УДК 517.95

Об одной полунелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области

Джамалов С. З., Ашуров Р. Р., Туракулов Х. Ш.
Институт математики имени В. И. Романовского АНРУз

В работе А. В. Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественным образом возникает вопрос: возможна ли замена условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, обеспечивающими корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф. И. Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [2]. Близкие по постановке задачи для уравнения Трикоми были исследованы в ограниченных областях в работах [3–7].

В данной работе с использованием результатов работ [6, 7] изучается однозначная разрешимость обобшенного решения одной полунелокальной краевой задачи для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области.

Рассмотрим уравнение Трикоми

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + a\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = f\,(x,t,z), \tag{1}$$

где $-\alpha < x < \beta, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ – оператор Лапласа в области

$$Q = (-\alpha, \beta) \times (0,T) \times \mathbb{R} =$$

$$= Q_{\,1} \times \mathbb{R} = \{(x,t,z); x \in (-\alpha,\beta), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие в области Q функции.

Сформулируем постановку полунелокальной краевой задачи. Требуется найти обобщенное решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$u|_{x=-\alpha} = u|_{x=\beta} = 0, \tag{3}$$

при $p = 0,1$, где $D_{\,t}^{\,p} u = \frac{\partial^{\,p} u}{\partial\, t^{\,p}}$, $D_{\,t}^{\,0}\, u = u$, γ – некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) с условиями (2)-(3).*

Теорема 1. *Пусть выполнены следующее условия для коэффициентов уравнения (1):*

$$2\;a(x,t) + \mu\;x > \delta_1 > 0, \quad \mu\;c(x,t) - c_t(x,t) > \delta_2 > 0$$

для всех $(x,t) \in \overline{Q_1}$, где $\mu = \dfrac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ при $|\gamma| > 1$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$.

Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,3}(Q)$, такой что $\gamma \cdot f(x,0,z) = f(x,T,z)$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$ и для нее справедливы следующие оценки:

I) $\|u\|^2_{W_2^{1,3}(Q)} \leq c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(Q)}$,

II) $\|u\|^2_{W_2^{2,3}(Q)} \leq c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(Q)}$,

где c_i – положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

Здесь через $W_2^{l,s}(Q)$ обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{l,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^l(Q_1)} \, d\lambda, \qquad (A)$$

где $W_2^l(Q_1)$ – пространства Соболева, s и l – любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q_1)$, определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q_1)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \int\limits_{Q_1} |D^\alpha \vartheta|^2 \, dxdt,$$

α – это мультииндекс, D^α – обобщенная производная по переменними x и t, а через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье функции $u(x,t,z)$.

Замечание. Результат справедлив для многомерного уравнения Трикоми.

Литература

1. Бицадзе А. В., Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа, ДАН СССР. 1953. Т. 122, № 2. С. 167–170.

2. Франкль Ф. А., Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 196–202.

3. Кальменов Т. Ш., О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа// Дифференциальные уравнения. 1978. Т.14, № 3. С. 546–548.

4. Сабитов К. Б., Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Док. РАН, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.

5. Цыбиков Б. Н., О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа // В. кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 1986. С. 201–206.

6. Джамалов С. З., Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода // Вестник Самарского государственного технического университета, Сер.физ.-мат.науки, 2017, 21:4. С. 1–14.

7. Джамалов С. З., Ашуров Р. Р., О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве // Казахский математ. журнал. 2015. Т. 18, № 2. С. 59–70.

MSC2020 35M10

On a semi-nonlocal boundary value problem for the three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain

S. Z. Dzhamalov, R. R. Ashurov, Kh. Sh. Turakulov

Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy Academy of Sciences of Sciences of the Republic Uzbekistan