

УДК 519.63

# Математическое моделирование геофизических процессов в слое электропроводящей жидкости переменной глубины

Казанков В. К., Холодова С. Е.

Университет ИТМО

*Аннотация:* Рассматривается краевая задача магнитной гидродинамики, которая в приближении длинных волн малой амплитуды редуцируется к интегрированию одного скалярного уравнения для модифицированной функции, описывающей возмущение свободной поверхности жидкого слоя. Решение полученного дисперсионного уравнения сводится к поиску корней полинома шестой степени с комплексными коэффициентами. В статье обзревается численный метод и алгоритм, созданный на основе машинного обучения и итерационного численного метода, который позволяет отыскать различные корни данного полинома. Проводится анализ зависимости решения от параметра Кориолиса, волнового числа и магнитного числа Рейнольдса, который позволяет оценить качественно и численно динамику процесса.

*Ключевые слова:* магнитная гидродинамика вращающейся жидкости, дифференциальные уравнения в частных производных, математическое моделирование, магнитное число Рейнольдса.

## 1. Введение

Одним из классических методов описания динамики жидкости является составление системы дифференциальных уравнений в частных производных с граничными и начальными условиями. Если рассматривается движение электропроводящей жидкости в магнитном поле, то в ней могут возникать электрические точки, которые способны оказывать существенное влияние на магнитное поле и характер движения среды. Существует прямая связь между гидродинамическим движением и электромагнитными эффектами, и чем больше линейный масштаб рассматриваемого явления, тем сильнее взаимосвязь.

В работе рассматривается задача магнитной гидродинамики, которая в приближении длинных волн малой амплитуды редуцируется к интегрированию одного скалярного уравнения для модифицированной функции, описывающей возмущение свободной поверхности жидкого слоя.

Представленная математическая модель описывает ряд динамических процессов, происходящих как в технических, например, в реакторах на быстрых нейтронах, так и в природных системах – в недрах звезд и в толще океана [1, 2].

## 2. Постановка задачи

Динамика вращающейся несжимаемой электропроводящей жидкости описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [3]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \rangle \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - g\mathbf{z} + \frac{1}{\mu\rho} [\text{rot } \mathbf{b} \times \mathbf{b}],$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{b} \times \mathbf{v}] + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{b}, \\ \text{div } \mathbf{b} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

с граничными условиями на поверхностях  $z = h_B(x, y, t)$  и  $z = Z(x, y)$  вида

$$b_z(x, y, h_B, t) = b_{z0}(x, y, t), \quad b_z(x, y, Z, t) = b_{z0}^{(e)},$$

где  $h_B$  – свободная поверхность жидкого слоя, вращающейся со скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{b}$  – вектор магнитной индукции поля,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\sigma$  – электрическая проводимость,  $Z(x, y)$  – непроницаемое твердое дно.

В случае длинных волн малой амплитуды решение исходной краевой задачи сводится к решению одного скалярного уравнения

$$\mathcal{D} (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \left( \left( \mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \mathcal{D}_t - \frac{\mathcal{D}^2}{\mu\rho} \right) \Delta_2 \xi = \frac{b_{z0}^{(e)} - b_{z0}}{(\mu\rho)^2 H_0} \quad (1)$$

для некоторой модифицированной функции возмущения глубины слоя  $\xi$  [3].

В работах [4, 5] доказано существование решения уравнения (1) в виде гармоник

$$\xi = \text{Im}(A \exp(i(kx + ly - \sigma t))) \quad (2)$$

как для конечных, так и бесконечного значений магнитного числа Рейнольдса, причем частота  $\sigma$  является решением дисперсионного уравнения

$$P_n(\sigma) = \sum_{k=0}^n c_k \sigma^k, \quad (3)$$

где  $c_k \in \mathbb{C}$  определяются из соотношений физических величин, которые в дальнейшем будем называть физическими параметрами. Корни полинома  $P_n(\sigma)$  обозначим за  $\tilde{\sigma}$ . Согласно основной теореме алгебры, существует ровно  $n$  штук  $\tilde{\sigma}$  с учетом их кратностей. Каждый характеризует динамику исследуемого процесса.

Пусть  $b_{z0}^{(e)} - b_{z0} = \text{Im}(\tilde{B} \exp(2i(kx + ly)) \exp(-i\sigma t))$ , а глубина  $H_0$  представима в виде функции

$$H_0 = \text{Im}(\tilde{H}_0 \exp(i(kx + ly))),$$

тогда уравнение (3) принимает вид

$$(kb_{0x} + lb_{0y}) (k^2 + l^2) (\alpha^2 - \sigma^2)^2 \left( \sigma^2 + \sigma \frac{i(l^2 + k^2)}{R_m} + \frac{(kb_{0x} + lb_{0y})^2}{\mu\rho} \right) = \frac{\tilde{B}}{\tilde{H}_0 (\mu\rho)^2}. \quad (4)$$

Для анализа уравнения (4) следует найти корни  $\tilde{\sigma}$  полинома  $P_n(\sigma)$ . В рассматриваемом случае  $n = 6$ . Поиск  $\tilde{\sigma}$  производится с помощью алгоритма, основанного на машинном обучении и итерационном численном методе.

Итерационные численные методы [6], основанные на построении касательных полиномов  $P_q(\sigma)$ , где  $q < n$ , обладают высокой скоростью сходимости к корню  $\tilde{\sigma}$  из начального приближения  $\sigma^0$ , иначе говоря,  $\sigma^0 \rightarrow \tilde{\sigma}$ . При этом  $\tilde{\sigma} \in Q$ , где  $Q$  принадлежит внутренности пересечения поверхностей, образованных полиномами  $P_q(\sigma)$  и  $P_n(\sigma)$ .

Возникает необходимость в выборе набора начальных приближений  $\{\sigma_k^0\}$  таких, чтобы  $\sigma_k^0 \rightarrow \tilde{\sigma}_j$ , где  $\{\tilde{\sigma}_j\}_{j \leq n}$  – множество уникальных корней  $\tilde{\sigma}_j$ . Для получения начальных приближений используется метод имитации отжига [7] с минимизацией функционала вида

$$L(\sigma) = |P_n(\sigma)|.$$

### 3. Результаты

Итоговая модель имеет физические входные параметры:  $A$  – амплитуда гармоники,  $\widetilde{H}_0$  – амплитуда невозмущенной глубины жидкого слоя,  $\alpha$  – параметр Кориолиса,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\rho$  – плотность,  $Rm$  – магнитное число Рейнольдса,  $k$  и  $l$  – волновые числа,  $b_{0x}$  и  $b_{0y}$  – проекции вектора магнитной индукции внешнего поля на оси  $x$  и  $y$ ,  $b_{n0}^{(e)}$  – нормальная компонента вектора магнитной индукции на ограничивающей жидкий слой поверхности; и программные параметры:  $r$  – радиус шара генерации начальных приближений,  $h$  – шаг дискретизации зависимости физического параметра от  $\tilde{\sigma} \in Q$ . При изучении зависимости исследуемого физического параметра от  $\tilde{\sigma}$  на отрезке  $[0,01; 20]$  значения остальных физических параметров фиксировались равными 1, кроме  $g = 9,8$ , с шагом  $h = 0,2$  и  $r = 50$ .

Пусть  $\tilde{\sigma} = \sigma_1 + i\sigma_2$ , тогда решение (2) представимо в виде суммы гармоник

$$\xi = -A \sin(kx + ly) \sin(\sigma_1 t) e^{\sigma_2 t}.$$

Знак мнимой части  $\tilde{\sigma}$  определяет динамику гармоники. Если  $\sigma_2 < 0$ , то гармоника быстро затухает, при  $\sigma_2 > 0$  наблюдается неустойчивый режим, а при  $\sigma_2 = 0$  следует существование периодического режима.

На рисунках, представленных ниже, показана графическая интерпретация зависимости  $\tilde{\sigma}$  от исследуемого параметра, где верхняя пара ячеек показывает распределение  $\tilde{\sigma}$  для неоднородного уравнения (4), а нижняя пара отображает распределение  $\tilde{\sigma}$  для однородного уравнению, соответствующего уравнению (4) при  $\widetilde{B}_0 = 0$ . Правые графики показывают изменение  $Im(\tilde{\sigma})$ , а левые –  $Re(\tilde{\sigma})$ .

На рис. 1 представлены зависимости  $\tilde{\sigma}$  от параметра Кориолиса  $\alpha \in [0,01; 20]$ .

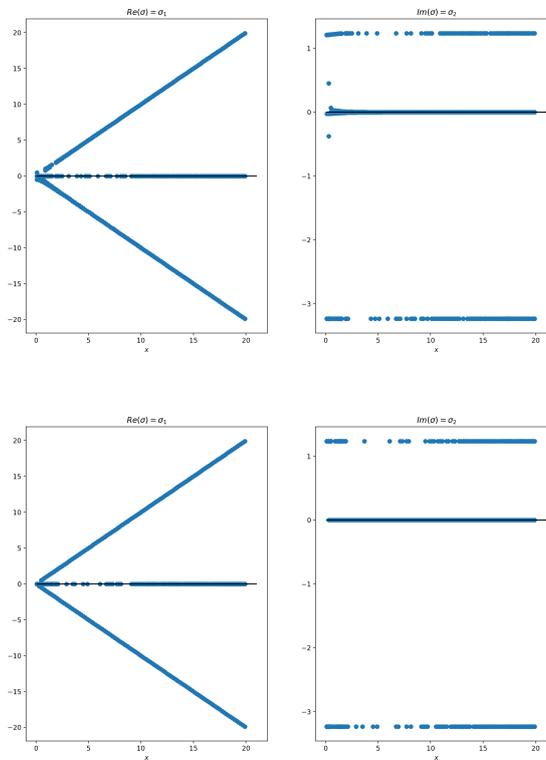
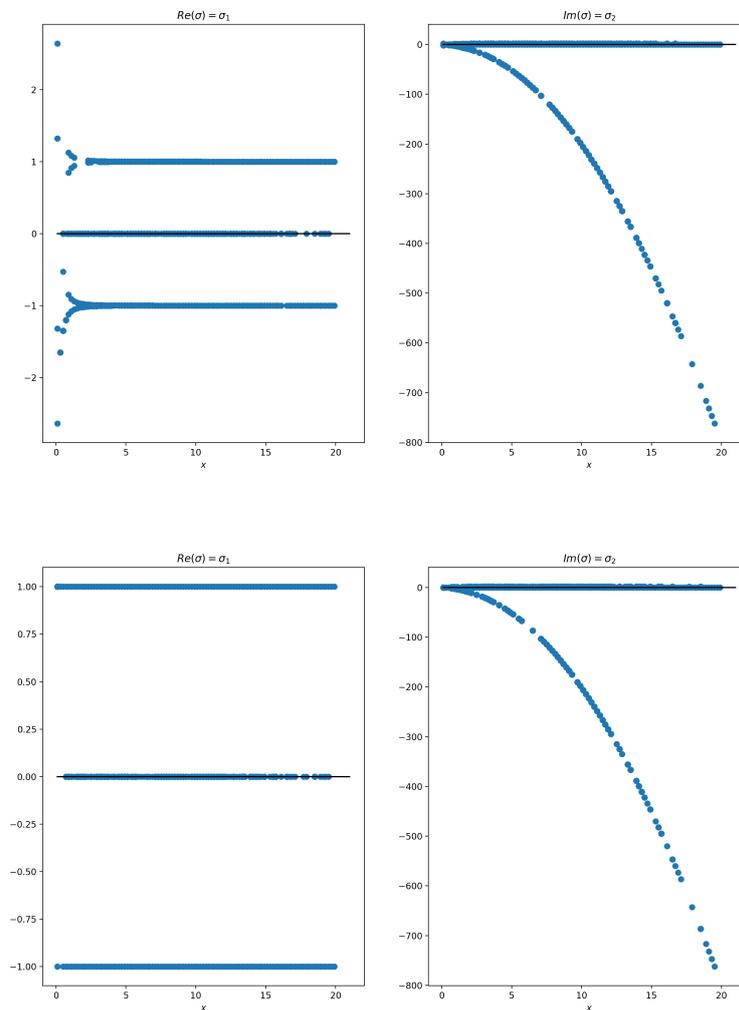


Рис. 1. Зависимость корней от параметра Кориолиса

Верхняя пара распределений практически неотличима от нижней, следовательно при

быстром вращении слоя внешняя магнитное поле оказывает незначительное влияние на динамику процесса внутри жидкого слоя. С ростом  $\alpha$  ветки корней  $\sigma_2$  приобретают асимптотическое поведение, что приводит к периодическому режиму, так как гармоника, образованная отрицательным значением  $\sigma_2$  убывает быстрее, чем растет гармоника, образованная положительным значением  $\sigma_2$ .

Визуализация распределения  $\tilde{\sigma}$  от волнового числа  $k$  представлена на рис. 2. При малых значениях волнового числа  $k$  наблюдается значительное расхождение значений частоты колебаний, обусловленное действием внешнего магнитного поля, но расхождение сглаживается с ростом значения волнового числа, приводя к затуханию динамического процесса.



**Рис. 2.** Зависимость корней от волнового числа

Наиболее существенные отличия распределения решений неоднородного уравнения от однородного видны на рис. 3, 4. В первом случае ярко выражены шесть ветвей корней, но только четыре ветви для однородного уравнения. В обоих случаях гармоники, образованные положительным значением  $\tilde{\sigma}$  растут быстрее, чем гармоники, образованные отрицательным значением  $\tilde{\sigma}$ , что на достаточно небольшом временном промежутке приводит к неустойчивому режиму для  $Rm > 2$ .

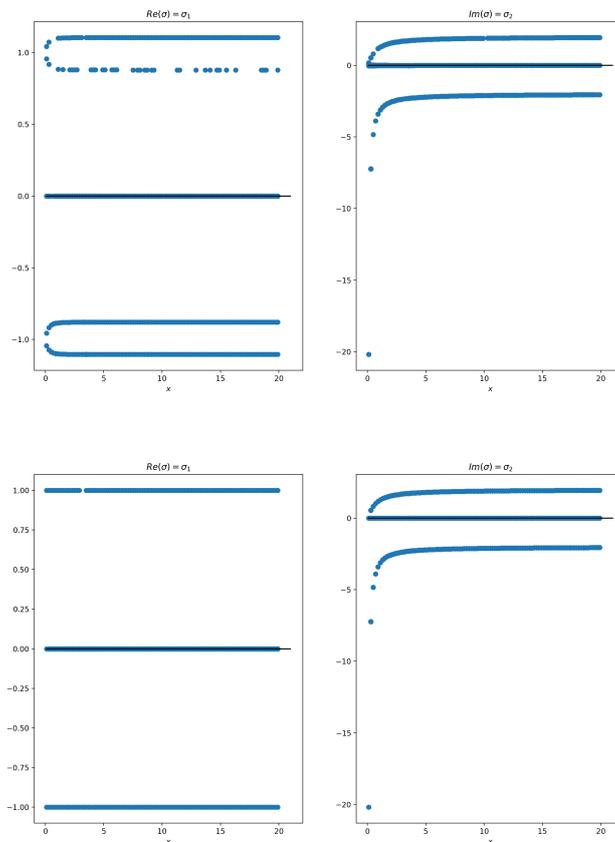


Рис. 3. Зависимость корней от магнитного числа Рейнольдса

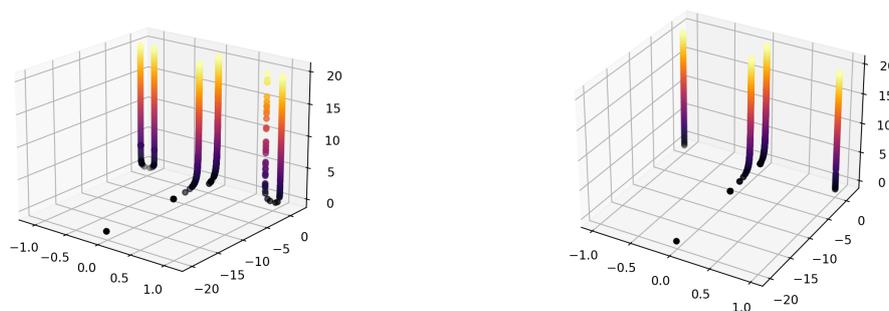
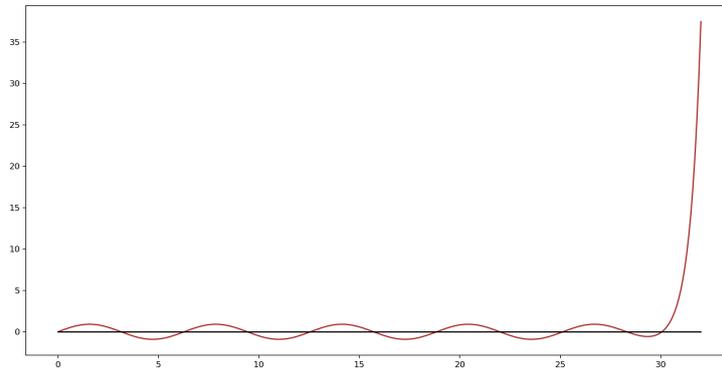


Рис. 4. Пространственная визуализация зависимости корней от магнитного числа Рейнольдса

На рис. 5 представлена графическая визуализация построенного решения, определяющего гидродинамический процесс при  $Rm = 1$ . Из рисунка видно, что на достаточно небольшом временном промежутке существует вполне периодический режим, а при  $t \rightarrow \infty$  процесс приобретает неустойчивый характер. При уменьшении значения магнитного числа Рейнольдса будет увеличиваться время существования периодического режима.



**Рис. 5.** Динамика процесса при  $Rm = 1$

## 4. Заключение

Разработан метод поиска корней полинома произвольной степени в комплексной области с комплексными коэффициентами, реализован алгоритм на языке программирования Python. Представлен качественный и численный анализ динамики идеальной вращающейся электропроводящей жидкости переменной глубины при изменении значения магнитного числа Рейнольдса, параметра Кориолиса и волнового числа как при наличии внешнего магнитного поля, так и при его отключении.

## Литература

1. Zhang K. K., Busse F. H. Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // J. Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Vol. 59, Issue 3. pp. 208–222.
2. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. Computer simulations of Earth's magnetic field // Geowissenschaften. 1997. Vol. 15. pp. 95-99.
3. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. On integration of the system of MHD equations modeling wave processes in a rotating liquid with arbitrary magnetic Reynolds number // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1268, No 1. pp. 012055.
4. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. The influence of dissipative effects on dynamic processes in a rotating electrically conductive liquid medium // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1359, No 1. pp. 012118.
5. Холодова С. Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Вычислительная математика и математическая физика. 2008. Т. 48, № 5. С. 882–898.
6. Иванисов А. В., Полищук В. К. Метод нахождения корней полиномов, сходящийся при любом начальном приближении // Вычислительная математика и математическая физика. 1985. Т. 25, № 5. С. 643–653.
7. Шамин Р. В. Машинное обучение в задачах экономики. М.: Грин Принт, 2019. 140 с.

MSC2020 86-10

## Mathematical modeling of geophysical processes in a layer of an electrically conducting liquid of variable depth

V. K. Kazankov, S. E. Kholodova  
ITMO University

*Abstract:* The boundary value problem of magnetic hydrodynamics is considered, which in the approximation of long waves of small amplitude is reduced to the integration of a single scalar equation for a modified function describing the perturbation of the free surface of a liquid layer. The solution of the obtained dispersion equation is reduced to the search for the roots of a polynomial of the sixth degree with complex coefficients. The article discusses a numerical method and an algorithm created on the basis of machine learning and an iterative numerical method that allows you to find different roots of a given polynomial. The analysis of the dependence of the solution on the Coriolis parameter, the wave number and the magnetic Reynolds number, which allow us to qualitatively and numerically assess the dynamics of the process, is carried out.

*Keywords:* magnetic hydrodynamics of a rotating fluid, partial differential equations, mathematical modeling, magnetic Reynolds number.

### References

1. K. K. Zhang, F. H. Busse. Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number. *J. Phys. Earth Planet. Inter.* 1990. Vol. 59., Issue 3. pp. 208–222.
2. G.A. Glatzmaier, P.H. Roberts. Computer simulations of Earth's magnetic field. *Geowissenschaften.* 1997. Vol. 15. pp. 95-99.
3. S. Peregudin, E. Peregudina, S Kholodova. On integration of the system of MHD equations modeling wave processes in a rotating liquid with arbitrary magnetic Reynolds number. *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. Vol. 1268, No. 1. pp. 012055.
4. S. Peregudin, E. Peregudina, S. Kholodova. The influence of dissipative effects on dynamic processes in a rotating electrically conductive liquid medium. *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. Vol. 1359, No 1. pp. 012118.
5. C. E. Kholodova. Dynamics of a rotating layer of an ideal electrically conductive incompressible fluid. *Computational mathematics and mathematical physics.* 2008. Vol. 48, No. 5. pp. 882-898. (In Russ.)
6. A. V. Ivanisov, V. K. Polishchuk. A method for finding the roots of polynomials converging at any initial approximation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1985. Vol. 25, No 5. pp. 643-653. (In Russ.)
7. R. V. Shamin. *Mashinnoe obuchenie v zadachakh ekonomiki*, ["Machine learning in economic problems"]. M.: Green Print, 2019. 140 p. (In Russ.)