УДК 515.162.2

Нахождение полных характеристик периодических автоморфизмов двумерного тора*

Чилина Е. Е.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Пусть S – замкнутая ориентируемая поверхность. Гомеоморфизмы $f, f' : S \to S$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : S \to S$ такой, что $f' = h \circ f \circ h^{-1}$.

Отличный от тождественного гомеоморфизм f называется *периодическим*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f.

В силу результатов Я. Нильсена [3] для любого сохраняющего ориентацию периодического преобразования f периода n замкнутой ориентируемой поверхности S верны следующие утверждения:

1. Каждому f сопоставляется множество $\bar{B} \subset S$ *периодических точек гомеоморфизма* f, *период которых строго меньше* n. Это множество либо пусто, либо состоит из конечного числа орбит $\mathcal{O}_1, \dots, O_k$, $k \geq 1$, периода n_i, $i \in \{1, \dots, k\}$, являющегося делителем n. Положим $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$. Для каждой орбиты $\mathcal{O}_i \subset \bar{B}$ существует единственное взаимно простое с λ_i число $\delta_i \in \{1, \dots, \lambda_i - 1\}$ такое, что в некоторой окрестности $D_{\bar{x}_i}$ точки $\bar{x}_i \in \mathcal{O}_i$ гомеоморфизм f^{n_i} топологически сопряжен с поворотом комплексной плоскости вокруг начала координат:
$$z \to e^{\frac{2\pi\delta_i}{\lambda_i}\mathbf{i}} z. \tag{1}$$
2. Для любого δ_i существует число $d_i \in \{1, \dots, \lambda_i - 1\}$ такое, что $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$. В силу сопряженности с отображением (1) существует кривая, гомеоморфная окружности, которая инвариантна относительно гомеоморфизма f^{n_i}. Тогда число d_i обладает следующим свойством: дуга, принадлежащая инвариантной окружности, рассматриваемая в направлении против часовой стрелки и заключенная между точками $\bar{x}$ и $f^{n_i d_i}(\bar{x})$, не содержит точек орбиты точки $\bar{x}$, отличных от точек $\bar{x}$ и $f^{n_i d_i}(\bar{x})$.

Для каждого периодического преобразования f поверхности S определим набор чисел
$$(n, p, n_1, ..., n_k, d_1, ..., d_k),$$
который обозначим через κ и будем называть *полной характеристикой* периодического преобразования f.

Из работ Керькъярто [1], Брауэра [2] и Нильсена [3] следует

Предложение 1. *Два периодических преобразования f и f' поверхности S топологически сопряжены с помощью сохраняющего ориентацию гомеоморфизма тогда и только тогда, когда их полные характеристики совпадают.*

*Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021-2022 гг.

Пусть A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – унимодулярная целочисленная матрица. Тогда она индуцирует отображение $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$f_A : \begin{cases} \overline{x} = ax + by \pmod 1 \\ \overline{y} = cx + dy \pmod 1 \end{cases},$$

которое является *алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.* При этом, если собственные значения матрицы A не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм двумерного тора, заданный матрицей A, называется гиперболическим алгебраическим автоморфизмом двумерного тора. В противном случае алгебраический автоморфизм двумерного тора, заданный матрицей A, будем называть негиперболическим алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Из результатов Баттерсона [4] следует

Утверждение 1. *Каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора задан в точности одной из следующих матриц*

$$M_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Следствие 1. *Существует 6 классов периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора, каждый из которых задан в точности одной из следующих матриц:*

$$M_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы $M_2(0), M_5, M_6, M_7$ индуцируют сохраняющие ориентацию периодические автоморфизмы двумерного тора, а матрицы M_3, M_4 индуцируют не сохраняющие ориентацию периодические автоморфизмы двумерного тора.

Введём следующий набор матриц: $A_1 = M_2(0)$, $A_2 = M_6^{-1}$, $A_3 = M_6$, $A_4 = M_7$, $A_5 = M_7^{-1}$, $A_6 = M_5^{-1}$, $A_7 = M_5$.

Обозначим через κ_j полную характеристику отображения f_{A_j}.

Теорема 1. *Существует в точности семь классов топологической сопряженности посредством сохраняющего ориентацию гомеоморфизма периодических автоморфизмов двумерного тора, каждый из которых задаётся автоморфизмом f_{A_j} $(j = \overline{1,7})$, индуцированным матрицей A_j:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом каждому f_{A_j} соответствует полная характеристика κ_j следующего вида:

1. κ_1: $n = 2$, $p = 1$, $k = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$;
2. κ_2: $n = 3$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
3. κ_3: $n = 3$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 2$;
4. κ_4: $n = 6$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
5. κ_5: $n = 6$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 5$;
6. κ_6: $n = 4$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
7. κ_7: $n = 4$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = 3$.

Автор благодарит В. З. Гринеса и О. В. Починку за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

1. B. von Kerekjarto. Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen. Acta Scient. Math. Szeged, 1934. Vol. 6, pp. 235–262.
2. Brouwer L. E. J. Aufzählung der periodisken Transformationen, in: KNAW, Proceedings, 21 II, 1919, Amsterdam, 1919. pp. 1352-1356.
3. Nielsen J. Die struktur periodischer transformationen von flachen. Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 1937. Vol. 15, No. 1, pp. 65–102.
4. Batterson S. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus. Transactions of the American Mathematical Society. 1979. Vol. 256. pp. 395-403.

MSC2020 37E30

Finding complete characteristics of periodic automorphisms of the two-dimensional torus.

E. E. Chilina
HSE University