УДК 517.9

Достаточные условия разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами

Донцова М. В.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1,\ f_2,\ S_1,\ S_2$ – известные функции.

Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, т. е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{2}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – известные функции.

Задача (1), (2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

С помощью метода дополнительного аргумента проводится исследование разрешимости задачи Коши (1), (2) в области Ω_T. С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций, один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T; $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m = \overline{1,n}$ на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2...$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2, l = \overline{0,2}\},\ C_f = max\{\underset{\Omega_T}{sup}|f_i|, \underset{\Omega_T}{sup}|\partial_x f_i|, i = 1,2\},$$

$$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}, \text{ где } K - \text{положительное число.}$$

Основной результат исследования сформулирован как теорема [1]:

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_i \in \bar{C}^2(R), i = 1, 2,$ $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),$ $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),$ $K = C_\varphi + TC_f$ *и выполняются условия:*

$$\partial_u S_1 < 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 < 0,\ \partial_v S_2 < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \le 0,\ \varphi_2'(x) \le 0 \text{ на } R,\ \partial_x f_1 \le 0,\ \partial_x f_2 \le 0 \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение*

$$u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (3)-(6).

В теореме 1 сформулированы условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1), (2), где $u(t,x) = w_1(t,t,x),$ $v(t,x) = w_2(t,t,x)$.

Литература

1. Донцова М. В. Достаточные условия нелокальной разрешимости системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 60–78.

MSC2020 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

Sufficient conditions of a solvability for a system of quasilinear equations of the first order with constant terms

M. V. Dontsova

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod