УДК 519.6

Исследование устойчивости семейства двухслойных ПКРС с адаптивной вязкостью*

Ладонкина М. Е.[1,2], Повещенко Ю. А.[1,2], Ми Синь[1,2]
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН[1], МФТИ[2]

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости семейства двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем (ПКРС) с профилированными по пространству временными весами для системы уравнений газовой динамики в переменных Эйлера с использованием адаптивной искусственной вязкости.

Отправной точкой для исследований служат работы [1–4]. Общий подход к исследованию двухслойных ПКРС в переменных Эйлера был предложен в [1], там были использованы изменяющиеся во времени и пространстве весовые множители, реализующие временную интерполяцию тех членов разностных уравнений, которые аппроксимируют пространственные производные. Главной целью является введение адаптивной вязкости с сохранением устойчивости схемы. В работе описывается первый этап: построение двухслойных ПКРС с адаптивной вязкостью и тестирование ПКРС на задаче Эйнфельда.

Для описания течения среды рассматривается система уравнений газовой динамики в эйлеровой системе координат:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ \vec{\mu} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\, \rho\vec{u}}{\partial t} + grad\ P + div\ (\vec{\mu}\cdot\vec{u}) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\, \varepsilon\rho}{\partial t} + P\ div\ \vec{u} + div\ (\vec{\mu}\varepsilon) = 0, \tag{3}$$

где $\vec{u}$ — скорость течения, ρ — плотность среды, $\vec{\mu} = \rho\cdot\vec{u}$ — плотность потока массы, ε — удельная внутренняя энергия. $E = \rho\varepsilon$ — внутренняя энергия. Система уравнений замыкается уравнением состояния идеального газа $P = (\gamma - 1)\varepsilon$.

На рис. 1 представлена разностная сетка, ω – узлы разностной сетки, Ω – ее ячейки.

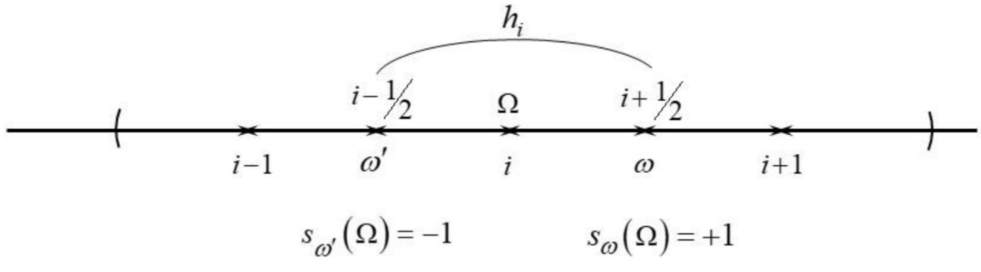

Рис. 1. Разностная схема

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 20-01-00578, и China Scholarship Council

Термодинамические величины ε, ρ, P, массу ячейки $M = \rho V$ и ее обьем V будем относить к ячейкам Ω с целыми индексами (ε_i, ρ_i, P_i, M_i, V_i). Кинетические величины $\vec{u}$, $\vec{I}$ приузловые обьем ν и массу m будем относить к узлам ω с полуцелыми индексами ($u_{i+\frac{1}{2}}$, $I_{i+\frac{1}{2}}$, $\nu_{i+\frac{1}{2}}$, $m_{i+\frac{1}{2}}$). Для простоты изложения берем равномерную сетку с шагом h.

На временных слоях t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ — шаг по времени) введем разностные производные по времени и пространственно-точечные (т. е. в узлах сетки ω) временные интерполяции:

$$a_t = \frac{(\hat{a} - a)}{\tau}, \quad a^{\sim} \equiv a^{(\delta)} = \delta\hat{a} + (1-\delta)a.$$

Выпишем полностью консервативные разностные схемы:

$$\frac{\hat{\rho}_i - \rho_i}{\tau} + \frac{\mu^{\sim}_{i+\frac{1}{2}} + \mu^{\sim}_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\hat{I}_{i+\frac{1}{2}} - I_{i+\frac{1}{2}}}{\tau} + (P^{\sim}_{i+1} - P^{\sim}_{i}) + (\mu^{\sim}_{i+1} u^{\sim}_{i+1} - \mu^{\sim}_{i} u^{\sim}_{i}) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\hat{E}_i - E_i}{\tau} + P^{\sim}_i \frac{u^{\sim}_{i+\frac{1}{2}} - u^{\sim}_{i-\frac{1}{2}}}{h} + \frac{\mu^{\sim}_{E_{i+\frac{1}{2}}} - \mu^{\sim}_{E_{i-\frac{1}{2}}}}{h} = 0. \tag{6}$$

Введем адаптивные вязкости в массовом потоке, давлении, энергетическом потоке для уравнений массы, импульса и энергии соответственно:

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}(\rho_i + \rho_{i+1}) - \left(\frac{\nu}{h}\right)_{i+\frac{1}{2}} (\rho_{i+1} - \rho_i), \tag{7}$$

$$P^{\sim}_i = [P_i - \left(\frac{\nu_u}{h}\right)_i (u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}})]^{(0.5)}, \tag{8}$$

$$\mu_{Ei+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}} \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} - \left(\frac{\nu_E}{h}\right)_{i+\frac{1}{2}} (E_{i+1} - E_i). \tag{9}$$

Для тестирования была выбрана задача Эйнфельда [5, 6] о распространении двух симметричных волн разрежения в противоположные стороны. Большой научный интерес представляет поведение внутренней энергии на численном решении. Задача решается как частный случай задачи Римана о распаде произвольного разрыва. В качестве расчетной области выбран отрезок $[-1, 1]$. Разрыв располагается в центре этого отрезка в точке $x = 0$. Начальные условия представлены в нижнем таблице. В качестве системы единиц измерения в расчетах используется СИ.

Таблица 1

Левая область ($x < 0$)			Правая область ($x > 0$)		
ρ	u	p	ρ	u	p
1	-2	0.4	1	-2	0.4

Со временем в центре области образуется расширяющийся неподвижный участок (плато) с постоянными значениями плотности и давления газа, которые являются достаточно малыми. Т. к. уравнение состояния идеального газа выполняется, удельная внутренняя энергия остается константой на этом участке, энтропия также остается постоянной во всей расчетной области при $t > 0$ (изоэнтропический процесс). Численные решения этой задачи на основе многих известных методов передают поведение удельной внутренней энергии неудовлетворительно.

На графиках (рис. 2-6) приведены аналитические и численные решения для плотности, давления, энергии, скорости и температуры.

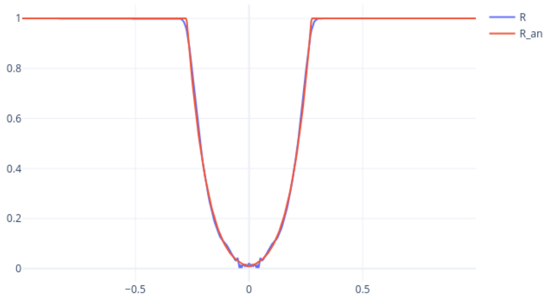

Рис. 2. Графики плотности

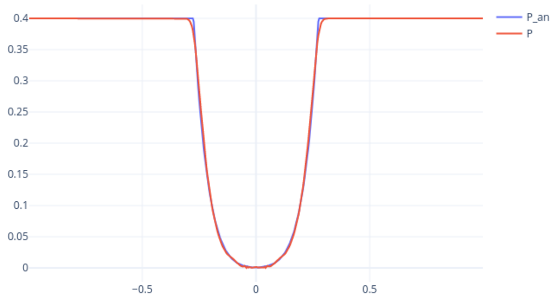

Рис. 3. Графики давления

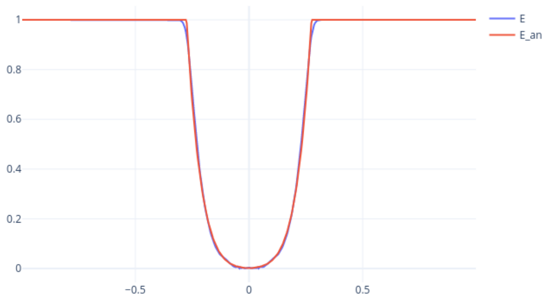

Рис. 4. Графики энергии

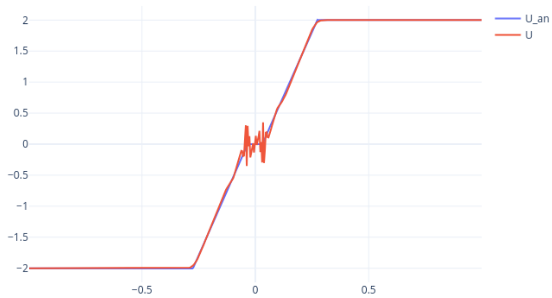

Рис. 5. Графики скорости

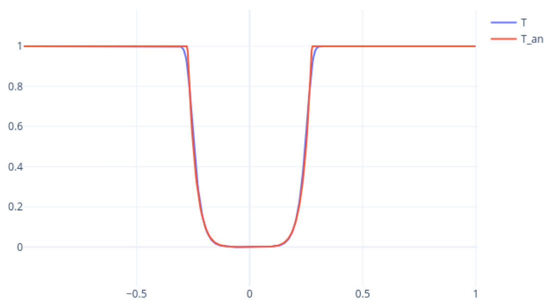

Рис. 6. Графики температуры

По сравнению с наиболее известными разностными методами, расчеты показали, что предложенная выше схема существенно улучшает аппроксимацию термодинамических величин в задаче Эйнфельда. В то же время выбор адаптивной вязкости для устранения высокочастотных осцилляций в уравнении импульса требует дальнейших исследований.

Литература

1. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27, № 5. С. 779-784.

2. Колдоба А. В., Кузнецов О. А., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1985. № 57. 14 с.

3. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнения газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 160. 14 с.

4. Повещенко Ю. А., Ладонкина М. Е., Подрыга В. О., Рагимли О. Р., Шарова Ю. С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 14. 23 с.

5. Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф. Численное решение задачи Эйнфельдта на основе разрывного метода Галеркина // Препринты ИПМ им М.В.Келдыша. 2019. 090. 22 с.

6. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. 2nd Edition, Springer, 1999. 645 p.

MSC2020 35Q31, 76N15

Study on the stability of two-layer completely conservative difference scheme family with adaptive viscosity

M. E. Ladonkina[1,2], Yu. A. Poveschenko[1,2], Mi Xin[1,2]

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences[1], MIPT[2]