

УДК 519.63

## **Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью\***

Ладонкина М. Е.<sup>1,2</sup>, Повещенко Ю. А.<sup>1,2</sup>, Рагимли О. Р.<sup>1</sup>, Чжан Хаочэнь<sup>1,2</sup>

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН<sup>1</sup>,  
МФТИ<sup>2</sup>

Как показала практика, принцип полной консервативности [1] является одним из весьма эффективных критериев качества разностных схем, возникающих при численном моделировании движений сплошной среды. Проблема построения двухслойных по времени разностных схем, удовлетворяющих этому принципу, была решена в [2] для случая лагранжева описания движения среды. Определенные трудности возникли при попытке построить такие схемы для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных. В [3] было рассмотрено весьма широкое семейство двухслойных разностных схем и показано, что оно не содержит полностью консервативной разностной схемы. В работе [4] была построена трехслойная полностью консервативная схема. На случай пространственных течений она была обобщена в [5].

Настоящая работа является естественным продолжением [6-8] с использованием операторного подхода [9-11] и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности системы. В ней работа сил термодинамического сжатия связана с дивергентным сжатием вещества, интерполяция по времени скоростей движения которого использует технику профилирования временных весов по пространству.

Сами же интерполяционные веса связаны с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Такая нелинейная аппроксимация скоростей частиц в узлах разностной сетки (зависящая от массы этих частиц) обеспечивает одновременно две вещи. Во-первых, она сохраняет внутреннюю энергию в данном типе дивергентных разностных схем, что обеспечивается отсутствием постоянно действующих аппроксимационных источников разностного происхождения в уравнении внутренней энергии, производящих «вычислительную» энтропию, в том числе на сингулярных особенностях решения (например, на расходящихся центрированных волнах разрежения). Во-вторых, эта аппроксимация для узловых частиц переменной массы обеспечивает одновременный согласованный баланс их импульса и кинетической энергии с учетом массоперетоков в движущейся среде. Наконец она является простой в реализации и имеет второй порядок аппроксимации.

Также в работе предложена естественная регуляризация потоков массы, импульса и внутренней энергии системы, не нарушающая свойств полной консервативности разностных схем данного класса. Исследована амплитуда этих потоков на явном и неявном слоях по времени, а также допустимость их адаптивного использования на сетках переменной структуры. Адаптивное включение искусственной вязкости может производиться следуя, например, [12], но не для схемы Лакса-Вендрофа, а для данного класса двухслойных по времени ПКРС.

В данной работе проведен теоретический анализ с разработанным применительно к полностью консервативным разностным схемам с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 20-01-00578

классом дивергентных адаптивных вязкостей. Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с использованием операторного подхода и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности, построено семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Значительное внимание в работе уделено способам конструирования регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности разностных схем данного класса, анализу их амплитуды и возможности их использования на неравномерных сетках. Разработанные схемы могут быть использованы для расчета процессов в неравновесных по температуре средах, например, при необходимости учета электрон-ионной релаксации температуры в короткоживущей плазме в условиях интенсивного энерговысвобождения. Предложенный алгоритм показал существенное улучшение качества численного решения задачи Эйнфельда. Эффективное сохранение баланса внутренней энергии в данном типе дивергентных разностных схем обеспечивается отсутствием постоянно действующих источников разностного происхождения, производящих «вычислительную» энтропию (в том числе на сингулярных особенностях решения).

## Литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва, наука, 1980.
2. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9, № 4. С. 953-958.
3. Кузьмин А.В., Макаров В.Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22, № 1. С. 123-132.
4. Кузьмин А.В., Макаров В.Л., Меладзе Г.В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных эйлера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20, № 1. С. 171-181.
5. Головизнин В.М., Краюшкин И.В., Рязанов М.А., Самарский А.А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АН СССР. 1983. № 105.
6. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27, № 5. С. 779-784.
7. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АН СССР. 1985. № 57.
8. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 160.
9. Самарский А.А., Колдобав А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий». 1996.

10. Колдоба А.В, Повещенко Ю.А, Гасилова И.В, Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теорий упругости // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86-96.
11. Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Шарова Ю.С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша РАН. 2018. № 160.
12. Попов Ю.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. Москва: Красанд. 2014.

MSC2020 76N15, 65M06

## **Theoretical Analysis of Fully Conservative Difference Schemes with Adaptive Viscosity**

M. E. Ladonkina<sup>1,2</sup>, Yu. A. Poveshenko<sup>1,2</sup>, O. R. Ragimli<sup>1</sup>, H. Zhang<sup>1,2</sup>  
Keldysh Institute of Applied Mathematics<sup>1</sup>,  
MIPT<sup>2</sup>