УДК 515.162.2

О топологической структуре несущих поверхностей для A-диффеоморфизмов с одномерными аттракторами и репеллерами*

Гринес В. З., Минц Д. И.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В работе [1] введён класс $\mathbb{G}(M^2)$ A-диффеоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей, неблуждающее множество которых состоит из одномерных базисных множеств, и получена их топологическая классификация. Примеры диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$ могут быть построены на любой замкнутой ориентируемой поверхности рода $g \geq 2$. Основной целью настоящего доклада является установление топологической структуры несущих поверхностей для диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$, а также изучение свойств данных диффеоморфизмов.

Пусть M^2 – гладкая замкнутая ориентируемая поверхность, $f : M^2 \to M^2$ – диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A, $NW(f)$ – неблуждающее множество f.

Из [2] следует, что произвольное одномерное базисное множество диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ является аттрактором или репеллером и имеет локальную структуру прямого произведения интервала и канторова множества.

Периодическая точка p, принадлежащая одномерному аттрактору (репеллеру) Λ диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$, называется s-граничной (u-граничной) периодической точкой, если одна из компонент связности множества $W^s(p)\backslash p$ $(W^u(p)\backslash p)$ не пересекается с Λ и обе компоненты связности множества $W^u(p)\backslash p$ $(W^s(p)\backslash p)$ пересекаются с Λ. Для одномерного аттрактора (репеллера) множество s-граничных (u-граничных) периодических точек не пусто и конечно.

Известно, что для одномерного аттрактора (репеллера) Λ достижимая изнутри граница множества $M^2\backslash\Lambda$ распадается единственным образом на конечное число связок. Связкой b аттрактора (репеллера) Λ называется объединение максимального числа h_b неустойчивых (устойчивых) многообразий s-граничных (u-граничных) периодических точек $p_1, ..., p_{h_b}$ множества Λ, достижимых из некоторой (общей для всех) точки $x \in (M^2\backslash\Lambda)$. Число h_b называется степенью связки.

Любое базисное множество Λ диффеоморфизма f единственным образом представляется в виде конечного объединения

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_q,\ q \geq 1,$$

компактных подмножеств, называемых C-плотными компонентами множества Λ, таких, что $f^q(\Lambda_j) = \Lambda_j, f(\Lambda_j) = \Lambda_{j+1}, j \in \{1, ..., q\}$ $(\Lambda_{q+1} = \Lambda_1)$. Для каждой точки x, принадлежащей C-плотной компоненте Λ_j, множество $W^s_x \cap \Lambda_j$ $(W^u_x \cap \Lambda_j)$ плотно в Λ_j.

Для C-плотной компоненты Λ_i аттрактора (репеллера) Λ обозначим через m_{Λ_i} число связок, принадлежащих Λ_i, и через r_{Λ_i} сумму степеней этих связок. Для произвольной C-плотной компоненты Λ_i одномерного аттрактора (репеллера) Λ диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ существует подмногообразие N_{Λ_i} (канонический носитель) со следующими свойствами:

*Результаты, полученные в докладе, выполнены при поддержке гранта РНФ (проект 21-11-00010), кроме доказательства теоремы 2, выполненного при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931

1. $N_{\Lambda_i} \cap NW(f) = \Lambda_i$;
2. N_{Λ_i} является компактной ориентируемой поверхностью рода $q_{\Lambda_i} = 1 + \dfrac{r_{\Lambda_i}}{4} - \dfrac{m_{\Lambda_i}}{2}$ с m_{Λ_i} компонентами края и отрицательной эйлеровой характеристикой.

Пусть $f : M^2 \to M^2$ – диффеоморфизм из класса $\mathbb{G}(M^2)$. Обозначим через k_f число всех C-плотных компонент всех базисных множеств диффеоморфизма f, через κ_f число всех связок, принадлежащих данным C-плотным компонентам, через g_i $(i \in \{1, ..., k_f\})$ род канонического носителя i-ой C-плотной компоненты. Для числа $g \geq 0$ обозначим через M^2_g замкнутую ориентируемую поверхность рода g. Основными результатами доклада являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathbb{G}(M^2)$. Тогда многообразие M^2 гомеоморфно связной сумме*

$$M^2_{g_1}\#...\#M^2_{g_{k_f}}\#\underbrace{\mathbb{T}^2\#...\#\mathbb{T}^2}_{m_f},$$

где $m_f = \dfrac{\kappa_f}{2} - k_f + 1$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathbb{G}(M^2)$. Тогда f является Ω-устойчивым, но не является структурно устойчивым.*

Литература

1. Гринес В. З., Калай Х. Х. Диффеоморфизмы двумерных многообразий с просторно расположенными базисными множествами // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. №. 1 (241). С. 189-190.
2. Плыкин Р. В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла // Математический сборник. 1971. Т. 84. №. 2. С. 301-312.

MSC2020 37E30

On the topological structure of ambient surfaces for A-diffeomorphisms with one-dimensional attractors and repellers

V. Z. Grines, D. I. Mints

HSE University