УДК 517.926

Об одном необходимом условии приводимости линейных систем дифференциальных уравнений

Пашуткин Д. В.

ООО “Центр разработки и исследований”

Пусть задана линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $A(t)$ — непрерывная $n \times n$ матрица, $t \in [T, +\infty)$.

Рассматривается вопрос о приводимости системы (1) в классическом смысле, т. е. существовании преобразования Ляпунова $y = L(t)x$, с помощью которого система (1) может быть преобразована к системе с постоянной матрицей ([1], с. 158):

$$\frac{dy}{dt} = By. \tag{2}$$

Вопросам приводимости посвящен целый ряд работ. Как правило, ставится задача поиска достаточных условий, при которых система (1) приводима к системе (2) с заранее заданной матрицей B.

Известны также и необходимые признаки приводимости: например, требование правильности системы ([1], с. 170).

В докладе предложено новое необходимое условие приводимости (1). При этом конкретный вид матрицы B предполагается неизвестным. За основу взята идея из работы [2].

Одним из характерных свойств системы (2) является свойство:

$$Y(t+s) = Y(t)Y(s)$$

или

$$Y(t) = Y(t+s)Y^{-1}(s), \tag{3}$$

где $Y(t)$ – её фундаментальная матрица, $Y(0) = E$.

В случае приводимости системы (1) естественно ожидать наличия у её решений похожих свойств.

Действительно, если система (1) приводима, то при всех $t, s \in [T, +\infty)$ и некоторых постоянных $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ справедливы неравенства, являющиеся в некотором смысле аналогом соотношения (3):

$$k_1 \|X(t)\| \le \left\|X(t+s)X^{-1}(s)\right\| \le k_2 \|X(t)\|, \tag{4}$$

$$k_3 \exp\left(\int_T^t SpA(s)ds\right) \le \exp\left(\int_s^{t+s} SpA(s)ds\right) \le k_4 \exp\left(\int_T^t SpA(s)ds\right), \tag{5}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица системы (1).

Неравенства (4) и (5) дают необходимые условия приводимости системы (1). С помощью этого признака можно установить факт неприводимости системы дифференциальных уравнений из известного примера ([1], с.231) при

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{t^2} & 0 \end{pmatrix},$$

где $t \geq 1$.

Здесь

$$X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{3}t \\ \frac{2}{t} & -\frac{1}{3}t^2 \end{pmatrix},$$

$$X(t+s)X^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \frac{(t+s)^2}{3}s^2 + \frac{2s}{3}(t+s) & \frac{(t+s)^2}{3}s^2 - \frac{s^2}{3}(t+s) \\ \frac{2(t+s)}{3}s^2 - \frac{2s}{3}(t+s)^2 & \frac{2(t+s)}{3}s + \frac{s^2}{3}(t+s)^2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что при неограниченном росте $t = s$ левая часть неравенства (4) не выполняется.

Литература

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск ун-та, 1998. 480 с.

2. Пашуткин Д. В. О неприводимости нелинейных дифференциальных уравнений // Труды Второй Всероссийской научной конференции (1–3 июня 2005 г.). Часть 3, Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Матем. моделирование и краев. задачи, СамГТУ, Самара. 2005. С. 190–193.

MSC2020 34C20

On a necessary condition for the reducibility of linear systems of differential equations

D. V. Pashutkin

Development and research centre Ltd