

УДК 517.9

К вопросу о периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с двумя малыми параметрами

Шаманаев П.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
им. Н.П. Огарева

Задача о существовании периодических решений дифференциальных уравнений с одним малым параметром с помощью метода Ляпунова-Шмидта рассматривалась во многих работах [1–4]. В основе этого подхода лежит понятие обобщенного жорданового набора, введенного в работе [5].

В настоящей работе решается задача о нахождении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде двух малых линейных слагаемых на основе обобщенного жорданового набора в смысле работы [6].

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$A \frac{dx}{dt} = (B_0 - \varepsilon_1 B_1 - \varepsilon_2 B_2) x - f(t), \quad (1)$$

где $x \in E_1$; A, B_0, B_1 и B_2 — плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, действующие из E_1 в E_2 ; $f \in E_2$, $f(t+T) = f(t)$, $T > 0$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — малые вещественные параметры; A — вырожденный или тождественный оператор.

Ставится задача: при достаточно малых вещественных ε_1 и ε_2 найти все T -периодические решения $x(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ уравнения (1), удовлетворяющие условию $x(t, 0, 0) = z(t)$, где $z(t)$ — T -периодическое решение уравнения

$$A \frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t). \quad (2)$$

Для решения поставленной задачи используется модифицированный метод Ляпунова-Шмидта, основанный на представлении дифференциального уравнения (1) в виде некоторого операторного уравнения. Предполагая, что оператор-функция, входящая в операторное уравнение, имеет обобщенный жорданов набор в смысле работы [6], операторное уравнение сводится к исследованию разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве [7]. При условии полноты обобщенного жорданового набора показывается, что разрешающая система, представляющая собой систему линейных алгебраических уравнений, при достаточно малых ε_1 и ε_2 имеет единственное решение, а при $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 0$ — семейство n -параметрических решений.

Далее показано, что уравнение (1) при условии, что точка $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ принадлежит достаточно малой выколотой окрестности нуля, имеет единственное T -периодическое аналитическое по ε_1 и ε_2 решение. Причем, при $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 0$ решение уравнения (1) переходит в n -параметрическое семейство T -периодических решений уравнения (2).

Если длины сторон всех обобщенных жордановых сеток равны единицы, то уравнение (1) имеет единственное T -периодическое решение, являющееся аналитическим по ε_1 и ε_2 из достаточно малой окрестности нуля. Причем решение возмущенного уравнения (1) стремится к решению невозмущенного уравнения (2) при стремящихся к нулю ε_1 и ε_2 .

Если существует хотя бы одна обобщенная жорданова сетка, длина стороны которой больше единицы, то решение уравнения (1) имеет полюс в нулевой точке либо по ε_1 , либо по ε_2 , либо по ε_1 и ε_2 одновременно.

Литература

1. Sidorov N.A., Loginov B.V., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapounov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Kluwer Academic Publishers, 2002, 548 p.
2. Коноплёва И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах. Изв. высших учеб. заведений. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск. С. 115-124.
3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 3. С. 100-107.
4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 45–53.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
6. Шаманаев П. А. О некоторых обобщениях жордановых наборов линейных оператор-функций, зависящих от двух малых параметров [Электронный ресурс] // Диф. ур. и их прил. в матем. модел.: материалы XIII Межд. научн. конф. (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). - Саранск: СВМО, 2017. - С. 511-516. Режим доступа: <http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper69.pdf>.
7. Шаманаев П. А. К вопросу о возмущении линейного уравнения двумя малыми линейными слагаемыми [Электронный ресурс] // Диф. ур. и их прил. в матем. модел.: материалы XIV Межд. научн. конф. (Саранск, 9-12 июля 2019 г.). - Саранск: СВМО, 2019. - С. 92-94. Режим доступа: <http://conf.svmo.ru/files/2019/papers/paper28.pdf>.

MSC2020 34G10

On the question of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with two small parameters

P. A. Shamanaev

National Research Mordovia State University