

УДК 534.11

## Математическое моделирование нелинейных колебаний стержня переменной длины

Литвинов В. Л.<sup>1</sup>, Литвинова К. В.<sup>2</sup>

филиал ФГБОУ ВО "СамГТУ" в г. Сызрани<sup>1</sup>,  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова<sup>2</sup>

Среди всего множества проблем динамики упругих систем с точки зрения технических приложений весьма актуальны задачи о колебаниях в системах с изменяющимися во времени геометрическими размерами. Исследования многих авторов по динамике подъемных канатов привели к необходимости постановки новых задач механики, касающихся динамики одномерных объектов переменных длин [1–4]. В математической формулировке это сводится к новым задачам математической физики – к исследованию соответствующих уравнений гиперболического типа в переменных областях изменения обоих аргументов [6].

До настоящего времени не существует общего подхода к формулировке таких задач, и авторы в каждом конкретном случае приспособливают существующие методы к решению рассматриваемого вопроса [1–9]. Отметим при этом, что и способы решения этих уравнений в переменных геометрических областях качественно отличны от классических способов математической физики. Например, для колебаний струн переменных длин теряют привычный смысл понятия собственных частот и фаз, т. е. собственных чисел и собственных функций, так как частоты колебаний струны переменной длины будут некоторыми функциями времени. Теряется независимость отдельных тонов колебаний. Другими словами, изучаемый динамический процесс эволюционирует во времени.

Эффективность выделения собственных движений (тонов колебаний), очевидно, зависит от отношения скорости изменения длины объекта к скорости распространения в нем упругой волны. При скорости изменения длины, соизмеримой со скоростью распространения волны в упругом объекте, будет иметь место быстропротекающий неустановившийся динамический процесс [5].

В большинстве технических приложений, имеющих дело с упругими объектами переменной длины, как правило, отношение скорости изменения длины к скорости упругой волны в нем мало. Например, в шахтных подъемниках скорость подъема лежит в пределах 10–20 м/с, а скорость упругой волны в стальном канате составляет около 4200 м/с. Даже в задачах о вытягивании стального каната баллистическим телом это отношение скоростей обычно не превышает 0,1 и может считаться малым [5]. Эти факты дают возможность использовать при построении теории движения объектов переменной длины обобщения фундаментальных классических понятий «собственных чисел» и «собственных частот».

При постановке задач для рассматриваемого класса систем наиболее трудным является корректная формулировка краевых условий на движущихся границах. В работе рассмотрен новый частный случай задачи о продольно – поперечных колебаниях стержня с движущейся границей, один конец которого закреплен, а второй свободен. На основе вариационных принципов механики выведены уравнения движения вместе с соответствующими краевыми условиями, учитывающие геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды. Проведена линеаризация указанной модели и установлено, что полученная модель совпадает с классической в частном случае малых колебаний. Таким образом, соблюдается принцип однородности, а полученная математическая модель позволяет описывать колебания большой

интенсивности стержня с движущейся границей.

## Литература

1. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины // Киев: Наук. думка. 1962. 332 с.
2. Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 26, вып. 3. С. 77–80.
3. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками // М.: Физматлит. 2001. 320 с.
4. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159–161.
5. Литвинов В.Л. Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно-технического развития. 2016. № 1 (101). С. 19–24.
6. Литвинов В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 188-199.
7. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2015. Т. 19, № 2. С. 382-397.
8. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография / В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 100 с.
9. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Применение метода Канторовича–Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.

MSC2020 74H45, 74K05

## Mathematical modeling of nonlinear vibrations of a rod of variable length

V. L. Litvinov<sup>1</sup>, K. V. Litvinova<sup>2</sup>

Syzran' Branch of Samara State Technical University<sup>1</sup>,  
Lomonosov Moscow State University<sup>2</sup>