УДК 517.986.7

Касание по Чернову и автопредставление ограниченных функций

Рассадин А. Э.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Развитие теории полугрупп, зародившейся в середине прошлого века, привело к появлению большого числа мощных инструментов математического исследования для различных разделов современного функционального анализа [1]. К таким инструментам, в частности, относятся аппроксимационные теоремы теории полугрупп [2]. В данной работе представлен ряд новых результатов, основанных на одной из теорем этого типа – теореме Чернова [3].

Пусть $UC_b(\mathbb{R})$ – пространство всех равномерно непрерывных ограниченных функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, снабжённое равномерной нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* ξ_0 *и* γ *– произвольные положительные числа и* $f\in UC_b(\mathbb{R})$*, то:*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in[-\xi_0,\,\xi_0]}||\,f-\hat{S}^{\gamma}_n(\xi)f\,||=0\,, \tag{1}$$

где

$$(\hat{S}^{\gamma}_n(\xi)f)(x)=\frac{\exp(\gamma\,|\xi|)}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{2\,\gamma\,|\xi|}{n}\right)^k f\left(x+\frac{2\,k-n}{n}\,\xi\right), \tag{2}$$

а C_n^k *– биномиальные коэффициенты.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса с постоянными вещественными коэффициентами $v\neq 0$ и $\sigma>0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v\,\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma\,u=0\,,\qquad u(x,0)=f(x)\,,\qquad x\in\mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Как хорошо известно, точное решение задачи (3) имеет вид:

$$u(x,t)=\exp(-\sigma\,t)\,f(x-v\,t)\equiv(\hat{Q}(t)f)(x)\,, \tag{4}$$

где $\hat{Q}(t)$ – оператор полугруппы.

С другой стороны, если начальное условие $f\in UC_b(\mathbb{R})$, то все условия теоремы 3 из статьи [4] выполнены, значит, точное решение (4) уравнения (3) может быть выражено через функцию Чернова $\hat{G}(t)$ следующим образом:

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}\hat{G}^{\,n}\left(\frac{t}{n}\right)\,f(x)\,, \tag{5}$$

где в соответствии с теоремой 2 из статьи [4]:

$$(\hat{G}(t)f)(x)=\frac{(1-2\,\sigma\,t)\,f(x)+f(x-2\,v\,t)}{2}\,. \tag{6}$$

Используя известное представление оператора сдвига в виде операторной экспоненты (см., например, [2], главу 7), можно выделить функцию Чернова $\hat{G}(t)$ из формулы (6) явно:

$$\hat{G}(t)=\frac{1}{2}\left[1-2\,\sigma\,t+\exp\left(-2\,v\,t\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\,. \tag{7}$$

Подставляя формулу (7) в выражение (5) и сравнивая результат этой подстановки с формулой (4), получим:

$$\exp(-\sigma\, t)\, f(x - v\, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\,n}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{2\,\sigma\, t}{n}\right)^k f\left(x - \frac{2\,(n-k)}{n}\, v\, t\right). \qquad (8)$$

Переобозначая в равенстве (8) $x - v\, t \mapsto x$ и вводя новые величины $\xi = v\, t$ и $\gamma = \sigma/|v|$, приходим к утверждению теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о   з а в е р ш е н о.

Полагая в формуле (2) $\xi = x$, получим, что для этой теоремы справедливо следующее

Следствие 1. *Пусть $f \in UC_b(\mathbb{R})$ и γ – произвольное положительное число, тогда:*

$$\lim_{n\to\infty} \,||\, f - \hat{\sigma}_n^\gamma f \,|| = 0\,, \qquad (9)$$

где

$$(\hat{\sigma}_n^\gamma f)(x) = \frac{\exp(\gamma\,|x|)}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{2\,\gamma\,|x|}{n}\right)^k f\left(\frac{2kx}{n}\right). \qquad (10)$$

Доказанная выше теорема означает, что с любой наперёд заданной точностью функция $f \in UC_b(\mathbb{R})$ может быть представлена линейной комбинацией достаточно большого числа сдвигов её самой. Например, если $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$, то для этой функции формулы (1) и (2) сводится к:

$$\frac{1}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(\gamma\,|\xi|)}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{2\,\gamma\,|\xi|}{n}\right)^k \frac{n^2\, C_n^k}{n^2 + (n\, x + (2\, k - n)\, \xi)^2}\,.$$

Согласно же следствию теоремы любая функция $f \in UC_b(\mathbb{R})$ представляется линейной комбинацией растянутых копий её же, в частности, для функции из предыдущего примера формулы (9) и (10) дают:

$$\frac{1}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(\gamma\,|x|)}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{2\,\gamma\,|x|}{n}\right)^k \frac{n^2\, C_n^k}{n^2 + 4\, k^2\, x^2}\,.$$

Литература

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. 830 с.

2. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer, 2000. 589 p.

3. Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // Journal of Functional Analysis. 1968. Vol. 2, No. 2. pp. 238 – 242.

4. Remizov I. D. Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example) // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 328, No. 1. pp. 243–246.

MSC2020 35A35, 35C99, 35K15, 35K30

The Chernoff tangency and the autorepresentation of bounded functions

A. E. Rassadin
HSE University