p. URL:
<https://doi.org/10.3390/fluids7020051>

MSC 34D20

Approaches for increasing the order of approximation of the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method on smooth solutions

O.P. Stoyanovskaya, V.V. Grigoryev, T.A. Savvateeva
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS

Abstract: The paper discusses approaches for increasing the order of approximation of the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method on smooth solutions. A numerical solution of the problem of piston motion in a gas is presented, problems are shown when conjugating second and higher order methods in SPH with gas-solid wall boundary conditions.

Keywords: smoothed particle hydrodynamics, high order method, piston in gas.

References

1. <https://www.sphinxsys.org/>
2. <https://phantomsph.bitbucket.io/>
3. <https://dual.sphysics.org/>
4. <https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/gadget/>
5. Vacondio R., Altomare C., De Leffe M. et al. Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics numerical schemes. *Comp. Part. Mech.* 8, 2021. P. 575–588. URL:<https://doi.org/10.1007/s40571-020-00354-1>
6. Monaghan J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30, 1992. P. 543-574. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
7. Lind S.J., Stansby P.K. High-order Eulerian incompressible smoothed particle hydrodynamics with transition to Lagrangian free-surface motion. *J. Comp. Phys.* 326, 2016. P. 290–311. (doi:10.1016/j.jcp.2016.08.047)
8. Nasar A.M.A., Fourtakas G., Lind S.J., King J.R.C., Rogers B.D., Stansby P.K. High-order consistent SPH with the pressure projection method in 2-D and 3-D *Journal of Computational Physics*. Volume 444, 1 November 2021, 110563 p.
9. Stoyanovskaya O., Lisitsa V., Anoshin S., Markelova T. Dispersion Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics to Study Convergence and Numerical Phenomena at Coarse Resolution. 2022, *Computational Science and Its Applications - ICCSA 2022 - 22nd International Conference, Proceedings*.
10. Stoyanovskaya O., Lisitsa V., Anoshin S., Markelova T., Savvateeva T.A. Dispersion Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics as a way to understand its order of approximation. Submitted to *Journal of Computational and Applied Mathematics*.

11. Menshikov V.M., Teshukov V.M. Gas dynamics. Problems and Exercises // Novosibirsk, 2012. URL: <http://parallels.nsu.ru/efomenko/mss/Chesnokov.pdf>
12. Stoyanovskaya O.P., Grigoryev V.V., Suslenkova A.N., Davydov M.N., Snytnikov N.V. Two-Phase Gas and Dust Free Expansion: Three-Dimensional Benchmark Problem for CFD Codes. *Fluids* 2022, 7, 51. URL: <https://doi.org/10.3390/fluids7020051>

УДК 517.958:536.2

Задача о термодинамическом взаимодействии слоя частиц с параллельной плоскостью

Сыромясов А.О., Еделева Ю.П.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Ставится задача о взаимодействии слоя редко расположенных идентичных сферических частиц с плоскостью в присутствии неоднородного температурного поля. Особое внимание уделяется случаю, когда невозмущенный градиент температуры постоянен и перпендикулярен плоскости, которая обладает постоянной температурой. Обсуждается подход к определению эффективной теплопроводности слоя частиц. Указаны варианты уточнения условий исходной задачи.

Ключевые слова: термодинамическое взаимодействие, эффективная теплопроводность, мультипольное разложение, фиктивная частица.

1. Общая постановка проблемы

В работе рассматривается неподвижная сплошная среда с теплопроводностью κ_f , заполняющая полупространство, ограниченное плоскостью W . Для удобства вводится декартова прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$, так что W совпадает с плоскостью Ox_1x_2 , а полупространство описывается неравенством $x_3 > 0$; здесь и далее вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задает произвольную точку среды.

Область $S = \{\vec{x} \mid h_1 \leq x_3 \leq h_2\}$ может содержать инородные сферические частицы $\Omega_1, \Omega_2, \dots$. Для простоты считается, что свойства всех частиц одинаковы: их теплопроводность равна κ_p , а радиус – a . Количество частиц, вообще говоря, может быть бесконечным; центр Ω_k расположен в точке с радиус-вектором \vec{r}_k .

Подобные системы могут возникать в различных технологических процессах, в которых слои частиц взвеси вытягиваются вдоль поверхностей сосудов или труб, содержащих дисперсную среду. Соответственно, практический интерес представляет следующий вопрос: как упомянутый слой взвеси может исказить существующее в сплошной среде распределение температуры? Далее, можно ли рассматривать этот слой не как дисперсный, а как однородный, приписав ему некоторую эффективную теплопроводность?

Пусть поведение температуры среды T_f на плоскости W и в отдалении от S известно и является стационарным:

$$T_f(\vec{x}) \rightarrow T_\infty(\vec{x}), \quad x_3 \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что вне частиц температура удовлетворяет линейному стационарному уравнению теплопроводности:

$$\Delta_x T_f = 0; \quad (2)$$

здесь Δ_x – оператор Лапласа, вычисляемый по координатам вектора \vec{x} . Аналогично, внутри каждой из частиц справедливо уравнение

$$\Delta_y T_p = 0, \quad (3)$$

где T_p – температура внутри Ω_k , а вектор $\vec{y} = \vec{x} - \vec{r}_k$ откладывается от центра Ω_k .

На поверхности сфер $\partial\Omega_k$ выполняются стандартные условия непрерывности температуры и теплового потока [1]:

$$T_f = T_p, \quad \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial n}, \quad \vec{x} \in \partial\Omega_k, \quad (4)$$

где $\partial/\partial n$ есть производная в направлении внешней нормали к поверхности.

Помимо этого, T_p не имеет особенностей внутри частиц:

$$|T_p(\vec{y})| < \infty, \quad \forall \vec{y} \in \Omega_k. \quad (5)$$

2. Система «плоскость плюс одиночная частица»

Если инородные включения внутри S располагаются редко, то для определения общего искажения температурного поля следует предварительно решить задачу о термодинамическом взаимодействии плоскости и единственной частицы.

Известны различные подходы к описанию систем такого рода. В частности, взаимодействие сферы и плоскости может быть описано переходом в цилиндрическую систему координат [2] или методом отражений [3, 4]. В настоящей работе применяется метод мультипольного разложения [5]. Этот подход сочетается с введением фиктивной частицы M , взаимодействие с которой равносильно взаимодействию Ω и плоскости W .

Итак, будем рассматривать частицу Ω с центром в точке $\vec{r} = (0, 0, h)$, где $h > a$. Предположим, что невозмущенная температура в (1) имеет вид

$$T_\infty(\vec{x}) = T_w + T_3 x_3, \quad (6)$$

т. е. в полупространстве, занятом сплошной средой, невозмущенный градиент температуры перпендикулярен ограничивающей плоскости и постоянен. Кроме того, пусть на W задана постоянная температура

$$T_f \Big|_W = T_w; \quad (7)$$

это условие согласуется с (6).

Введем в рассмотрение сферу M , расположенную симметрично Ω относительно W и идентичную Ω по свойствам; тем самым, перейдем от полупространства $x_3 \geq 0$ к пространству \mathbb{R}_3 , в котором задана та же невозмущенная температура $T_\infty(\vec{x})$. Пусть на поверхности ∂M заданы граничные условия, аналогичные (4).

Температуру вне частиц можно представить следующим образом:

$$T_f(\vec{x}) = T_\infty(\vec{x}) + H_3^{ext}(\Omega)L_3(\vec{x} - \vec{r}) + F_{33}^{ext}(\Omega)L_{33}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots + \\ + H_3^{ext}(M)L_3(\vec{x} + \vec{r}) + F_{33}^{ext}(M)L_{33}(\vec{x} + \vec{r}) + \dots, \quad (8)$$

а внутри Ω – в виде

$$T_p(\vec{y}) = T_\infty(\vec{r}) + A_0^{int}(\Omega)L_0(\vec{y})|\vec{y}| + H_3^{int}(\Omega)L_3(\vec{y})|\vec{y}|^3 + F_{33}^{int}(\Omega)L_{33}(\vec{y})|\vec{y}|^5 + \dots \quad (9)$$

Здесь

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad L_{i\dots j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} L_0(\vec{x}),$$

коэффициенты $H_3^{ext}(\Omega), F_{33}^{ext}(\Omega), \dots$ не зависят от \vec{x} и \vec{y} .

Функции (8) и (9) удовлетворяют соотношениям (1)–(3) и (5). При ∇T_∞ , перпендикулярном W , подбор специальных соотношений между $H_3^{ext}(\Omega), F_{33}^{ext}(\Omega), \dots$, с одной стороны, и $H_3^{ext}(M), F_{33}^{ext}(M), \dots$, с другой стороны, позволяет выполнить условие (7).

Остается найти $H_3^{ext}(\Omega), F_{33}^{ext}(\Omega), \dots$ и $A_0^{int}(\Omega), H_3^{int}(\Omega), F_{33}(\Omega), \dots$. Для этого выражения (8) и (9) подставляются в граничные условия (4), а полученные равенства раскладываются по параметру $\frac{a}{h} < 1$. После определения коэффициентов этого разложения задачу о термодинамическом взаимодействии одиночной сферы с плоскостью можно считать решенной.

3. Эффективная теплопроводность слоя частиц

Для ответа на основной вопрос исследования (об эффективных свойствах слоя частиц) необходимо выполнить осреднение полученного поля $T_f(\vec{x})$ по \vec{r}_k , учитывая, что горизонтальные компоненты этих векторов в общем случае отличны от нуля.

Существенную роль в этом должна играть дополнительная информация о расположении частиц: их центры могут быть распределены внутри слоя S случайным образом или образовывать периодическую решетку. В первом случае необходимо знать плотность распределения \vec{r}_k , а во втором – тип решетки (кубическая, гексагональная и т. д.) и ее шаг.

Результаты осреднения следует сравнить с решением задачи о прохождении температурного поля вида (6) через слой S , заполненный однородной средой с теплопроводностью $\kappa^* \neq \kappa_f$. Итогом такого сравнения будет зависимость $\kappa^*(\phi)$, где ϕ – объемная доля частиц взвеси в слое.

4. Варианты уточнения условий задачи

Постановка рассмотренной выше задачи может быть уточнена и дополнена несколькими способами.

Во-первых, можно рассмотреть случай, когда невозмущенный градиент температуры направлен не поперек плоскости W и слоя S , а вдоль них, т. е. T_∞ описывается не уравнением (6), а равенством вида $T_\infty = T_1 x_1$; при этом условие (7) также необходимо будет изменить.

Во-вторых, условие (7), в котором температура плоскости считается известной, можно заменить на условие вида (4); тем самым, будет учтено «проникновение» температурного поля за пределы ограничивающей плоскости W . Это потребует приписать полупространству $x_3 < 0$ некую теплопроводность, отличную от κ_f (в противном случае получится задача о частицах в неограниченном пространстве). Очевидно, условие на бесконечности при этом придется уточнить, а параметры фиктивной частицы – пересмотреть.

Наконец, в-третьих, можно учесть термодинамическое взаимодействие инородных частиц не только с плоскостью, но и друг с другом. Это потребует пропорционального увеличения количества фиктивных частиц. Кроме того, придется ввести в рассмотрение плотность условного парного распределения частиц рядом друг с другом, подобно тому, как это было сделано в [6] при вычислении эффективной вязкости суспензии.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
2. Stillinger F.H. Interfacial. Solutions of the Poisson -Boltzmann equation // Journal of Chemical Physics, 1961. Vol.35. No.5. P. 1584-1589.
3. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
4. Hao Y., Haber S. Electrophoretic motion of a charged spherical particle normal to a planar dielectric wall // International Journal of Multiphase Flow, 1998. Vol.24. No.5. P. 793-824.
5. Мартынов С.И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1998. № 2. С. 112-119.
6. Batchelor G.K., Green J.T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order // Journal of Fluid Mechanics, 1972. Vol.56. No.3. P. 401-427.

MSC 35J25, 35Q79, 80A19, 80M35

On thermodynamic interaction of a particle stratum with a parallel plane

A.O. Syromyasov, Yu.P. Edeleva

National Research Mordovia State University

Abstract: The paper examines interaction of a plane with a slab of rarely placed identical spherical particles in presence of non-uniform temperature field. Special attention is paid to the case when undisturbed temperature gradient is constant and orthogonal to the plane and the plane itself has constant temperature. Approach to calculation of slab's effective thermal conductivity is discussed. Ways to refine initial problem statement are listed.

Keywords: thermodynamic interaction, effective thermal conductivity, multipole expansion, fictitious particle.

References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Butterworth–Heinemann, 1987. 539 p.
2. Stillingner F.H. Interfacial Solutions of the Poisson - Boltzmann equation // Journal of Chemical Physics, 1961. Vol.35. No.5. P. 1584-1589.
3. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. Prentice-Hall, 1965.
4. Hao Y., Haber S. Electrophoretic motion of a charged spherical particle normal to a planar dielectric wall // International Journal of Multiphase Flow, 1998. Vol.24. No.5. P. 793-824.
5. Martynov S.I. Hydrodynamic interaction of particles // Fluid dynamics, 1998. Vol.33. No.2. P. 245-251.
6. Batchelor G.K., Green J.T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 // Journal of Fluid Mechanics, 1972. Vol.56. No.3. P. 401-427.

УДК 519.6

К вопросу о применении технологии OpenMP для численного решения интегральных уравнений

Тарасов Д.В., Лапкин В.В.

Пензенский государственный университет

Аннотация: В статье исследована целесообразность применения технологии параллельного программирования OpenMP для реализации различных способов численного решения интегральных уравнений. В качестве методов решения интегральных уравнений были выбраны методы имеющие разную вычислительную сложность: метод коллокации и метод конечных элементов. В работе представлены результаты замера времени при выполнении параллелизма как отдельных этапов решения (вычисление интегралов по квадратурным формулам, решения системы линейных алгебраических уравнений), так и для задачи в целом.

Ключевые слова: технология OpenMP, интегральные уравнения, параллельные вычисления.

1. Введение

Реализация численных методов нередко требует задействовать достаточно большое количество ресурсов ЭВМ, что негативно сказывается на времени выполнения программы. Если же реализуемый алгоритм не требователен к объему оперативной памяти, а предполагает лишь выполнения большого числа арифметических операций, то в этой ситуации удобно использовать многопроцессорные вычислительные системы с общей памятью. На сегодня под данные параметры подходят даже домашние ПК, оснащённые многоядерными процессорами, в которых каждое из ядер представляет собой независимое функционирующее вычислительное устройство.

В настоящее время существует много технологий которые позволяют достаточно легко организовать параллельные вычисления, одна из самых популярных на текущий момент это OpenMP – открытый стандарт для распараллеливания программ на языках C, C++ и Фортран. Даёт описание совокупности директив компилятора, библиотечных процедур и переменных окружения, которые предназначены для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью [1].

2. Применимость технологии OpenMP для решения интегрального уравнения

К разработке параллельной программы, реализующей решение интегральных уравнений, стоит приступать только после написания последовательной программы для однопроцессорной вычислительной системы. И затем уже, в случае, когда время выполнения или другие вычислительные ресурсы оказываются приоритетными, следует переходить к параллельным вычислениям. Применение OpenMP на языках C/C++ сводится к добавлению в уже написанную программу директив процессора, которые обрабатываются до начала компиляции программы.

Конечно, распараллелить можно не все алгоритмы, а лишь те, которые содержат многопоточковые участки, например, циклы.

Решение интегральных уравнений численными методами предполагает сведение последних к аппроксимирующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При этом нахождение элементов расширенной матрицы этой СЛАУ, как правило, требует нахождения интегралов или сумм. Таким образом, можно выделить следующие этапы для последующей параллельной реализации:

1) вычислительная схема решения интегрального уравнения, приводящая к СЛАУ. В частности, вычисление интегралов или сумм, составляющих коэффициенты данной СЛАУ;

2) решение аппроксимирующей СЛАУ.

Все представленные этапы решения в программной реализации будут содержать циклы, а значит и могут быть подвергнуты параллелизму. Рассмотрим все указанные этапы на примере решения интегрального уравнения методом коллокаций (как более простой вычислительной схеме) и методом конечных элементов (который содержит заметно большее число вычислений), и проанализируем временные затраты при использовании библиотеки OpenMP.

Этап «Вычисление коэффициентов аппроксимирующей СЛАУ». В методе коллокации коэффициенты СЛАУ определяются как значения определенных интегралов. Подчеркнем, что если они не являются особыми, то в большинстве случаев для его вычисления достаточно применения формулы прямоугольников. Параллельная реализация формулы прямоугольников с применением технологии OpenMP к нахождению коэффициентов аппроксимирующей СЛАУ (например, в методе коллокаций) представлена на рис. 1 [2], а результаты замера времени – в табл. 1.

```
float rect_integral(double (*f) (double), float a, float b, int n) {
    float h = fabs((b - a) / n);
    float sum = 0;
    #pragma omp parallel reduction (+: sum)
    {
        # pragma omp for
            for (int i = 0; i < n; ++i)
                sum += f(a + i * h) * h;
    }
    return sum;
}
```

Рис. 1. Параллельная реализация метода прямоугольников с использованием технологии OpenMP

Для обозначения параллельных участков кода используется директива `#pragma omp parallel`. Директива `#pragma omp for` служит для распределения итерации цикла между потоками; параметр директивы `shared` сообщает потокам что переменные, описанные данной директивой являются общими для всех потоков. Кроме того, параллелизм достигается за счет коллективной операции «+» и происходит при помощи параметра `reduction` директивы `for`.

В случае, когда вычисление коэффициентов аппроксимирующей СЛАУ сводится к вычислению двойных интегралов (например, решение интегральных уравнений методом конечных элементов), то их можно вычислить с помощью метода Симпсона. Для этого область интегрирования делится на элементарные прямоугольники. А параллелизм будем строить по циклу, выполняющему суммирование всех значений

Таблица 1. Время вычисления интеграла с помощью формулы прямоугольников

Узлы разбиения n	Время расчёта на одном ядре, с	Время расчёта на двух ядрах, с
10	0.00015	0.0011
50	0.014	0.032
100	0.093	0.1
500	9.21	5.23
1000	73.35	54.39

по каждому такому элементарному прямоугольнику, где работает формула:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{9} \left(f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + 4f \left[\left(a, \frac{c+d}{2} \right) + f \left(b, \frac{c+d}{2} \right) + f \left(\frac{a+b}{2}, c \right) + f \left(\frac{a+b}{2}, d \right) \right] + 16f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right). \quad (1)$$

Результаты замера времени параллельных вычислений в зависимости от число узлов разбиения n на подобласти (в которой используется локальная формула Симпсона) по каждой из осей показаны в табл. 2.

Таблица 2. Время выполнения метода Симпсона для вычисления двойных интегралов в обычном режиме и при использовании технологии OpenMP

Узлы разбиения n	Время расчёта на одном ядре, с	Время расчёта на двух ядрах, с
10	0.26	0.48
30	4.89	4.54
50	20.3	16.28
100	156.6	78.2
150	460.2	312.76

Этап «Решение аппроксимирующей СЛАУ». Рассмотрим ещё один этап решения нашей задачи, а именно, решение системы линейных алгебраических уравнений большой размерности, которую так же возможно распараллелить, так как в данных алгоритмах присутствуют циклы.

В табл. 3 приведено время решения системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби в случае использования технологии OpenMP и без нее при различных значениях размерности системы. Число потоков было выбрано равным количеству ядер процессора, в нашем случае два [3].

Таблица 3. Время решения системы линейных алгебраических уравнений

Размерность СЛАУ	Время расчёта на одном ядре, с	Время расчёта на двух ядрах, с
100 × 100	0.000873	0.00121
500 × 500	0.0214	0.0242
1000 × 1000	0.0915	0.0853
5000 × 5000	2.173	1.228
10000 × 10000	9.254	4.420

Предпочтение методу Якоби отдано поскольку аппроксимирующая матрица A нашей СЛАУ, полученная после применения метода коллокаций или метода конечных элементов, зачастую будет иметь вид близкий к диагональному (с сильно разреженной матрицей). А для корректной работы метода Якоби как раз и необходимо, чтобы диагональные элементы матрицы A были ненулевыми [4].

Также анализировались и другие численные методы решения СЛАУ. Например, исследователь может остановиться и на классическом методе Гаусса. Однако данный метод показал существенно большее общее время расчета [2].

3. Анализ результатов

Метод коллокации. Имея результаты распараллеливания частей кусков кода, можно объединить наработки параллелизма и применить их разом. В табл. 4 представлены результатами времени выполнения (с использованием OpenMP и без) метода коллокации [5, с. 543–550] для модельного уравнения:

$$x(t) + \int_0^{2\pi} \cos(t) \cos(\tau) x(\tau) d\tau = \sin(t),$$

где $x(t) = \sin t$ – точное решение.

Таблица 4. Время решения интегрального уравнения методом коллокации

Узлы коллокации	Время расчёта на одном ядре, с	Время расчёта на двух ядрах, с
10	0.0003	0.0013
50	0.017	0.029
100	0.1	0.18
500	11.25	6.69
1000	93.36	59.21

Из табл. 4 видно, что до определённого момента мы не только не получаем ускорение, а скорее замедляем выполнение программы, хотя и не существенное, так как речь идёт о долях секунд. Но когда задача становится более объёмной и требовательной к ресурсам ЭВМ, параллельный код выполняется куда быстрее кода, написанного для одного процессорного ядра.

Метод конечных элементов. Аналогично рассмотрим результаты параллелизма метода конечных элементов. В табл. 5 приведены результаты замера времени выполнения метода конечных элементов [6, 7], с одновременным применением параллелизма для обычных и двойных интегралов [3]. В качестве модельного примера было выбрано уравнение:

$$\int_0^1 (t^3 + \tau^2)x(\tau)dt = -2 \cos(t^2) + \cos(t^2 + 1) + 2 \sin(t^2 + 1),$$

где $x(t) = \sin t$ – точное решение.

Как видно из табл. 4–5, использование параллельных конструкций с помощью директив OpenMP может привести к увеличению производительности программы, особенно при работе с большими объемами данных. Однако во всех случаях исследователю необходимо правильно выбирать параметры директив и балансировать нагрузку между потоками, чтобы избежать блокировок или переключений контекста, которые могут отрицательно сказаться на производительности.

Таблица 5. Время выполнения метода конечных элементов в обычном режиме и при использовании технологии OpenMP

Размерность СЛАУ	Время расчёта на одном ядре, с	Время расчёта на двух ядрах, с
5	0.63	0.25
15	11.51	2.47
30	67.51	21.48
50	313.36	112.9

4. Заключение

В статье исследована целесообразность распараллеливания программного кода с использованием технологии OpenMP при численном решении интегральных уравнений. Если программная реализация численного метода требует значительных временных ресурсов, то распараллеливание кода актуально. В этом случае применение технологии OpenMP достаточно просто. Так даже на двухядерной машине время решения интегрального уравнения методом конечных элементов было заметно снижено уже при размерности аппроксимирующей СЛАУ равной 50, для метода коллокации – 500. Однако параллелизм решения СЛАУ следует внедрять для заметно больших размерностей матрицы.

Литература

1. OpenMP Application Programming Interface. Version 6.0 Preview 1, November 2022. URL: <https://www.openmp.org/wp-content/uploads/openmp-TR11.pdf>
2. Тарасов Д. В., Лапкин В. В. Использование технологии OpenMP на многопроцессорных вычислительных системах с общей памятью для решения интегральных уравнений // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 150–154.
3. Лапкин В. В., Тарасов Д. В. Применение технологии OpenMP к численному решению интегральных уравнений // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (г. Пенза, Россия, 1–4 июня 2023 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. (в печати)
4. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения : учеб. пособие для вузов. М. : Высшая школа, 2000. 266 с.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М : Главная редакция физико-математической литературы, 3-е изд., 1984. 752 с.
6. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. М. : Мир, 1979. 392 с.
7. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.554-564>

MSC 65Y05

On the application of OpenMP technology for the numerical solution of integral equations

D.V. Tarasov, V.V. Lapkin

Penza State University

Abstract: The expediency of parallelization of program code using OpenMP technology for numerical solution of integral equations is studied. Methods with different computational complexity were chosen as methods for solving integral equations: the collocation method and the finite element method. The paper presents the results of measuring the time when parallelism is performed both for individual stages of the solution (calculation of integrals by quadrature formulas, solving a system of linear algebraic equations) and for the problem as a whole.

Keywords: OpenMP technology, integral equations, parallel computing.

References

1. OpenMP Application Programming Interface. Version 6.0 Preview 1, November 2022. URL: <https://www.openmp.org/wp-content/uploads/openmp-TR11.pdf>
2. Tarasov D. V., Lapkin V. V. Using OpenMP technology on multiprocessor computing systems with shared memory to solve integral equations. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. po materialam XVII Vseros. s mezhd. uchastiem nauch.-tekhn. konf. (g. Penza, Rossiya, 28 noyabrya – 3 dekabrya 2022 g.)* [Analytical and numerical methods for modeling natural science and social problems: proceedings of the 17th All-Russian scientific and engineering conference with international participation], Penza, 2022. P. 150–154. (In Russ.)
3. Lapkin V. V., Tarasov D. V. Application of OpenMP technology to numerical solution of integral equations. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem : sb. st. po materialam XVII Vseros. s mezhdunar. uchastiem nauch.-tekhn. konf. (g. Penza, Rossiya, 1–4 iyunya 2023 g.)* [Mathematical and computer modeling of natural science and social problems: proceedings of the 17th All-Russian scientific and engineering conference with international participation], Penza, 2023. (in print) (In Russ.)
4. Verzhbitsky V. M. Numerical methods. *Lineynaya algebra i nelineynye uravneniya : ucheb. posobie dlya vuzov.* [Linear algebra and nonlinear equations : textbook. manual for universities]. Moscow: Vysshaya shkola, 2000, 266 p. (In Russ.)
5. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 3rd ed., 1984, 752 p. (In Russ.)
6. Segerlind L. *Primenenie metoda konechnykh elementov: per. s angl.* [Application of the finite element method: trans. from English], Moscow: Mir, 1979, 392 p. (In Russ.)

7. Tarasov D. V. Solution of integral equations of linear antenna theory by finite element method. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2023. 25. 1. P. 554-564. (In Russ.) DOI:
<https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.554-564>

УДК 517.91

Выбор методов решения задачи флюидодинамического моделирования в коллекторе трещиновато-порового типа*

Узянбаев Р.М.^{1,2}, Бобренёва Ю.О.², Поляков С.В.^{2,3}, Тишкин В.Ф.^{2,3}

Уфимский государственный нефтяной технический университет¹,
Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН²,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН³

Аннотация: Работа посвящена численным методам решения задачи моделирования массопереноса двухфазной жидкости в карбонатном коллекторе. Задача осложнена наличием двух сред, вложенных друг в друга (система трещин и поровая часть коллектора), что усложняет ее численный анализ. Для численного решения задачи в одномерном случае рассмотрены и реализованы в виде программного модуля явная и неявная разностные схемы на неравномерной сетке. Выполнены вычислительные эксперименты, на основе которых проведен сравнительный анализ реализованных методов.

Ключевые слова: математическое моделирование, система уравнений двухфазной фильтрации, коллектор трещиновато-порового типа, пьезопроводность, двойная пористость, явные и неявные разностные схемы.

1. Постановка задачи

Применение численных методов для рассматриваемой в данной работе задачи обуславливается невозможностью решения задачи аналитическим методом [1]. Как правило, при решении задач с применением численных методов рассматриваются разные вычислительные алгоритмы с целью определения наиболее эффективного [2-5]. Задача, представленная в статье, в дальнейшем подразумевает пространственное моделирование массопереноса, поэтому на первом этапе стоит цель подобрать наилучший алгоритм для решения в одномерной постановки.

В работе рассматривается фильтрация двухфазной слабо сжимаемой жидкости в рамках модели двойной пористости в трещиновато-пористой среде [6, 7]. Трещиновато-пористую среду будем представлять в виде геометрической модели, которая определяется множеством поровых блоков [8], что необходимо для оценки параметров системы. Размеры трещин превышают размеры пор в поровой части коллектора, но при этом объем их значительно меньше, чем в блоках. В связи с этим будем предполагать, что проницаемость трещин превышает проницаемость поровых блоков, а пористость в системе трещин, наоборот, меньше, чем в поровом коллекторе. Перенос жидкости происходит по трещинам, а поровые блоки только содержат запасы флюида. Массообмен между системами происходит за счет разности давлений.

Математическое описание изотермического процесса массопереноса представлено дифференциальными уравнениями второго порядка и состоит из законов сохранения массы и импульса (закон Дарси).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 21-71-20047).

$$\frac{\partial(\phi^\alpha \rho_o^\alpha S_o^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_o^\alpha \vec{U}_o^\alpha) + q_o^\alpha = 0, \quad q_o^m = -q_o^f = -\rho_o^m \sigma \lambda_o^m (P^f - P^m), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\phi^\alpha \rho_w^\alpha S_w^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_w^\alpha \vec{U}_w^\alpha) - q_w^\alpha = 0, \quad q_w^m = -q_w^f = -\rho_w^m \sigma \lambda_w^m (P^f - P^m), \quad (2)$$

$$\lambda_o^m = \frac{k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}, \quad \lambda_w^m = \frac{k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}, \quad (3)$$

$$U_o^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{ro}(S_o^\alpha)}{\mu_o} \text{grad} P^\alpha, \quad U_w^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{rw}(S_w^\alpha)}{\mu_w} \text{grad} P^\alpha. \quad (4)$$

Здесь $\alpha = f, m$, где f – система трещин, m – система матриц, $i = o, w$, где o – нефть, w – вода, P^f – пластовое давление в сети трещин (Па), P^m – пластовое давление в матрице (Па), ϕ^f – пористость в трещинах, ϕ^m – пористость в матрице, ρ_o^α – плотность нефти (г/м^3), ρ_w^α – плотность воды (г/м^3), S_i^f – насыщенность нефти/воды в системе трещин, S_i^m – насыщенность нефти/воды в матрице, U_i^α – скорость течения нефти/воды, q_j – дебит жидкости ($\text{м}^3/\text{сут}$), q_i^α – функция перетока между матрицей и трещинами, σ – коэффициент трещиноватой породы ($1/\text{м}^2$), k^α – абсолютная проницаемость (м^2), k_{rw} и k_{ro} – относительные фазовые проницаемости, μ_o – вязкость нефти (Па·с), μ_w – вязкость воды (Па·с).

Для поставленной задачи рассматриваются следующие начальные и граничные условия:

$$P^m|_{t=0} = P_0, P^f|_{t=0} = P_0, P^f|_{x=0} = P_w, \left. \frac{\partial P^f}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Для численного решения рассматриваемой системы уравнений двухфазной фильтрации в коллекторе трещиновато-порового типа применялись два метода IMPES (неявный по давлению и явный по насыщенности) и IMPIS (неявный по давлению и неявный по насыщенности) [9].

На первом этапе для решения поставленной задачи проводим расщепление по физическим процессам, в результате которого получаем систему уравнений для первого функционального блока по пьезопроводности. Далее система уравнений линеаризуется по методу хорд. Полученные дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия аппроксимируются их сеточными аналогами по неявной схеме [10]. В результате аппроксимации получаем систему линейных алгебраических уравнений, которые сводятся к общему виду:

$$-A_{pk} \delta P_{k-1}^f + C_{pk} \delta P_k^f - B_{pk} \delta P_{k+1}^f = \Phi_{pk}, \quad (6)$$

коэффициенты для (6) выглядят следующим образом:

$$\Phi_{pk} = -F^{fs} - \tau \left\{ \frac{(\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f) \approx}} + \frac{(\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f) \approx}} \right\} \Phi^{ms}, \quad (7)$$

$$A_{pk} = \frac{\tau}{\left[(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k-1/2}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k-1/2} k_{rw}^{ups(k-1/2)} \right\} + \frac{\tau}{\left[(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k-1/2}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k-1/2} k_{ro}^{ups(k-1/2)} \right\}, \quad (8)$$

$$B_{pk} = \frac{\tau}{\left[(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+1/2}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k+1/2}^s k_{rw(k+1/2)}^{ups} \right\} + \frac{\tau}{\left[(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+1/2}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k+1/2}^s k_{ro(k+1/2)}^{ups} \right\}, \quad (9)$$

$$C_{pk} = \frac{(S_w^f)^{(\delta 1f)} \approx}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \approx} (\bar{\phi}^f \rho_w^f)_{P_f}^{\prime S} + \frac{(1 - S_w^f)^{(\delta 1f)} \approx}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \approx} (\bar{\phi}^f \rho_o^f)_{P_f}^{\prime S} + \frac{\tau}{\left[(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{rw(k+\frac{1}{2})}^{ups} + \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{rw(k-\frac{1}{2})}^{ups} \right\} + \frac{\tau}{\left[(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{ro(k+\frac{1}{2})}^{ups} + \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{ro(k-\frac{1}{2})}^{ups} \right\} + \left\{ \frac{\tau}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \approx} (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s (1 - \pi_m^s) \right\}_k + \left\{ \frac{\tau}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \approx} (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s (1 - \pi_m^s) \right\}_k. \quad (10)$$

Для решения СЛАУ (6) использовался метод скалярной прогонки. В результате решения СЛАУ получаем значение давления. Полученные значения давления позволяют перейти к решению второго блока относительно переноса насыщенности.

Принято, что насыщенности воды и нефти в сумме дают единицу, поэтому насыщенность нефти выражается через насыщенность воды и все расчеты проводятся относительно воды. Далее, аналогично уравнению для пьезопроводности, система уравнений линейризуется методом хорд. Полученные дифференциальные уравнения аппроксимируются их сеточными аналогами по явной и неявной схеме. Получаем СЛАУ для переноса насыщенностей:

$$-A_{S_{wk}}^f \delta S_{wk-1}^f + C_{S_{wk}}^f \delta S_{wk}^f - B_{S_{wk}}^f \delta S_{wk+1}^f + E_{S_{wk}} \delta S_{wk}^m = 0 - L^{f \approx}, \quad (11)$$

где коэффициенты выглядят следующим образом:

$$A_{S_{wk}}^f = -\tau \left\{ \left[\rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k-1/2}^{s+1} (P_k^f - P_{k-1}^f)^{s+1} \left[(k_{rw})'_{S_{wk-1}^f} \right]_{upink}^s \right\}, \quad (12)$$

если $P_k^f < P_{k-1}^f$, $A_{S_{wk}}^f \geq 0$,

$$B_{S_{wk}}^f = \tau \left\{ \left[\rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k+1/2}^{s+1} (P_{k+1}^f - P_k^f)^{s+1} \left[(k_{rw})'_{S_{wk+1}^f} \right]_{upink}^s \right\}, \quad (13)$$

если $P_k^f < P_{k+1}^f$, $B_{S_{wk}}^f \geq 0$,

$$C_{S_{wk}}^f = (\bar{\phi}^f \rho_w^f)_k^{s+1} - \tau \left\{ \left[\rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}}^{s+1} (P_{k+1}^f - P_k^f)^{s+1} \left[(k_{rw})'_{S_{wk}^f} \right]_{upink}^s \right\} - \tau \left\{ \left[\rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k-\frac{1}{2}}^{s+1} (P_k^f - P_{k-1}^f)^{s+1} \left[(k_{rw})'_{S_{wk}^f} \right]_{upink}^s \right\}. \quad (14)$$

В сеточных аппроксимациях a^{\approx} значения на неявном слое по времени \hat{t} берутся на $s + 1$ уже вычисленной итерации, если они связаны с давлением (P^{s+1}), и s -й итерации, если они связаны с водонасыщенностью (S_w^s), δt – вес по времени.

Здесь выражение в первой квадратной скобке рассматривается для $P_k^f > P_{k+1}^f$, а выражение во второй квадратной скобке – для $P_k^f > P_{k-1}^f$. Очевидно, при достаточно малых шагах по времени $C_{Swk}^f - A_{Swk}^f - B_{Swk}^f > 0$.

Полученное уравнение аналогично уравнению пьезопроводности решается с помощью скалярной прогонки на каждом временном слое. Приращение давления на итерации представляется следующим образом:

$$\delta P^m = \delta P^{ms+1} - P^{ms}, \quad \delta P^f = \delta P^{fs+1} - P^{fs}. \quad (15)$$

Проведены вычислительные эксперименты для тестовой задачи. На рис. 1 представлены кривые изменение водонасыщенности по пространству при различных значениях проницаемости, которые показали, что чем проницаемость выше, тем скорость насыщения водой быстрее.

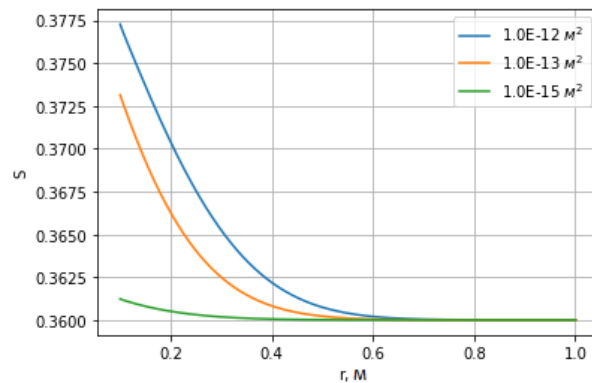


Рис. 1. Изменение водонасыщенности по пространству при различных значениях проницаемости.

2. Сравнение реализованных методов флюидодинамического моделирования в коллекторе трещиновато-порового типа

Неявный метод по сравнению с явным требует дополнительных вычислений и реализуется сложнее. На каждом слое схема представляет собой систему линейных уравнений. Правые части этих уравнений известны, поскольку содержат значения решения с предыдущей итерации. В методе IMPIS при его реализации итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не достигается заданная точность по насыщенности. При этом требуется меньше вычислительного времени (расчет ведется с большими временными шагами), даже с учетом того, что уравнения решаются на каждом временном шаге.

При реализации задачи явным методом (IMPES) требуется вести расчет с малым шагом по времени, чтобы погрешность результата оставалась ограниченной.

Таким образом, реализовав оба метода для рассматриваемой задачи, авторы пришли к выводу, что неявный и явный методы различаются в подходе к выбору временного шага. В IMPIS методе реализация каждого временного шага требует итерационной сходимости, но мы при этом можем задавать более крупные шаги по времени. С другой стороны, в IMPES алгоритме каждый временной шаг не обязан сходиться,

но для того, чтобы решение было точным, приходится выбирать более мелкий шаг по времени.

В рамках исследования расчеты для явной и неявной схемы проводились с одинаковым шагом по времени. В результате расчетов полученные решения при явном и неявном методах отличались несущественно (рис. 2).

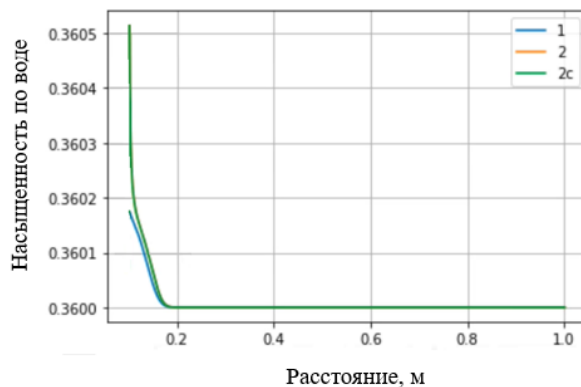


Рис. 2. Изменение насыщенности, рассчитанной по схемам:
1 – неявная, 2 – явная, 2с – симметричная.

Далее были проведены расчеты по симметричной (явно-неявной) схеме. Результаты симметричной схемы полностью совпали с результатами явной схемы (рис. 2). Для дальнейших расчетов будет применена симметричная схема, поскольку для нее область вычислительной устойчивости по сравнению с явной схемой значительно шире.

Литература

1. Голф-Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. [ред.] Ковалева А.Г. [перев.] Голованова П.К., Власенова В.В., Покровский В.В. Бардина Н.А. М.: Недра, 1986. 608 с.
2. Борисов В.Е., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Явные схемы для задач фильтрации многофазного многокомпонентного флюида в пористой среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 92. 27 с
3. Люпа А.А., Савенков Е.Б. Модель двухфазной фильтрации с релаксацией потока и анализ эффективности применения явных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 129. 16 с. doi:10.20948/prepr-2016-129
4. Жалнин Р.В., Масягин В.Ф., Пескова Е. Е., Тишкин В. Ф. Применение метода Галеркина с разрывными базисными функциями к исследованию динамики изменения температуры и давления в пласте с нагнетательной скважиной и трещиной гидроразрыва // Инженерные технологии и системы. – 2021. – Т. 31, № 1. – с. 161–174. DOI 10.15507/2658-4123.031.202101.161-174.
5. Блонский А. В., Савенков Е. Б., Моделирование двухфазных течений в трещиноватой среде с кавернами, Матем. моделирование, 31:2 (2019), 78–94; Math. Models Comput. Simul., 11:5, 2019, 778–788

6. Тугарова М.А. Породы-коллекторы: Свойства, петрографические признаки, классификации: учебно-методическое пособие. СПб.: С.-Петербургский гос. университет, 2004. 36 с.
7. Черницкий А.В. Геологическое моделирование нефтяных залежей массивного типа в карбонатных трещиноватых коллекторах. М.: ОАО «РМНТК Нефтеотдача», 2002. 254 с.
8. Warren, J.E., Root, P.J.: The behaviour of naturally fractured reservoirs. J. Soc. Petrol. Eng. 3(03), 245–255 (1963)
9. Aziz, H.: Mathematical Modeling of Reservoir Systems. Institute for Computer Research, Moscow-Izhevsk (2004)
10. Uzyanbaev, R.; Bobreneva, Yu.; Poveshchenko, Yu.; Podryga, V.; Polyakov, S. Modeling of two-phase fluid flow processes in a fractured-porous type reservoir using parallel computations. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham. **2022**, 1618, 276–292.

MSC 34D20

Choice of Methods for Solving the Problem of Fluid Dynamic Modeling in a Fractured-Porous Reservoir

R.M. Uzyanbaev^{1,2}, Y.O. Bobreneva², S.V. Polyakov^{2,3}, V.F. Tishkin^{2,3}

Ufa State Petroleum Technological University¹, Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences²,
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS³

Abstract: The work is devoted to numerical methods for solving the problem of modeling the mass transfer of a two-phase fluid in a carbonate reservoir. The problem is complicated by the presence of two media embedded in each other (a system of fractures and a pore part of the reservoir), which complicates its numerical analysis. For the numerical solution of the problem in the one-dimensional case, explicit and implicit difference schemes on a non-uniform grid are considered and implemented as a software module. Computational experiments were performed, on the basis of which a comparative analysis of the implemented methods was carried out.

Keywords: mathematical modeling, system of equations for two-phase filtration, fractured porous reservoir, piezoconductivity and double porosity, explicit and implicit difference schemes.

References

1. Golf-Racht, T.D.: Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering. Elsevier scientific publishing company, A-O-NY (1982) (in Russian)
2. Borisov V.E., Kritskiy B.V., Savenkov E.B. Explicit Schemes for Problems of Filtration of a Multiphase Multicomponent Fluid in a Porous Medium // Preprint of IPM. 2013. № 92. 27 p (in Russian)
3. Lyupa A.A., Savenkov E.B. Two-Phase Flow Model with Flow Relaxation and Effectiveness Analysis of the Explicit Schemes Application // Preprint of IPM. 2016. № 129. 16 p. doi:10.20948/prepr-2016-129 (in Russian)
4. Zhalnin R.V., Masyagin V.F., Peskova E.E., et al. Application of the Discontinuous Galerkin Method to the Study of the Dynamics of Temperature and Pressure Changes in a Formation with an Injection Well and a Hydraulic Fracture. *Inzhenereremye tekhnologii i sistemy = Engineering Technologies and Systems*. 2021; 31(1):161-174. DOI: <https://doi.org/10.15507/2658-4123.031.202101.161-174>
5. Blonsky A.V., Savenkov E.B., "Two-Phase Flow Modelling Within Fractured Vuggy Reservoir", , 78–94; *Math. Models Comput. Simul.*, 11:5 (2019), 778–788 (in Russian)
6. Tugarova, M.A.: Reservoir Rocks: Properties, Petrographic Features, Classifications. Educational and methodical manual, St. Petersburg University, SPb (2004) (in Russia)
7. Chernitskii, A.V.: Geological Modeling of Oil Fields in Massive Type of Carbonate Fractured Reservoirs. «RMNTK Nefteotdacha», Moscow (2002) (in Russian)

8. Warren, J.E., Root, P.J.: The behaviour of naturally fractured reservoirs. *J. Soc. Petrol. Eng.* 3(03), 245–255 (1963)
9. Aziz, H.: *Mathematical Modeling of Reservoir Systems*. Institute for Computer Research, Moscow-Izhevsk (2004)
10. Uzyanbaev, R.; Bobreneva, Yu.; Poveshchenko, Yu.; Podryga, V.; Polyakov, S. Modeling of two-phase fluid flow processes in a fractured-porous type reservoir using parallel computations. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham. **2022**, 1618, 276–292. (in Russian)

УДК 519.63

Математическая модель каталитического синтеза метил-трет-бутилового эфира*

Усманова А.А.¹, Коледина К.Ф.^{1,2}

Институт нефтехимии и катализа РАН¹,
Уфимский государственный нефтяной технический университет²

Аннотация: В статье на основе экспериментально разработанной схемы химических превращений построена математическая модель синтеза метил-трет-бутилового эфира межмолекулярной дегидратацией трет-бутанола с метанолом с использованием цеолитного катализатора НУ с иерархической структурой. Математическая модель основана на законе действующих поверхностей с учетом процессов адсорбции и десорбции на поверхности катализатора. Решение обратной задачи в виде задачи глобальной оптимизации позволило определить кинетические константы.

Ключевые слова: математическое моделирование, метил-трет-бутиловый эфир, межмолекулярная дегидратация, модель Ленгмюра–Хиншелвуда, глобальная оптимизация.

1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается синтез метил-трет-бутиловых эфиров трет-бутанола с метанолом. В качестве катализатора был выбран гранулированный микро-, мезо- и макропористый цеолит состава $\alpha\text{Na } 0.94\% \text{ НУ (НУ}_{mmm})$ [2].

Построение кинетической модели состоит из прямой и обратной задачи. Для расчета использовался пакет прикладных программ MATLAB. Прямая задача представляет собой жесткую систему дифференциальных уравнений, ее решение находится с помощью специализированного одношагового метода ode23s, использующего модифицированную формулу Розенброка 2-го порядка [3]. Для решения обратной кинетической задачи применен генетический алгоритм глобальной оптимизации – метод решения оптимизационных задач, основанный на биологических принципах естественного отбора и эволюции [4].

2. Результаты и их обсуждение

Математическое описание прямой задачи нестационарной химической кинетики представляет собой систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (СОНДУ) с начальными данными [5] – задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями при $\tau = 0$:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^J \nu_{ij} \omega_j, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, I}. \quad (1)$$

Здесь x_i – концентрация реагентов реакции, мольные доли; τ – условное вре-

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема № FMRS-2022-0078).

мя контакта, s ; ν_{ij} – стехиометрические коэффициенты; J – количество стадий; I – количество веществ; ω_j – скорость j -ой стадии, 1/с.

В работе принято предположение, что в гетерогенном катализе компоненты адсорбируются на поверхности катализатора и приходят в состояние теплового равновесия с этой поверхностью [6]. По окончании реакции происходит десорбция образованных продуктов реакции. В связи с этим в уравнение изменения скоростей стадий вводится учет доли поверхности катализатора, занятой реагентами, в результате процессов адсорбции и десорбции:

$$\omega_j = k_j \cdot \prod_{i=1}^I (x_i)^{|\alpha_{ij}|} \cdot \prod_{i=1}^I (\theta_i)^{|\alpha_{ij}|} - k_{-j} \cdot \prod_{i=1}^I (x_i)^{\beta_{ij}} \cdot \prod_{i=1}^I (\theta_i)^{\beta_{ij}}, k_j = k_j^0 \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right). \quad (2)$$

Здесь x_i – концентрация вещества, моль/л; θ – доля поверхности, занятая i -ым компонентом; α_{ij} – отрицательные элементы матрицы (ν_{ij}); β_{ij} – положительные элементы (ν_{ij}); k_j, k_{-j} – константа скорости j -ой стадии, 1/с; k_j^0 – предэкспоненциальные множители, 1/с; E_j – энергии активации прямой и обратной реакций, кал/моль; R – 2 кал/(моль К); T – температура, К;

На основании описанной кинетики (1)-(2) кинетические уравнения скоростей химических реакций каталитического синтеза МТБЭ имеют вид (3), где вещества с концентрациями x_i – постоянные, а с θ_i – промежуточные, получаемые в связи с адсорбцией и десорбцией постоянных веществ на катализаторе:

$$\begin{cases} X_{10} + X_2 \rightarrow X_{11} \\ X_{11} \rightarrow X_8 + X_7 + X_{10} \\ X_8 + X_{10} \rightarrow X_{12} \\ X_{12} + X_4 \rightarrow x_5 + X_{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = k_1 x_2 \theta_{10} \\ \omega_2 = k_2 \theta_{11} \\ \omega_3 = k_3 x_8 \theta_{10} \\ \omega_4 = k_4 x_4 \theta_{12} \end{cases} \quad (3)$$

X_{10} – НУ; X_2 – $(\text{CH}_3)_3\text{CONH}$; X_{11} – $(\text{CH}_3)_3\text{CONH}_2\text{Y}$; X_8 – CH_2 ; X_7 – H_2O ; X_{12} – $(\text{CH}_3)_3\text{CY}$; X_4 – MeOH ; X_5 – $(\text{CH}_3)_3\text{COMe}$; (нумерация веществ из общей схемы для всех эфиров); k_i – константа скорости.

СОНДУ зависимостей концентраций компонентов от τ имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{d\tau} = -\omega_1 \\ \frac{dx_4}{d\tau} = -\omega_4 \\ \frac{dx_5}{d\tau} = \omega_4 \\ \frac{dx_7}{d\tau} = \omega_2 \\ \frac{dx_8}{d\tau} = \omega_2 - \omega_3 \end{cases} \quad (4)$$

Начальные данные при $T = 160^\circ \text{C}$: $x_2 = 3.91$ л/моль; $x_4 = 15.65$ л/моль; $\theta_{10} = 1$; $x_i = 0$ при $i = 5, 8$; $\theta_i = 0$ при $i = 11, 12$.

Исходя из условия квазистационарности можно найти концентрации промежуточных образований θ_i [6]:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_{10}}{d\tau} = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_{14} \\ \frac{d\theta_{11}}{d\tau} = \omega_1 - \omega_2 \\ \frac{d\theta_{12}}{d\tau} = \omega_3 - \omega_4 \end{cases} \quad (5)$$

Определение значений кинетических параметров ведется на основе решения обратной задачи – решается задача оптимизации для функционала отклонения экспериментальных данных концентраций компонент от расчетных значений. Условием выхода из алгоритма являлось минимальное изменение значения функционала. Функционал минимизации имеет вид (6) [7]:

$$EE(k_j) = \sum_{i=1}^I \sum_{p=1}^P \frac{|x_{i,p}^{exp} - x_{i,p}^{calc}|}{x_{i,p}^{exp}} \rightarrow min, \quad (6)$$

где P – количество опытов для каждого компонента; $x_{i,p}^{exp}$ и $x_{i,p}^{calc}$ – экспериментальные и рассчитанные значения концентраций компонентов.

Найденные при решении обратной кинетической задачи численные значения кинетических констант k_j при температуре 160°C в таблице 1.

Номер стадии	$k_j (160^\circ C), 1/c$
1	0.0335
2	0.71
3	0.277
4	0.006

Таблица 1. Параметры кинетической модели получения МТБЭ на НУ

На рис. 1 приведены кинетические зависимости (экспериментальные и расчетные) расходования трет-бутанола, образования метил-трет-бутилового эфира.

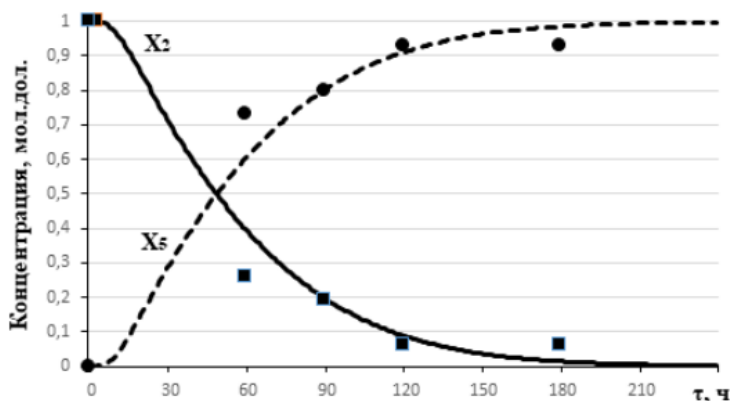


Рис. 1. Кинетические зависимости изменения концентраций трет-бутанола (X_2) и МТБЭ (X_5) при $T = 160^\circ C$ в присутствии НУ (сплошные линии – расчетные данные, маркеры – экспериментальные данные).

Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает, что кинетическая модель (3)-(5) с параметрами, указанными в таблице 1, позволяет воспроизвести результаты опытов в пределах погрешности экспериментальных данных.

3. Заключение

Представлена кинетическая модель синтеза МТБЭ и определены параметры модели с использованием генетического алгоритма глобальной оптимизации при решении обратной задачи. Полученные параметры модели могут быть использованы при проектировании реакционных узлов промышленных схем получения МТБЭ.

Литература

1. Байгузина А.Р., Галлямова Л.И., Хуснутдинов Р.И. Синтез алкил-трет-бутиловых эфиров в присутствии цеолитных катализаторов // Вестник Башкирского университета. 2020. Т.25. № 4. С. 748-755.
2. Travkina O.S., Agliullin M.R., Filippova N.A., Khazipova A.N., Danilova I.G., Grigor'eva N.G., Narender Nama, Pavlov M.L., Kutepov B.I. Template-free synthesis of high degree crystallinity zeolite Y with micro-meso-macroporous structure // RSC Adv. 2017. Vol.7. No.52. P. 32581–32590. <https://doi.org/10.1039/C7RA04742H>
3. Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Comput. J.5, 1963. P. 329-330.
4. Панченко Т.В. Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие // под ред. Ю. Ю. Тарасевича. — Астрахань : Издательский дом «Астраханский университет», 2007. 87 с.
5. Коледина К.Ф., Губайдуллин И.М. // Наука и образование: Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 7. 385 с.
6. Вэйлас С. Химическая кинетика и расчеты промышленных реакторов. М.: Химия, 1967. 416 с.
7. Коледина К.Ф., Губайдуллин И.М., Коледин С.Н., Байгузина А.Р., Галлямова Л.И., Хуснутдинов Р.И. Кинетика и механизм синтеза бензилбутилового эфира в присутствии медьсодержащих катализаторов // Журнал физической химии. 2019. Т.93. № 11. С. 1668-1673.

MSC 544.421

Mathematical model of the catalytic synthesis of methyl-tert-butyl ether

A.A. Usmanova¹, K.F. Koledina^{1,2}

Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS¹, Ufa State Oil Technical University²

Abstract: A mathematical model has been constructed based on an experimentally developed scheme of chemical transformations in the synthesis of methyl tert-butyl ether by intermolecular dehydration of tert-butanol with methanol using a HY zeolite catalyst with a hierarchical structure [1]. The mathematical model is based on the law of active surfaces, taking into account the processes of adsorption and desorption on the catalyst surface. The solution of the inverse problem in the form of a global optimization problem made it possible to determine the kinetic constants.

Keywords: mathematical modeling, methyl tert-butyl ether, intermolecular dehydration, Langmuir–Hinshelwood model, global optimization.

References

1. Baiguzina A.R., Galliamova L.I., Khusnutdinov R.I. Synthesis of alkyl tert-butyl ethers in the presence of zeolite catalysts // Bulletin of the Bashkir University. 2020. Vol.25. No.4. P. 748-755.
2. Travkina O.S., Agliullin M.R., Filippova N.A., Khazipova A.N., Danilova I.G., Grigor'eva N.G., Narender Nama, Pavlov M.L., Kutepov B.I. Template-free synthesis of high degree crystallinity zeolite Y with micro–meso–macroporous structure // RSC Adv. 2017. Vol.7. No.52. P. 32581–32590. <https://doi.org/10.1039/C7RA04742H>
3. Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Comput. J.5. 1963. P. 329-330.
4. Panchenko T.V. Genetic algorithms: teaching aid / ed. Yu. Yu. Tarasevich. - Astrakhan: Astrakhan University Publishing House, 2007. 87 p.
5. Koledina K.F., Gubaidullin I.M. // Science and education: Scientific publication of the Moscow State Technical University. N.E. Bauman. 2013. No.7. 385 p.
6. Valas S. Chemical kinetics and calculations of industrial reactors. Moscow: Chemistry, 1967. 416 p.
7. Koledina K.F., Gubaidullin I.M., Koledin S.N., Baiguzina A.R., Galliamova L.I., Khusnutdinov R.I. Kinetics and mechanism of the synthesis of benzylbutyl ether in the presence of copper-containing catalysts // Journal of Physical Chemistry. 2019. Vol.93. No.11. P. 1668-1673.

УДК 51-76

Устойчивость математической модели развития леса

Шалаева А.А., Мамедова Т.Ф., Егорова Д.К.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Представлена математическая модель развития лесного массива. Модель может быть использована для численного моделирования системы с целью исследования устойчивости решения к непрерывным возмущениям и поиска параметров модели с элементами управления.

Ключевые слова: математическая модель, модель Лотки-Вольтерра, лесной массив, система обыкновенных дифференциальных уравнений, устойчивость.

В данное время все более пристальное внимание отводится проблеме сохранения и восстановления природных ресурсов, в частности, лесного массива. Поскольку лесной массив в своем многообразии является не только важнейшим фактором, оказывающим существенное влияние на экологические процессы, но и играет большую роль в хозяйственной и промышленной деятельности человека. Информация о состоянии и динамике лесных массивов является недостаточной и не отвечает современным требованиям экологического мониторинга, не дает точного ответа на вопросы, какое количество древостоя возобновляется естественным путем, в какой момент времени необходимо привлекать человеческий ресурс.

Один из способов моделирования динамики развития лесного массива основывается в разделении всех единиц лесного массива (деревьев) на возрастные группы. Выявлено, что деревья разных возрастов имеют определённую степень влияния в динамике численности и качества жизнедеятельности друг друга, в частности, деревья разного возраста отличаются высотой, диаметром ствола, потребностью к свету и в целом доступностью к нему. Так, деревья старшего возраста оказывают сильное влияние на корневую систему подроста (деревьев младшего возраста). В работе сформулированы основные требования к модели и исходные данные для моделирования, поставлена концептуальная формулировка данной модели. В частности, важно, чтобы лесонасаждения развивались на замкнутой однородной территории, с одинаковыми климатическими и не влияющими на нее географическими условиями, все лесные насаждения разных возрастных фигур были равномерно распределены на этой территории. Конкуренция и преобладание отдельных видов популяций исключена.

В основе построения математической модели выбрана модель взаимодействия двух и более сообществ Лотки-Вольтерра [1].

Наиболее сложной и актуальной проблемой моделирования реальных процессов является определение параметров модели, таких, чтобы они наиболее точно отражали состояния и развитие системы.

Пусть $x_i(t)$ – количество деревьев в i -ой возрастной группе в момент времени t , где $t = \overline{1, n}$, где n – количество классов разбиения.

Было принято разделить весь лесной массив на три возрастные категории: деревья старшего возраста, среднего и подросты. Количество классов разбиения примем значением равное трем ($n = 3$).

Введем обозначения: x – древостой младшей группы (подросты), y – средне-

возрастные деревья, z – деревья старшей возрастной группы (перестой), $\alpha(y, z)$ – функция, характеризующая скорость рождения деревьев младшего возраста, $\gamma(z)$ – функция гибели деревьев младшего возраста; r и h – коэффициенты гибели деревьев старшей возрастной групп (второй и третьей); g и q – интенсивность перехода деревьев в следующую возрастную группу.

В результате была получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y, z) - \gamma(z)x - g(x), \\ \frac{dy}{dt} = gx - qy - ry, \\ \frac{dz}{dt} = qy - hz. \end{cases} \quad (1)$$

Представленная модель позволяет описать динамику лесных насаждений по Республике Мордовия. Однако, для более полного исследования модели необходимо проанализировать влияние человека на природу, поскольку человеческая деятельность является важным фактором, который необходимо учитывать как для эффективного использования ресурсов, так и для сохранения природы.

Модель может быть использована для численного моделирования системы с целью исследования устойчивости решения к непрерывным возмущениям и поиска параметров модели с элементами управления. Также можно выявить характерные режимы и исследовать допустимость полученных результатов.

Важно отметить, что леса являются важным ресурсом для человечества, поскольку они обеспечивают кислород и являются домом для многих животных. Однако неумеренная вырубка лесов может привести к серьезным экологическим последствиям, таким как ухудшение качества почвы и снижение биоразнообразия. Поэтому использование данной модели может помочь в разработке устойчивых стратегий управления лесными ресурсами, которые учитывают как экономические, так и экологические аспекты [2, 3].

Также, модель может быть использована для прогнозирования будущих изменений в лесных насаждениях и для оценки эффективности различных программ лесопользования. В целом, она является важным инструментом для исследования динамики лесных насаждений и их управления и может помочь в создании устойчивых стратегий управления ресурсами и сохранении природы для будущих поколений.

Литература

1. Чумаченко С.И. Моделирование динамики многовидовых разновозрастных лесных ценозов // Журнал общей биологии. 1999. Т.59, № 4. С. 371-377.
2. Мамедова Т.Ф., Ляпина А.А. Исследование математических моделей взаимодействия многовидовых сообществ // X конференция Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании с участием зарубежных ученых, – Саранск: СВМО, 2022. 4 (14). С. 62–69.
3. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. 302 с.

MSC 94M60

Stability of the forest development's mathematical model

A.A. Shalaeva, T.F. Mamedova, D.K. Egorova

National Research Mordovia State University

Abstract: A mathematical model of forest development is presented. The model can be used for numerical simulation of the system in order to study the stability of the solution to continuous disturbances and search for the parameters of the model with controls.

Keywords: mathematical model, Lotka-Volterra model, forest, system of ordinary differential equations, stability.

References

1. Chumachenko S.I. Modeling the dynamics of multi-species forest cenoses of different ages // Journal of General Biology. 1999. V.59, No. 4. P. 371-377.
2. Mamedova T.F., Lyapina A.A. Research of mathematical models interactions of multispecies communities // X conference Differential equations and their applications in mathematical modeling with the participation of foreign scientists, - Saransk: SVMO, 2022. 4 (14). P.62 - 69.
3. Riznichenko G.Yu., Rubin A.B. Mathematical models of biological production processes. Tutorial. M.: Publishing House of Moscow State University, 1993. 302 p.

УДК 517.9

К вопросу об исследовании вынужденных колебаний линейной системы двух связанных осцилляторов вблизи резонанса

Шаманаев П.А., Осипов Д.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В настоящей работе методом Ляпунова-Шмидта исследуется математическая модель колебаний в системе двух связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром при условии, что на систему действует внешняя периодическая сила с тремя соизмеримыми частотами. Разработанный на основе метода Ляпунова-Шмидта алгоритм реализован в математической библиотеке SymPy Python. В качестве примера рассмотрена некоторая система с фиксированными параметрами. Для нее найдено периодическое решение, построены графики компонент периодических решений и фазовых траекторий.

Ключевые слова: связанные осцилляторы, вынужденные колебания, периодические решения, малый параметр, метод Ляпунова-Шмидта, резонанс

1. Вычисление периодического решения линейной системы двух связанных осцилляторов вблизи резонанса

В работах [1–3] приведены результаты исследования вынужденных колебаний одного и двух связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром. Настоящая работа продолжает исследование таких систем при условии, что на систему действует внешняя периодическая сила с тремя соизмеримыми частотами.

Рассмотрим математическую модель вынужденных колебаний двух связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром [3, 4]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + (n_1^2 + \varepsilon d_{11})q_1 + \left(-\frac{k_3}{m_1} + \varepsilon d_{12}\right)q_2 = F_1(t), \\ \ddot{q}_2 + \left(-\frac{k_3}{m_2} + \varepsilon d_{21}\right)q_1 + (n_2^2 + \varepsilon d_{22})q_2 = F_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

где q_1, q_2 – обобщенные координаты, $k_i > 0$ ($i = \overline{1, 3}$) – коэффициенты жесткости пружин, $n_1^2 = \frac{k_1 + k_3}{m_1}$, $n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}$ – парциальные частоты, d_{ij} , ($i, j = 1, 2$) – некоторые вещественные параметры, ε – малый вещественный параметр, m_1, m_2 – массы грузиков (осцилляторов).

Будем предполагать, что на осцилляторы действуют внешние силы по следующему закону

$$\begin{aligned} F_1(t) &= r_{11} \sin(\omega_1 t + \theta_{11}) + r_{12} \sin(\omega_2 t + \theta_{12}) + r_{13} \sin(\omega_3 t + \theta_{13}), \\ F_2(t) &= r_{21} \sin(\omega_1 t + \theta_{21}) + r_{22} \sin(\omega_2 t + \theta_{22}) + r_{23} \sin(\omega_3 t + \theta_{23}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_{ks}, \theta_{ks}, \omega_k \in \mathbb{R}$, ($k = 1, 2; s = \overline{1, 3}$), $\omega_1 = \alpha\omega_2 = \beta\omega_3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Сформулируем задачу для системы (1) [5, 6]: при достаточно малых вещественных ε найти $\frac{2\pi}{\omega_1}$ -периодическое решение $q_1(t, \varepsilon)$, $q_2(t, \varepsilon)$ системы (1), при условии, что найденное решение $q_1(t, \varepsilon)$, $q_2(t, \varepsilon)$ удовлетворяет условию

$$q_1(t, 0) = Q_1(t), \quad q_2(t, 0) = Q_2(t),$$

где $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ есть $\frac{2\pi}{\omega_1}$ -периодическое решение системы

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + n_1^2 Q_1 - \frac{k_3}{m_1} Q_2 = F_1(t), \\ \ddot{Q}_2 - \frac{k_3}{m_2} Q_1 + n_2^2 Q_2 = F_2(t). \end{cases} \quad (3)$$

Для нахождения $\frac{2\pi}{\omega_1}$ -периодического решения система (1) приводится к нормальной форме, после чего применяется метод Ляпунова-Шмидта, изложенный в [6]. Существование $\frac{2\pi}{\omega_1}$ -периодических решений системы (3) обеспечивается условиями [6], налагаемыми на параметры внешних сил (2). Эти условия имеют вид

$$r_{11} = r_{12} = r_1, \quad \theta_{11} = \theta_1, \quad \theta_{12} = \theta_1 + \pi, \quad (4)$$

$$r_{21} = r_{22} = r_2, \quad \theta_{21} = \theta_2, \quad \theta_{22} = \theta_2, \quad (5)$$

где r_k, θ_k , ($k = 1, 2$) – произвольные вещественные параметры.

В качестве примера рассмотрим систему (1) со следующими безразмерными параметрами

$$m_1 = m_2 = 1, \quad n_1^2 = n_2^2 = 10, \quad k_2 = k_3 = 6, \quad (6)$$

$$d_{11} = -2, \quad d_{22} = 2, \quad d_{12} = d_{21} = 0. \quad (7)$$

Значения частот внешних сил (2) положим равными

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 4, \quad \omega_3 = 8. \quad (8)$$

Для проведения расчетов на основе метода Ляпунова-Шмидта разработан алгоритм, который реализован в математической библиотеке `SymPy Python`.

В результате проведения вычислительного эксперимента для системы (1) с параметрами (4)-(8) получено π -периодическое решение

$$\begin{aligned} q_1(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{2\varepsilon} r_1 \sin(2t + \theta_1) - \frac{1}{2\varepsilon} r_2 \sin(4t + \theta_2) - \frac{\varepsilon - 24}{2(\varepsilon^2 - 720)} r_3 \sin(8t + \theta_3), \\ q_2(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{2\varepsilon} r_1 \sin(2t + \theta_1) - \frac{1}{2\varepsilon} r_2 \sin(4t + \theta_2) + \frac{\varepsilon + 24}{2(\varepsilon^2 - 720)} r_3 \sin(8t + \theta_3). \end{aligned} \quad (9)$$

Из формул (9) следует, что компоненты $q_1(t, \varepsilon)$ и $q_2(t, \varepsilon)$ π -периодического решения системы (1)

- 1) непрерывно зависят от параметров $r_k, \theta_k \in \mathbb{R}$ ($k = \overline{1, 3}$) внешних сил (2);
- 2) имеют полюс первого порядка в точке $\varepsilon = 0$, и, следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ не стремятся к соответствующим компонентам системы (3).

2. Графики периодических решений и фазовых траекторий

Для построения графиков π -периодических решений и фазовых траекторий системы (1) по формулам (9) в качестве параметров внешних сил (2) выберем следующие

$$r_1 = 0.5, \quad r_2 = 0.3, \quad r_3 = 10, \\ \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \theta_3 = \pi.$$

На рис. 1 и 2 приведены графики компонент $q_1(t, \varepsilon)$ и $q_2(t, \varepsilon)$ π -периодических решений и фазовых траекторий системы (1), соответственно, при значениях ε , равных 0.1, 0.3 и 0.5.

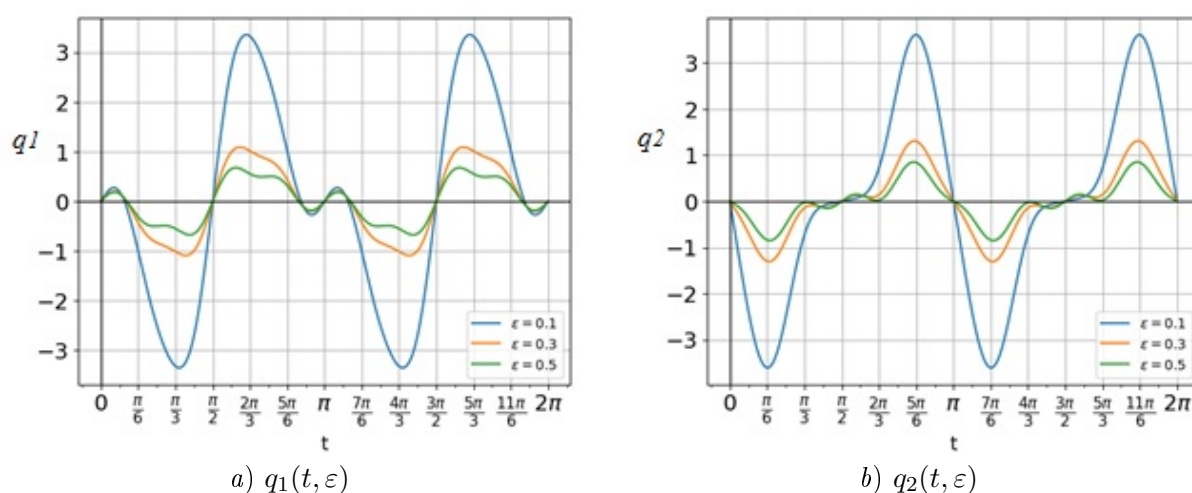


Рис. 1. Графики компонент a) $q_1(t, \varepsilon)$ и b) $q_2(t, \varepsilon)$ π -периодических решений системы (1) при различных ε .

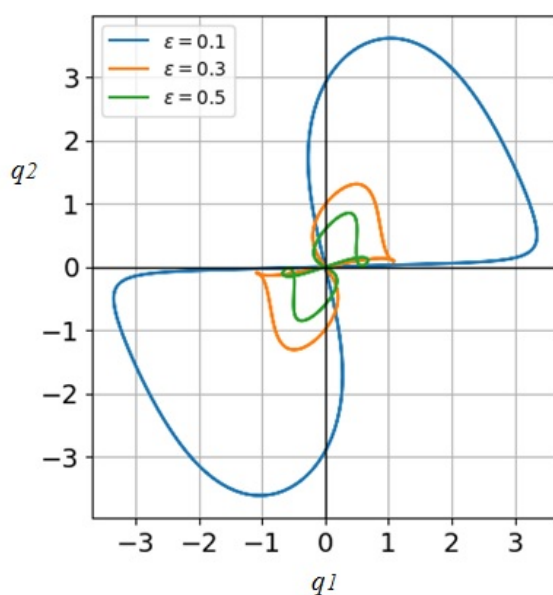


Рис. 2. График фазовой траектории системы (1) в конфигурационном пространстве Oq_1q_2 при различных ε .

Из графиков компонент $q_1(t, \varepsilon)$ и $q_2(t, \varepsilon)$ π -периодических решений и фазовых траекторий системы (1), изображенных на рис. 1 и 2 видно, что при уменьшении параметра ε амплитуда колебаний осцилляторов увеличивается.

Литература

1. Кадрякова М. Р., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О периодических решениях одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в резонансном случае // Огарев-online, 2017. № 13. С. 8–17 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/operiodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistemobyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnomsluchae> (дата обращения: 30.07.2023).
2. Карчиганов А. Ф., Шаманаев П. А. Исследование вынужденных колебаний одной линейной системы двух связанных осцилляторов с малым параметром // Огарев-online, 2020. № 13. С. 8–17 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-odnoj-linejnoj-sistemydvux-svyazannyx-oscillyatorov-s-malym-parametrom> (дата обращения: 30.07.2023).
3. Шаманаев П.А., Прохоров С.А. Исследование вынужденных колебаний линейной системы с двумя степенями свободы и малым параметром методом Ляпунова–Шмидта // Огарев-online, 2021. № 12. С. 83–91 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-linejnoj-sistemy-s-dvumya-stepenyami-svobody-i-malym-parametrom-metodom-lyapunovashmidta> (дата обращения: 30.07.2023).
4. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. СПб.: Лань, 2005. 440 с.
5. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1964. 524 с.
6. Кяшкин А.А., Логинов Б.В., Шаманаев П.А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества, 2016. Т.18, № 1. С. 45–53.

MSC 34C10, 34C25

On the question of studying forced vibrations of a linear system of two coupled oscillators near resonance

P. A. Shamanaev, D. A. Osipov

National Research Mordovia State University

Abstract: The article presents using of the Lyapunov-Schmidt method to study a mathematical model of vibrations in a system of two coupled oscillators near a resonance with a small parameter. It is assumed that an external periodic force with three comparable frequencies acts on the system. The algorithm developed on the basis of the Lyapunov-Schmidt method is implemented in the SymPy Python mathematical library. As an example, a certain system with fixed parameters is considered. A periodic solution is found for it, plots of the components of periodic solutions and phase trajectories are plotted.

Keywords: coupled oscillators, forced vibrations, periodic solutions, small parameter, Lyapunov-Schmidt method, resonance

References

1. Kadryakova M.R., Loginov B.V., Shamanaev P.A. On periodic solutions for a class of linear inhomogeneous systems of ordinary differential equations with small parameter in resonance case // Ogarev-online, 2017. Issue 13. P. 8–17. URL: <http://journal.mrsu.ru/arts/operiodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistemobyknovenykh-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnomsluchae> (access date: 30.07.2023). (In Russian).
2. Karchiganov A.F., Shamanaev P.A. Investigation of forced oscillations of a linear system of two coupled oscillators with a small parameter // Orapeb-online, 2020. Issue 13. P. 8–17. URL: <http://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-odnoj-linejnoj-sistemydvux-svyazannyx-oscillyatorov-s-malym-parametrom> (access date: 30.07.2023). (In Russian).
3. Shamanaev P.A., Prokhorov S.A. Investigation of forced vibrations of a linear system with two degrees of freedom and a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method // Orapeb-online, 2021. Issue 12. P. 83–91. URL: <https://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-linejnoj-sistemy-s-dvumya-stepenyami-svobody-i-malym-parametrom-metodom-lyapunovashmidta> (access date: 30.07.2023). (In Russian).
4. Strelkov S.P. Vvedenie v teoriyu kolebanij [Introduction to the theory of oscillations]. St. Petersburg: Lan, 2005. 440 p. (In Russian).
5. Vainberg M. M., Trenogin V. A. Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravnenij [Branching theory of solutions of nonlinear equations]. M.: Nauka, 1964. 524 p. (In Russian).
6. Kyashkin A.A., Loginov B.V., Shamanaev P.A. [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator

in the derivative and the disturbance in the form of small linear term] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 2016. Vol.18. No.1. P. 45–53 (In Russian).

УДК 517.925+531.552

Инвариантные дифференциальные формы динамических систем с конечным числом степеней свободы со знакопеременной диссипацией

Шамолин М.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова

Аннотация: Для рассматриваемого класса однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям предъявлены полные наборы тензорных инвариантов – инвариантных дифференциальных форм. Показана связь между наличием данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования рассматриваемых геодезических, потенциальных и диссипативных динамических систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система с диссипацией, интегрируемость, трансцендентный тензорный инвариант.

Как известно [1], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [2–4]).

В качестве примеров тензорных инвариантов приведем, прежде всего, скалярные инварианты – первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля – поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из m дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении $(n + 1)$ -мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее $(n + 1)$ -мерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к n -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [5, 6]. Динамические системы, описывающие движение такого

маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n -мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n + 1)$ -мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n -мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.

Важные случаи интегрируемых систем с n степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в других работах автора. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [2, 3, 5]). Показана связь между наличием данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

Литература

1. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2019. Т.74. № 1. С. 117-148.
2. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. М.: ЛЕНАНД, 2019. 456 с.
3. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности. М.: ЛЕНАНД, 2021. 400 с.
4. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т.495. № 1. С. 84-90.
5. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т.497. № 1. С. 23-30.
6. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т.79. № 3. С. 307-316.

MSC 37C

Invariant differential forms of various dissipation dynamical systems with a finite number of degrees of freedom

M.V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University

Abstract: For the considered class of homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth finite-dimensional manifolds, complete sets of tensor invariants, i. e. invariant differential forms, are presented. The connection between the presence of these invariants and the full set of the first integrals which necessary for the integration of the considered geodesic, potential, and dissipative dynamical systems is shown. At the same time, the investigated force fields introduce dissipation of different signs into the systems and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system with dissipation, integrability, transcendental tensor invariant.

References

1. Kozlov V.V. Tensor invariants and integration of differential equations // Russian Math. Surveys. 2019. V.74. No.1. P. 111-140.
2. Shamolin M.V. Integrable dynamical systems with dissipation. Book 1. Rigid body in nonconservative force field [in Russian]. Moscow, LENAND, 2019. 456 p.
3. Shamolin M.V. Integrable dynamical systems with dissipation. Book 2. Fixed pendulums of different dimensions [in Russian]. Moscow, LENAND, 2021. 400 p.
4. Shamolin M.V. New Cases of Homogeneous Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Three-Dimensional Manifolds // Doklady Mathematics. 2020. V.102. No.3. P. 518-523.
5. Shamolin M.V. New Cases of Homogeneous Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds // Doklady Mathematics. 2021. V.103. No. 2. P. 85-91.
6. Kozlov V.V. Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. V.79. No.3. P. 209-216.

УДК 517.91

Об оценке снизу гиперсингулярного оператора перидинамики

Шералиев Ш.Н.

Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в городе Ташкенте

Аннотация: Для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона-Зигмунда, связанного с задачами перидинамики, получена оценка снизу. Тем самым установлено, что найденная ранее оценка сверху является точной.

Ключевые слова: сингулярные операторы, неравенство Кальдерона-Зигмунда, перидинамика.

Основное уравнение перидинамики, предложенное в работе [1], в линейризованном варианте имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - A_s u(x, t) = f(x, t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

где сингулярный интегральный оператор A_s определяется равенством

$$A_s u(x) = \int_D K_s(x, y)[u(y) - u(x)] dy.$$

В этом уравнении D – ограниченная n -мерная ($n \geq 3$) область с кусочно-гладкой границей, $u : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – неизвестная функция, $n \times n$ -матрица-функция K_s , определенная в $D \times D$, является заданным ядром интегрального оператора, функция $f : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ представляет собой внешнюю силу.

Ядро $K_s(x, y)$, описывающее распределённое взаимодействие между частицами твёрдого тела D , имеет носитель в ρ -окрестности диагонали $\{x = y\}$, число ρ при этом называется горизонтом взаимодействия. На диагонали ядро $K_s(x, y)$ может иметь неинтегрируемую особенность, компенсируемую разностью $u(y) - u(x)$. В этом случае интегральный оператор A_s является сингулярным и может оказаться неограниченным.

В настоящей работе мы рассматриваем интегральный оператор A_s в виде свёртки в пространстве периодических функций, а именно:

$$A_s u(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K_s(x - y)[u(y) - u(x)] dy, \quad x \in \mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n. \quad (1)$$

Важный класс операторов вида (1) составляют операторы с сингулярным ядром

$$K_s(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^\lambda}, \quad x \in \mathbb{T}^n,$$

где [1, формула (61)].

$$\Omega(x) = \frac{x \otimes x}{(x, x)}. \quad (2)$$

Фиксируем ρ из интервала $0 < \rho < \pi$ и обозначим символом $\chi(r)$ неотрицательную функцию, принадлежащую $C^\infty(\mathbb{R})$, равную 1 при $r \leq \frac{\rho}{2}$ и нулю при $r \geq \rho$.

Основной целью настоящей работы является изучение интегрального оператора

$$Af(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \chi(|y|)[f(x-y) - f(x)] dy. \quad (3)$$

Отметим, что в случае, когда $\Omega(x)$ является произвольной гладкой однородной матрицей-функцией, важную роль играет её среднее значение по единичной сфере

$$\Omega^* = \frac{1}{\omega_n} \int_{|x|=1} \Omega(x) d\sigma(x), \quad \omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

В случае, когда $\Omega^* = 0$, т. е. все элементы Ω_{ij}^* ($i, j = \overline{1, n}$) этой матрицы равны нулю, интегральный оператор (3) является оператором типа Кальдерона-Зигмунда (см. [2]). Известно, что в этом случае оператор (3) естественным образом определяется в классе гладких функций и продолжается до оператора, непрерывного из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_p(\mathbb{T}^n)$. При этом условие $\Omega^* = 0$ является необходимым для справедливости данного утверждения.

В рассматриваемом нами случае среднее значение Ω^* ядра (2) отлично от нуля, вследствие чего оператор (3) не является ограниченным из $L_2(\mathbb{T}^n)$ в $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Для того, чтобы сформулировать основной результат, введем функциональное пространство периодических функций с логарифмической гладкостью.

Определим самосопряжённый псевдодифференциальный оператор первого порядка

$$\Lambda f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx} \sqrt{1 + |k|^2},$$

где

$$f_k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Иными словами, $\Lambda = \sqrt{1 - \Delta}$, где Δ – самосопряжённое расширение в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператора Лапласа, отвечающее периодическим граничным условиям. Отметим, что областью определения оператора Δ является пространство Соболева $W_2^2(\mathbb{T}^n)$, соответственно $D(\Lambda) = W_2^1(\mathbb{T}^n)$. При этом функция $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит пространству вектор-функций $W_2^1(\mathbb{T}^n)$, если каждая компонента $f_j(x)$ принадлежит обычному пространству $W_2^1(\mathbb{T}^n)$.

Для любого натурального m рассмотрим положительный самосопряжённый в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператор $\log^m(1 + \Lambda)$. Область определения этого оператора обозначим символом $H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$:

$$H_{\log}^m(\mathbb{T}^n) = D(\log^m(1 + \Lambda)).$$

Каждое пространство H_{\log}^m является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k \bar{g}_k \log^{2m} \left(1 + \sqrt{1 + |k|^2} \right).$$

Ассоциированную с этим скалярным произведением норму элемента $f \in H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$ обозначим $\|f\|_m$.

Положим $H_{\log}^0(\mathbb{T}^n) = L_2(\mathbb{T}^n)$. Очевидно, для любого натурального m выполняется равенство:

$$\log(1 + \Lambda)H_{\log}^m(\mathbb{T}^n) = H_{\log}^{m-1}(\mathbb{T}^n), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Из результатов работ [3] и [4] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Для любого натурального m оператор A , определённый равенством (3), действует из $H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$ в $H_{\log}^{m-1}(\mathbb{T}^n)$ и удовлетворяет оценке

$$\|Af\|_{m-1} \leq C\|f\|_m, \quad f \in H_{\log}^m(\mathbb{T}^n). \quad (4)$$

В настоящей работе доказывается справедливость противоположной оценки и, тем самым, показана точность оценки (4). Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого натурального m и любой функции $f \in H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$ выполняется оценка

$$\|f\|_m \leq C\|Af\|_{m-1} + C\|f\|_{m-1}. \quad (5)$$

Замечание 8. Пример функции $f(x) \equiv 1$ показывает, что второе слагаемое в правой части оценки (5) не может быть исключено.

Доказательство теоремы 2 основано на методе формулы среднего значения, разработанном В.А. Ильиным (см. [5]).

Литература

1. Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, J. Mech. Phys. Solids 48, 2000. No.1, P. 175–209.
2. Calderon A.P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals, Acta Math. 88, 1952. P. 85-139.
3. Alimov Sh., Sheraliev Sh. On the solvability of the singular equation of peridynamics, Complex Variables and Elliptic Equations, 64:5. P. 873-887.
4. Алимов Ш.А., Шералиев Ш.Н. О гиперсингулярных операторах, связанных с перидинамикой, Дифференциальные уравнения, 59, 2023. № 7. С. 914-918.
5. Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряжённые дифференциальные операторы. М.: Наука, 1991.

MSC 34D20

On the estimation from below of the hypersingular operator of peridynamics

Sh.N. Sheraliev

The branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov in Tashkent

Abstract: For a hypersingular integral operator of the Calderon-Zygmund type associated with peridynamics problems, a lower bound is obtained. Thus, it is established that the estimate found earlier from above is precise.

Keywords: singular operators, Calderon-Zygmund inequality, peridynamics.

References

1. Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, *J. Mech. Phys. Solids* 48, 2000. No.1. P. 175–209.
2. Calderon A.P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* 88, 1952. P. 85-139.
3. Alimov Sh., Sheraliev Sh. On the solvability of the singular equation of peridynamics, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 64:5, 2019. P. 873-887.
4. Alimov Sh.A., Sheraliev Sh.N. On hypersingular operators related to peridynamics. *Differential Equations*, 59, 2023. No.7, P. 914-918.
5. Ilyin V.A. Spectral theory of differential operators. Self-adjoint differential operators. M.: Nauka, 1991.

УДК 532.5.013

Исследование явления резонанса при вытяжке стеклянного цилиндра

Юрова Т.С., Попов И.Ю.

Университет ИТМО

Аннотация: В работе рассмотрен процесс вытяжки стеклянного цилиндра и исследовано явление резонанса при вытяжке – неустойчивости, возникающей в процессе вытяжки и характеризующейся колебательными изменениями в размерах формы цилиндра. Для исследования процесса проведён линейный анализ устойчивости с различными эффектами, такими, как гравитация и локальный нагрев, и проанализирована устойчивость процесса в зависимости от характерных параметров задачи. Также, численно проведён нелинейный анализ устойчивости и показано, что при потере процессом устойчивости в системе возникают устойчивые колебания.

Ключевые слова: резонанс при вытяжке, линейный анализ, коэффициент перетяжки.

1. Введение

В различных областях науки и техники возникают задачи по изучению течения вязких жидкостей в тонких структурах. Под «тонкими структурами» понимаются геометрические конфигурации системы, в которых масштаб в одном направлении значительно меньше, чем в другом, за счёт чего можно понизить размерность системы, сохраняя при этом динамику изначальной системы. Приближение тонкого слоя для процесса вытяжки достаточно подробно описано в диссертации [1] для различных конфигураций задач, таких как двумерные вязкие листы (дисплеи), осесимметричные волокна (оптоволокно), неосесимметричные волокна и трехмерные листы. Процесс вытяжки предполагается непрерывным, поэтому при производстве важно следить за его стабильностью, так как это напрямую влияет на качество изделия: если процесс будет нестабильным, то могут возникнуть различные дефекты в структуре, которые впоследствии влияют не только на внешний вид, но и на прочность изделия. Явление, которое описывает потерю стабильности процесса – резонанс при вытяжке – неустойчивости, которая возникает в процессе вытяжки и характеризуется колебательными изменениями в размерах формы цилиндра. Основным параметр этого процесса – коэффициент перетяжки, равный отношению скорости вытяжки на выходе к скорости на входе. Считается, что процесс вытяжки становится нестабильным, когда коэффициент пересекает критическое значение. Это явление можно увидеть при помощи линейного анализа устойчивости. Для каждого процесса критический коэффициент перетяжки свой, на него влияет множество внешних факторов, таких как внешнее давление, влажность, температура и т. д. Поэтому в условиях производства крайне важно знать, какой критический коэффициент перетяжки у данного процесса, какие параметры среды на него влияют, а главное, что происходит после его превышения и насколько критично это превышение для качества изделия, что может показать нелинейный анализ устойчивости.

Резонанс при вытяжке – известное явление в среде моделирования формовки стекла и полимеров, ему посвящено достаточно исследований с различными конфигурациями систем и зависимостей от множества параметров. Например, в статье [2] представлен краткий хронологический отчет об исследовании резонанса при вытяжке и предложен новый метод анализа резонанса вытяжки, основанный на взаимоотношении времен прохождения кинематических волн в системе вытяжки, что позволило более точно определить условия возникновения резонанса и предложить способы его устранения. В статье [3] найдена асимптотика собственных значений, что дает представление о качественной природе собственного спектра; она показывает, что существует бесконечно много собственных значений. Кроме того, некоторые неустойчивости могут быть предсказаны на основе анализа этого предела. В статьях [4, 5] было показано влияние нагрева и охлаждения с вязкостью, зависящей от температуры, и гравитации с инерцией на критический коэффициент перетяжки в модели тонкого листа и рассчитаны значения параметров, при которых эти эффекты добавляют устойчивости процессу вытяжки.

2. Извязкое течение

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса в \mathbb{R}^3 , описывающие движение вязкой жидкости:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости, $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ – поле скоростей, $\mu = \mu(x, r)$ – переменная вязкость, \mathbf{f} – поле внешних сил, σ – тензор напряжений,

$$\sigma = -p\mathbf{I} + (\mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)), \quad (3)$$

p – давление, \mathbf{I} – единичный тензор. Из них при помощи приближения тонкого слоя получаются уравнения для вертикальной вытяжки стеклянного цилиндра:

$$(A)_t + (Au)_x = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3Au_x\mu) = 0, \quad (5)$$

где u – компонента скорости вытяжки по x , A – площадь сечения стеклянного цилиндра. Граничные условия:

$$A|_{x=0} = A_0, \quad u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=L} = u_L \quad (6)$$

Обезразмеренное стационарное решение уравнений вытяжки с такими граничными условиями:

$$u(x) = DR^x, \quad A(x) = DR^{-x}, \quad (7)$$

где $DR = \frac{u_L}{u_0}$, $x = \frac{x'}{L}$, $u(x) = \frac{u'(x)}{u_0}$, $A(x) = \frac{A'(x)}{A_0}$.

Для понимания того, как ведёт себя процесс вытяжки при различных коэффициентах перетяжки, необходимо исследовать стационарное решение системы (4)-(5)

на устойчивость. Представим малое возмущение в виде $u(x, t) = \hat{u}(x)e^{i\omega t}$, $A(x, t) = \hat{A}(x)e^{i\omega t}$, где $\hat{u}(x)$ — амплитуда возмущения, ω — частота. От знака мнимой части ω будет зависеть устойчивость процесса. Нестационарное решение системы ищем как сумму стационарного решения и возмущения:

$$u(x, t) = u_{st}(x) + \hat{u}(x)e^{i\omega t} \quad (8)$$

$$A(x, t) = A_{st}(x) + \hat{A}(x)e^{i\omega t}, \quad (9)$$

с граничными условиями $\hat{u}(0) = \hat{A}(0) = \hat{u}(1) = 0$, $u_{st}(x)$, $A_{st}(x)$ — стационарное решение (7). Далее подставляем нестационарное решение в систему, отбрасываем нелинейные члены, решаем полученную систему и выводим трансцендентное уравнение на ω :

$$0 = \left[\frac{i\omega L}{u_{st} \ln DR} - DR \right] \left[Ei \left(\frac{i\omega L}{u_{st} \ln DR} \right) - Ei \left(\frac{i\omega L}{u_{st} DR \ln DR} \right) \right] + DR \left[e^{i\omega L (u_{st} DR)^{-1} \ln^{-1} DR} - e^{i\omega L u_{st}^{-1} \ln^{-1} DR} \right] \quad (10)$$

На рис. 1 показана зависимость мнимой части ω от коэффициента перетяжки. Красная кривая соответствует моделированию в COMSOL, синяя — решению уравнения методом Ньютона.

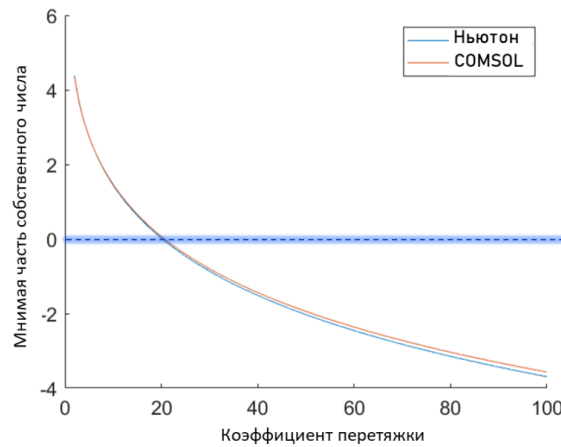


Рис. 1. Анализ линейной устойчивости. Критический коэффициент перетяжки $DR_c = 20.2$

Из графика на рис. 1 видно, что мнимая часть пересекает ноль при критическом коэффициенте перетяжки $DR_c = 20.2$. Это значит, что для данной постановки задачи (изовязкое течение без внешних сил), процесс вытяжки теряет устойчивость при коэффициентах перетяжки больше 20.2.

3. Изовязкое течение с гравитацией

Потеря устойчивости для модели изовязкого течения без каких-либо внешних сил — значительно упрощенная задача реального процесса. Для того, чтобы приблизить модель к реальному процессу, необходимо добавить внешние силы и проанализировать, как влияют характерные параметры этих воздействий на устойчивость.

Система уравнений вытяжки с гравитацией:

$$\begin{cases} (A)_t + (Au)_x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(3Au_x\mu) = -StA, \\ A|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = \frac{u_L}{u_0}. \end{cases} \quad (11)$$

Линейная устойчивость системы (11) исследовалась методом конечных элементов. Результаты представлены на рис. 2.

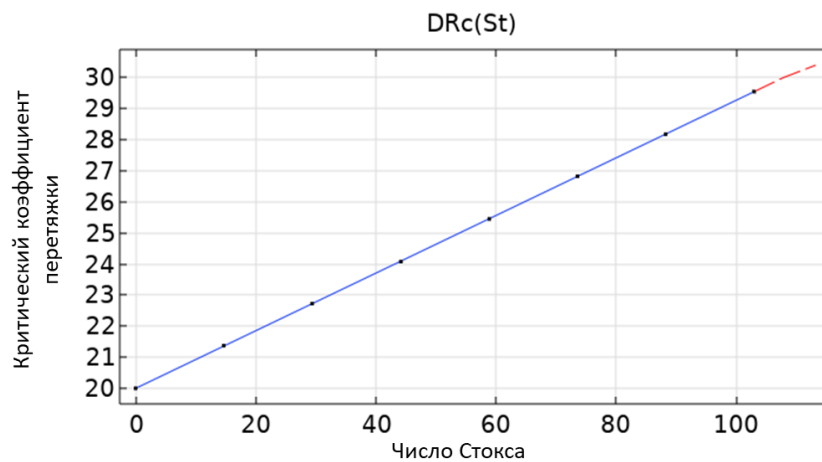


Рис. 2. Зависимость от числа Стокса

На рис. 2 приведена зависимость критического коэффициента перетяжки от числа Стокса. Видно, что критический коэффициент перетяжки увеличивается вместе с увеличением числа Стокса, а это значит, что система становится более устойчивой при увеличении сил гравитации и/или уменьшении вязких сил. Отсюда можно сделать вывод, что сила тяжести стабилизирует поток стекла и менее вязкое течение более устойчиво.

4. Изовязкое течение с теплопередачей

Применяя приближение тонкого слоя, получим дополнительное уравнение в систему, используя уравнения Фурье-Кирхгоффа с радиационным источником излучения:

$$\begin{cases} (A)_t + (Au)_x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(3Au_x\mu(T)) = -StA, \\ \text{Pe } A(T_t + uT_x) = (AT_x)_x + a\sqrt{\frac{A}{\pi}}(T_0^4(x) + T^4) \\ A|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = \frac{u_L}{u_0}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\text{Pe} = \frac{\rho c U L}{k_c}$ – число Пекле, $a = \frac{\sigma_{SB} \epsilon T^3}{k_c}$.

В этой постановке задачи мы изучали зависимость критического коэффициента перетяжки, изменяя параметры внешней температуры, а именно, максимальную температуру T_{max} и ширину зоны локального нагрева a_{hot} . Рис. 3 показывает зависимость логарифма отношения критического коэффициента перетяжки DR_c при заданных параметрах (T_{max} и a_{hot}) к коэффициенту перетяжки в постановке задачи без дополнительных эффектов DR_{c_0} от этих параметров. Процесс становится более стабильным с независимым друг от друга увеличением параметров локального нагрева. Стоит отметить, что добавление нагрева в систему делает ее более стабильной примерно в 100 раз в начале красной области.

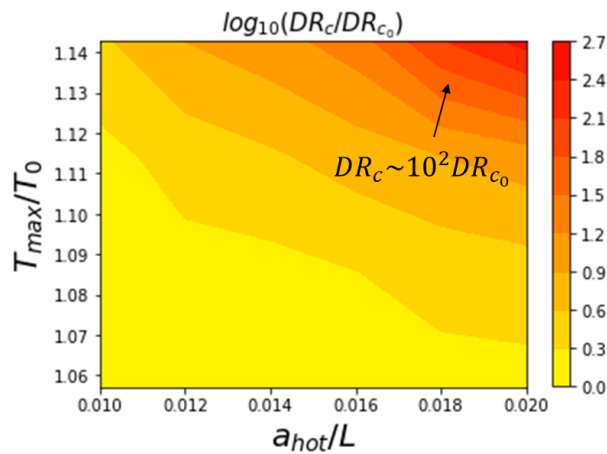


Рис. 3. Зависимость логарифма отношения коэффициента перетяжки задачи к коэффициенту перетяжки задачи без эффектов от параметров локального нагрева.

5. Нелинейный анализ: численное моделирование

Нелинейный анализ устойчивости покажет, что будет происходить с системой после перехода через критический коэффициент перетяжки: действительно ли возникают экспоненциально растущие колебания. Будем решать уравнения вытяжки (4)-(5) с помощью метода конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics. Рассмотрим нестационарную задачу, для которой в качестве начальных условий будем брать форму собственных функций линейной задачи при разных коэффициентах перетяжки DR .

На рис. 4 представлена зависимость значения площади $A(x)$ в конечной точке $x = 1$ от времени при различных коэффициентах перетяжки.

Поскольку критический коэффициент перетяжки $DR_c = 20.2$, то мы ожидаем, что при $DR < DR_c$ нестационарное решение со временем будет сходиться к стационарному, что и можно наблюдать на рис. 4 а для $DR = 19$. На остальных графиках мы видим, что колебания достигают определённой амплитуды и дальше не растут, причём, чем больше коэффициент перетяжки, тем больше амплитуда колебаний.

Зависимость амплитуды колебаний площади на выходе от коэффициента перетяжки можно увидеть на рис. 5. Также можно заметить, что при росте коэффициента перетяжки возникают огибающие колебания.

На рис. 6 приведён частотный спектр нестационарных решений (фурье-коэффициент представлен в децибелах). С увеличением коэффициента перетяжки доминирующая частота $f = 7.2$ мГц сдвигается влево и начинают проявляться кратные

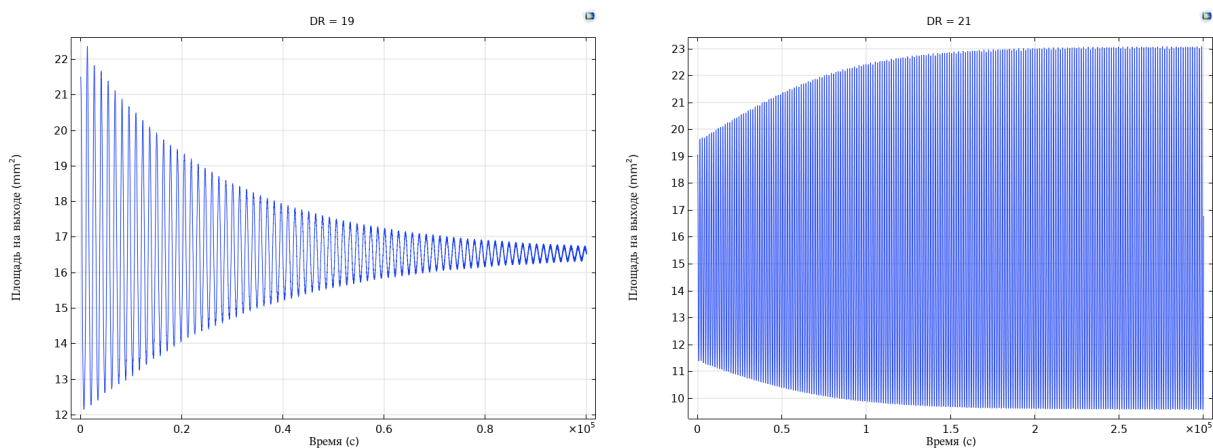


Рис. 4. Колебания площади на выходе при а) $DR = 19$; б) $DR = 21$

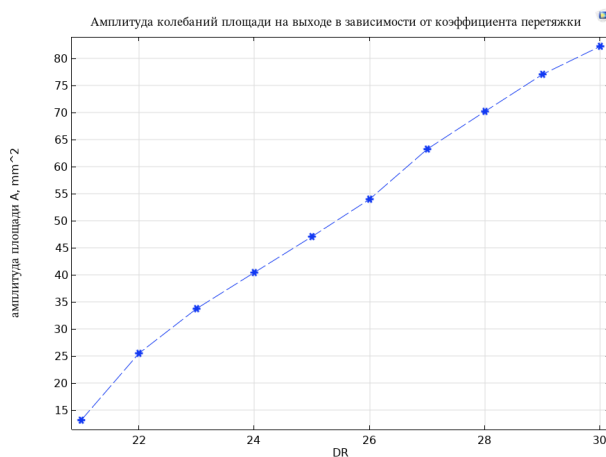


Рис. 5. Зависимость амплитуды колебаний площади на выходе от коэффициента перетяжки

более коротковолновые моды.

6. Выводы

Итого, в данной работе получены уравнения вытяжки с помощью приближения тонкого слоя из уравнений Навье-Стокса, проведён анализ линейной устойчивости процесса вытяжки стеклянного цилиндра, найден критический коэффициент перетяжки $DR_c = 20.2$, при котором система теряет устойчивость, и показано, что система становится устойчивее при учете как гравитации, так и локального нагрева. Кроме того, с помощью численного моделирования найдена зависимость амплитуд и частотного спектра колебаний при удалении от критического коэффициента перетяжки и показано, что при его превышении в системе возникают постоянные колебания.

Литература

1. Howell P.D. Extensional thin layer flows. 1994.
2. Hyun J. Draw resonance in polymer processing: A short chronology and a new approach // Korea-Aust. Rheol. J., 1999. 11 p.

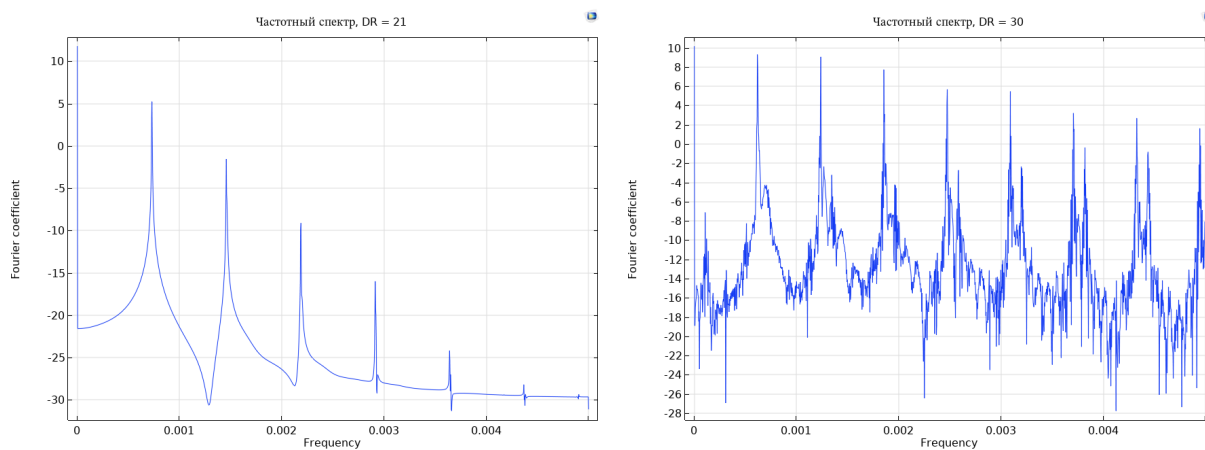


Рис. 6. Частотный спектр колебаний нестационарной задачи при разных коэффициентах перетяжки DR : а) $DR = 21$; б) $DR = 30$

3. Renardy M. Draw resonance revisited // Journal of Physics: Conference Series, 2007. P. 12-16.
4. Scheid B., Quiligotti S., Tran B., Gy R., Stone H. On the (de)stabilization of draw resonance due to cooling // Journal of Fluid Mechanics, 2009. P. 155-176.
5. Cao F., Khayat R., Puskas J. Effect of inertia and gravity on the draw resonance in high-speed film casting of Newtonian fluids // International Journal of Solids and Structures - INT J SOLIDS STRUCT, 2005. P. 5734-5757.

MSC 34D20

Investigation of the resonance phenomenon during the glass cylinder draw

T.S. Yurova, I.Yu. Popov

ITMO University

Abstract: The paper considers the process of a glass cylinder draw and investigates the phenomenon of draw resonance — this is an instability that occurs during drawing and is characterized by oscillatory changes in the size of the cylinder shape. A linear stability analysis with various effects, such as gravity and local heating, was carried out, and the stability of the process was analyzed depending on the characteristic parameters of the problem. Also, a nonlinear stability analysis is numerically carried out and it is shown that when the process loses stability, stable oscillations occur in the system.

Keywords: Draw resonance, linear stability, draw ratio.

References

1. Howell P.D. Extensional thin layer flows. 1994.
2. Hyun J. Draw resonance in polymer processing: A short chronology and a new approach // Korea-Aust. Rheol. J., 1999. 11 p.
3. Renardy M. Draw resonance revisited // Journal of Physics: Conference Series, 2007. P. 12-16.
4. Scheid B., Quiligotti S., Tran B., Gy R., Stone H. On the (de)stabilization of draw resonance due to cooling // Journal of Fluid Mechanics, 2009. P. 155-176.
5. Cao F., Khayat R., Puskas J. Effect of inertia and gravity on the draw resonance in high-speed film casting of Newtonian fluids // International Journal of Solids and Structures - INT J SOLIDS STRUCT, 2005. P. 5734-5757.

УДК 517.955.8

Исследование устойчивости динамики концентраций веществ в диффузионной модели зерна катализатора*

Язовцева О.С.¹, Губайдуллин И.М.², Иншакова А.С.³, Родькина Д.А.³

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук¹,
Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН²,
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет³

Аннотация: В статье предложена методика исследования динамической устойчивости решений системы параболических уравнений, описывающей математическую модель гомогенной реакции в зерне катализатора. Нелинейная модель построена с использованием диффузионного подхода – учитывается диффузия компонент по радиусу гранулы, их расход и образование за счет химических реакций. Исследование динамической устойчивости предполагает разложение решений в ряд методом Галеркина с использованием непрерывных базисных функций. Из условия ортогональности невязки построена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно весовых функций, для которой найдены положения равновесия. В окрестности каждого из положений равновесия система обыкновенных дифференциальных уравнений линеаризована. На основании знаков собственных значений линейного приближения сделан вывод об устойчивости решений. Далее вывод распространен на решения первоначальной системы – концентрации веществ в модели зерна катализатора.

Ключевые слова: параболические уравнения, метод Галёркина, линеаризация, динамическая устойчивость, зерно катализатора

В химических производствах наиболее распространенные процессы – каталитические. Обилие разновидностей катализаторов дает возможность выбрать подходящие условия протекания для весьма большого количества реакций. Учитывая, что процедура натуральных экспериментов достаточно трудоёмка, длительна по времени и требует немалых материальных затрат, рационально и в то же время удобно использовать математическую модель реального процесса, которая позволяет в сравнительно короткие сроки исследовать множество характеристик описываемых объектов при различных условиях [1].

Одной из основ математического моделирования промышленных каталитических процессов является математическое описание отдельного зерна катализатора [3, 4].

По причине многофакторности химико-технологических процессов непосредственно возникают задачи анализа влияния различных условий на течение процесса. Многочисленные промышленные задачи предполагают существенный объем вычислений, которые в некоторых случаях обеспечивают, тем не менее, довольно невысокую точность [5].

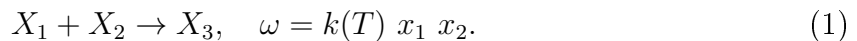
Динамической устойчивостью решения нестационарной системы уравнений математической физики можно назвать малое отклонение решения от первоначального положения при внесении возмущений в начальные данные [6–8]. Для обеспечения динамической устойчивости химического процесса необходимо контролировать ряд

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012.

параметров, таких как температура, скорость подачи реакционной смеси, концентрации веществ и т. п. Отсутствие динамической устойчивости процесса может привести к снижению эффективности, увеличению расходов на энергию и сырье, а также повышению риска аварийных ситуаций. На практике обеспечение условий, отвечающих динамической устойчивости, является важной задачей для производства.

Целью настоящей работы является анализ динамической устойчивости решений математической модели гомогенной химической реакции в сферическом зерне катализатора.

Рассмотрим одностадийную реакцию и определим ее скорость ω :



Здесь X_1 и X_2 – реагенты, X_3 – продукт реакции, x_i – концентрации X_i , $i = \overline{1, 3}$, $k(T)$ – константа скорости химической реакции, T – температура.

В работе будем рассматривать реакцию, протекающую при постоянной температуре: изотермическую или с постоянным подводом и отводом энергии. В этом случае $k(T) \equiv k$.

Математическая модель гомогенной реакции в сферическом зерне катализатора в этом случае имеет вид:

$$\varepsilon \frac{\partial x_i}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial x_i}{\partial r} \right) + \nu_i \omega, \quad \sum_{i=1}^3 x_i = const. \quad (2)$$

Здесь t – время, r – координата по радиусу зерна катализатора, D – коэффициент диффузии реакционной смеси в поры зерна, ν_i – стехиометрический коэффициент из схемы (1), домноженный на некоторый постоянный множитель, зависящий от размерности x_i .

В качестве начально-краевых условий в центре зерна как в точке симметрии приняты условия отражения, а на внешней границе зерна – условия втекания:

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad x_i|_{r=R} = x_i^0, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

где R – радиус зерна катализатора.

У системы (2) существует первый интеграл, в силу чего можно рассматривать только два первых уравнения. Вывод относительно поведения компоненты x_3 будет сделан на основе поведения x_1 и x_2 .

Разложение решения по методу Галеркина, соответствующее граничным условиям (3), будет иметь следующий вид:

$$\hat{x}_i = v_i(t) \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right) + u_i(t) \cos\left(\frac{2\pi r}{R}\right). \quad (4)$$

При подстановке решения (4) в систему (2) получим невязку $N(t, r)$. Условие ортогональности примет следующий вид:

$$\int_0^R N(t, r) \cos\left(\frac{k\pi}{R} r\right) dr = 0, \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

При интегрировании получим нелинейную систему вида:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = f_1(v_1, v_2, u_1, u_2), \\ \dot{u}_1 = g_1(v_1, v_2, u_1, u_2), \\ \dot{v}_2 = f_2(v_1, v_2, u_1, u_2), \\ \dot{u}_2 = g_2(v_1, v_2, u_1, u_2). \end{cases} \quad (6)$$

У системы (6) существует три положения равновесия: два ненулевых и одно нулевое. Построив матрицу Якоби для системы (6), найдем собственные значения этой матрицы в окрестностях каждого из положений равновесия:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_1 \frac{D}{k}, -\alpha_2 \frac{D}{k}, -\alpha_3 \frac{D}{k}, -\alpha_4 \frac{D}{k} \right), \quad \left(\beta_1 \frac{D}{k}, -\beta_2 \frac{D}{k}, -\beta_3 \frac{D}{k}, -\beta_4 \frac{D}{k} \right), \\ & \left(-\gamma_1 \frac{D}{k}, -\gamma_2 \frac{D}{k}, -\gamma_1 \frac{D}{k}, -\gamma_2 \frac{D}{k} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – положительные вещественные числа.

В первых двух наборах собственных значений присутствуют положительные числа, что означает неустойчивость двух ненулевых положений равновесия. Последний набор свидетельствует об асимптотической устойчивости тривиального положения равновесия. Поскольку решения системы (6) – это весовые функции в разложении (4), неустойчивость положения равновесия системы (6) означает отсутствие динамической устойчивости решений (2), а асимптотическая устойчивость – наличие динамической устойчивости.

Это означает, что для наличия динамической устойчивости решений системы (2) необходимо выбирать начально-краевые условия (3) так, чтобы они приводили к тривиальному положению равновесия.

Таким образом, безопасное течение процесса изотермической гомогенной химической реакции возможно обеспечить подбором начальных концентраций веществ.

Перспективным направлением видится расширение предложенного алгоритма на систему с учетом теплового баланса зерна катализатора, а также на процессы с гетерогенной кинетикой.

Литература

1. Марчук Г.И. Моделирование химических реакторов. Новосибирск: Наука, 1984. 164 с.
2. Малиновская О.А., Бесков В.С., Слинко М.Г. Моделирование каталитических процессов на пористых зернах. Новосибирск: Наука, СО РАН, 1975. 268 с.
3. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol.11, No.3. 669 p. DOI: 10.3390/math11030669.
4. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V.15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.

5. Слинько М.Г. Некоторые итоги развития и применения математического моделирования химических реакторов // Управляемые системы. 1968. № 1. С. 74-82.
6. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2009. 220 с.
7. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2011.
8. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 600 с.

MSC 34K20

Investigation of the stability for substances' concentrations' dynamics in the catalyst grain's diffusion model

O.S. Yazovtseva¹, I.M. Gubaydullin², A.S. Inshakova³, D.A. Rodkina³

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences¹,
Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS²,
National Research Mordovia State University³

Abstract: The article proposes a method for studying the solutions' dynamic stability of parabolic system describing a mathematical model of a homogeneous reaction in a catalyst grain. The nonlinear model is constructed using a diffusion approach – the diffusion of components along the granule's radius, their consumption and formation due to chemical reactions are taken into account. The study of dynamic stability involves the decomposition of solutions into a series by the Galerkin method using continuous basis functions. A nonlinear system of ordinary differential equations with respect to the weight functions is constructed from the orthogonality condition of the residual. Its equilibrium positions are found. The system of ordinary differential equations is linearized at the neighbourhood of each equilibrium. A conclusion is made about the solutions' stability based on the signs of the eigenvalues of the linear approximation. Further, the conclusion is extended to the solutions of the initial system – the concentration of substances in the catalyst grain model.

Keywords: parabolic equations, Galerkin method, linearization, dynamic stability, catalyst grain.

References

1. Marchuk G.I. Modeling of chemical reactors. Novosibirsk: Nauka, 1984. 164 p..
2. Malinovskaya O.A., Beskov V.S., Slinko M.G. Modeling of catalytic processes on porous grains. Novosibirsk: Nauka, SB RAS, 1975. 268 p.
3. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol.11. No.3. 669 p. DOI: 10.3390/math11030669.
4. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V.15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
5. Slinko M.G. Some results of the development and application of mathematical modeling of chemical reactors // Controlled systems. 1968. No.1. P. 74-82.
6. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Dynamics and stability of elastic plates under aerohydrodynamic action. Ulyanovsk: UISTU, 2009. 220 p.

7. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Mathematical modeling of dynamics and stability of deformable structural elements under aerohydrodynamic influence. Ulyanovsk: UISTU, 2011.
8. Bolotin V.V. Dynamic stability of elastic systems. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1956. 600 p.

MSC 74H45, 74K05

Variational statement of the problem of vibrations of a beam with a moving boundary

V.L. Litvinov^{1,2}, K.V. Litvinova^{1,2}

Moscow State University¹,
Syzran' Branch of Samara State Technical University²

Abstract: The statement of the problem of vibrations of a beam with a moving spring-loaded support carrying an attached mass is obtained. When the support is not absolutely rigid, energy exchange occurs through the moving boundary. In this regard, there is a difficulty in writing the boundary conditions. To formulate the problem, we used the variational principle of Hamilton. In this case, the viscoelastic properties of the beam material are taken into account. The problem posed includes the differential equation of vibrations, initial conditions for the bent axis of the beam and for the added mass, boundary conditions. The conditions on the moving boundary are written as ratios between the values of the function and its derivatives to the left and right of the boundary.

Keywords: oscillations of a beam, boundary conditions, variational principles, moving spring support.

Among all the many problems of the dynamics of elastic systems from the point of view of technical applications, the problems of oscillations in systems with moving boundaries: longitudinal-transverse vibrations of the ropes of hoisting installations [1–6] flexible transmission links [2], rods of solid fuel and beams of variable length, drill strings, railway contact network [7], belt conveyors, etc.

In a mathematical setting, this is reduced to new problems in mathematical physics – to the study of the corresponding equations of hyperbolic type in variable ranges of variation of both arguments [4–6, 8–10].

Until now, there is no general approach to the formulation of such problems, and the authors in each specific case adapt the existing methods to solve the problem under consideration. Here we note that the methods for solving these equations in variable geometric domains are qualitatively different from the classical methods of mathematical physics. In other words, the studied dynamic process develops over time.

The problems of oscillation of systems with moving boundaries have been solved mainly with a linear setting and rigid fixation of boundaries, when there is no energy exchange across the boundary [1–3, 7, 11]. In rare cases, the effect of damping forces was taken into account. Real technical objects are much more complicated. Problems about vibrations of a beam with a moving support belong to a wide class of problems related to the vibrations of objects with moving boundaries. In all the cases considered earlier, the rigid fastening of the moving support excluded the exchange of energy through it. In the presence of energy exchange, the complexity in recording the conditions at the moving boundary increases. In this paper, to formulate the problem, it is proposed to use the variational principle of Hamilton.

In connection with the intensive development of numerical methods, it became possible to describe such objects more accurately, taking into account a large number of factors.

Of all the possible laws of motion, in fact, one is realized for which the action

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt \quad (1)$$

where T and U are the kinetic and potential energies of the system takes a stationary value [10].

A new nonlinear mathematical model of transverse vibrations of a viscoelastic beam with a moving spring-loaded support carrying an attached mass is formulated. The boundary conditions are obtained in the case of the interaction of the parts of the object to the left and to the right of the moving boundary, taking into account the energy exchange through it. The resulting mathematical model makes it possible to describe high-intensity oscillations of systems with moving boundaries. Note that there are currently no methods for the analytical solution of the problem posed, so this problem, apparently, can be solved only by numerical methods.

References

1. A. Berlioz, C.-H. Lamarque. A non-linear model for the dynamics of an inclined cable // *Journal of Sound and Vibration*, 2005. V. 279. P. 619–639.
2. S.H. Sandilo, W.T. van Horssen. On variable length induced vibrations of a vertical string // *Journal of Sound and Vibration*, 2014. V. 333. P. 2432–2449.
3. Liu Z., Chen G. Analysis of Plane Nonlinear Free Vibrations of a Carrying Rope Taking into Account the Influence of Flexural Rigidity // *J. Vibr. Eng.* 2007. No. 1. P. 57–60.
4. L. Faravelli, C. Fuggini and F. Ubertini. Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation // *Struct. Control Health Monit.* 2010. P. 386–403.
5. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // *Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.* 2020. Vol. 26, №. 2. P. 188–199.
6. Litvinov V. L., Anisimov V. N. Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction // *Proceedings of the Samara scientific center of the Russian Academy of Sciences*, 2017. Vol. 19. №. 4. P. 161–165.
7. W. Zhang, Y. Tang. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002. V. 37. P. 505–526.
8. Anisimov V. N. On a method for obtaining an analytical solution of a wave equation describing vibrations of systems with moving faces // *Bulletin of the Samara state technical university. Ser. «Physical and mathematical Sciences»*, 2012, V. 28, N 3. 145–151.

9. Litvinov V.L., Litvinova K.V. An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reduction to integro–differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2022. Vol. 62, no. 6. P. 945–954.
10. Myshkis A.D. Mathematics for technical universities: Special courses. 2nd ed. St. Petersburg: Publishing house Lan, 2002. 640 p.
11. Yashagin N.S., Anisimov V.N. Certificate of registration of the electronic resource «Automated research complex» TB – ANALISYS "in OFERNiO No. 19517 dated September 26, 2022 and FGANU CITiS No. 130912114653 dated September 30, 2022.

MSC 34D20

Numerical simulation of oxidative regeneration of a spherical catalyst layer*

O.S. Yazovtseva¹, I.M. Gubaydullin², A.N. Zagoruiko³

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences¹,
Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS²,
Boreskov Institute of Catalysis SB RAS³

Abstract: The article presents the results of numerical simulation of a spherical catalyst layer with single-stage kinetics. The model is described by partial differential equations. The diffusion-reaction equations correspond to the material balance of the reaction's gas phase in the grain pores. The inhomogeneous equation of heat conductivity corresponds to the heat balance. The decrease in the mass fraction of coke sediments on the catalyst grain is described by an ordinary differential equation. Heat and mass transfer in the reaction mixture layer is taken into account. The computational algorithm is constructed using the integro-interpolation method. The results of the software are the profiles of the distribution of temperature fields across the catalyst layer, the dynamics of the mass fractions of the reaction mixture in the catalyst layer, the average values of the concentrations of substances in the catalyst grain.

Keywords: mathematical modeling, integro-interpolation method, diffusion-reaction equations, heat conductivity equation, oxidative regeneration.

The issue of resource conservation is one of the most important questions in our days. An urgent task of industrial chemistry is to study the possibility of reuse of the catalyst within the framework of this problem.

During the reactions, the catalyst inevitably loses its effectiveness, including by reducing the active surface due to the accumulation of coke on the surface and in the grains' pores [1]. One of the methods of restoring catalytic activity is the oxidative regeneration – the burning of coke sediments with oxygen-containing gas [2]. The main disadvantage of the reduction process is the prolonged exposure to high temperature on the catalyst, which violates its physico-chemical properties, structure, and also leads to an increase in the fragility of the material [3]. It is obvious that regeneration needs strict temperature control while reducing the burning time. This leads to the need to predict the flow of the process under various technological conditions.

Mathematical modeling is an effective mean of solving such problems [4]. Modern computing capabilities make it possible to carry out serial calculations fairly quickly with various input data of a mathematical model [5, 6].

The mathematical model of oxidative regeneration of the catalyst layer is two-phase – the gas and solid phases are described separately. It is a system of partial differential equations [7, 8]. The system includes equations of material balance by the number of substances involved in the reaction. The material balance of the gas phase in the catalyst

*The work of O.S. Yazovtseva was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 19-71-30012, <https://rscf.ru/en/project/19-71-30012/> and performed at Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

The work of I.M. Gubaydullin was supported by the state task of the Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Russian Academy of Sciences (theme No. FMRS-2022-0078).

The work of A.N. Zagoruiko was supported by the Boreskov Institute of Catalysis (project AAAA-A21-121011390010-7).

grain (oxygen and carbon dioxide) is described by diffusion equations with a source term corresponding to chemical transformations – diffusion-reaction equations. The decrease of coke mass fraction on the catalyst grain is described by an ordinary differential equation. The model also includes the equations of the thermal balance for the catalyst grain – the heat exchange of the gas and catalyst layers, the heating of the grain due to chemical reactions and its propagation along the reactor’s length is taken into account. The calculations are performed under the assumption of grain isothermicity, which greatly simplifies the model and the computational algorithm for it [9]. In turn, the material and thermal balances of the gas in the catalyst layer are described by the heat and gas transfer equations, respectively, taking into account the heat and mass transfer of the gas and the catalyst layer.

The initial boundary conditions for the system describe the entry of gas into the catalyst layer and heat and mass transfer at the grain boundary. The difference scheme for the model is based on the integro-interpolation method and has an explicit-implicit character [10].

The computational algorithm is implemented in C++. The results of the software are the profiles of the distribution of temperature fields across the catalyst layer, the dynamics of the mass fractions of the reaction mixture in the catalyst layer, the average values of the concentrations of substances in the catalyst grain.

The pictures fig. 1 Fig. 1:-2 Fig. 2: present changes of characteristics. The initial values is follow. Oxygen in the catalyst pores and in the reaction gas is 100%, catalyst’s temperature is 273 K (0°C), temperature of reaction mixture is 793 K (520°C).

Different lines on the graphs correspond to different lengths of the catalyst layer in meters (transcript in the right columns).

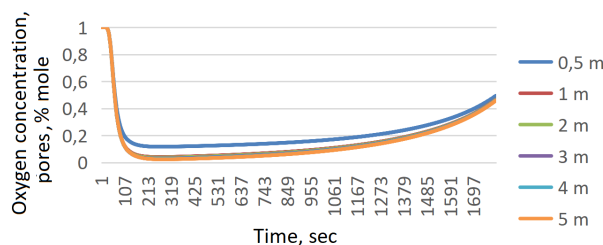


Fig. 1: Oxygen in pores, mole fractions

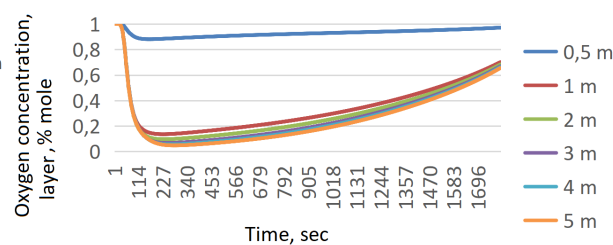


Fig. 2: Oxygen in gas, mole fractions

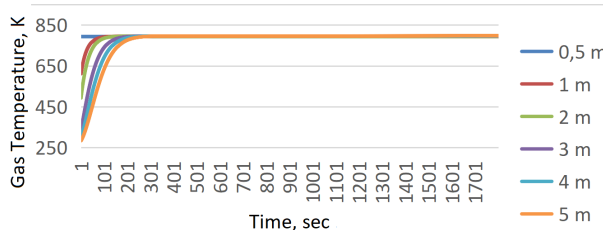


Fig. 1: Gas temperature, K

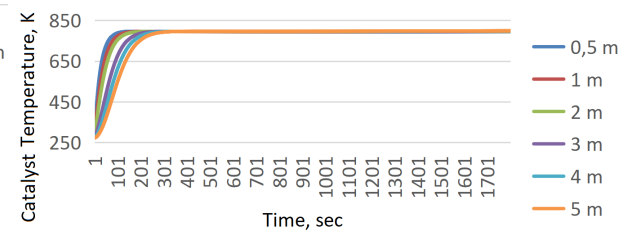


Fig. 2: Catalyst temperature, K

The temperature of the grain is compared with the temperature of the gas over time. Reactions go fast enough from the first minute. Oxygen in the grain’s pores burns out, while the mass transfer between the grain and the gas layer is not fast enough for smooth burning. This leads to low oxygen concentrations both in the pores and in the gas layer at the first minutes.

The oxygen concentration reaches the initial value by the end of the burn (about thirty minutes) due to the fact that the coke has burned out and the reaction is not going on.

References

1. Buyanov R. A. Coking of catalysts. Novosibirsk: Nauka, 1983. 207 p.
2. Masagutov R. M., Morozov B. F., Kutepov B. I. Regeneration of catalysts in oil refining and petrochemistry. M.: Chemistry, 1987. 144 p.
3. Hrisonidi V. A., Basmanova V. R. Modern methods of catalysts regeneration used in oil and gas synthesis // The Scientific Heritage. 2020. No. 50-3.
4. Slinko M. G. Modeling of chemical reactors. Novosibirsk: Nauka, 1968. 96 p.
5. Yazovtseva O. S., Gubaydullin I. M., Peskova E. E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. V.11 (669). DOI: 10.3390/math11030669.
6. Gubaydullin I.M., Yazovtseva O.S. Investigation of the averaged model of coked catalyst oxidative regeneration // Computer Research and Modeling, 2021. Vol. 13, no. 1. P. 149-161.
7. Reshetnikov S. I., Petrov R. V., Zazhigalov S. V., Zagoruiko A. N. Mathematical Modeling of Regeneration of Coked Cr-Mg Catalyst in Fixed Bed Reactors // Chemical Engineering Journal. 2020. V. 380. DOI: 10.1016/j.cej.2019.122374.
8. Matros Yu. Sh. Unsteady processes in catalytic reactors. Novosibirsk: Nauka, 1982. 258 p.
9. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations, 2023. Vol. 15. P. 485-495. <https://doi.org/10.1134/S2070048223030079>
10. Samarsky A. A. Introduction to the theory of difference schemes. M.: Nauka, 1971. 552 p.

Научное электронное издание

**Дифференциальные уравнения и их приложения
в математическом моделировании**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

Саранск

17 — 20 августа 2023 г.

Редакторы: Пескова Е. Е., Шалаева А. А., Язовцева О. С.

Формат 60×84 1/16

Усл. печ. л. 16.86

Подписано в печать 15.12.2023

Средне-Волжское математическое общество
Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
430005, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

