УДК 517.962.2

# Корректность метода линеаризации дискретной системы в одном критическом случае

Афиногентова Е. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* Метод линеаризации широко используется для исследования нелинейных моделей. В статье рассматривается вопрос корректности такого метода в случае дискретной системы, для которой вопрос об устойчивости не решается линейным приближением, т. е. имеет место критический случай. Предложен способ получения оценки отклонения решения нелинейной системы от ее линеаризованного варианта в критическом случае одного единичного корня.

*Ключевые слова:* дискретная система, устойчивость, критический случай.

## 1. Введение

Пусть дискретный процесс описывается системой конечно-разностных уравнений вида

$$\begin{cases} y(k+1) = & y(k) + \lambda y^m(k) + p(k) + f(y(k), z(k)),\ y(0) = y_0, \\ z(k+1) = & Az(k) + q(k) + g(y(k), z(k)),\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{1}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Будем рассматривать систему (1) в области

$$D = \{(y, z):\ y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}^n,\ |y(k)| \le \delta_1, ||z(k)|| \le \delta_2\},$$

где $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0,\ f,\ p$ — скалярные функции, $g,\ q$ — векторные функции размерности $n$, удовлетворяющие условиям

$$|f(y, z)| \le \alpha |y|^{m+1},\ ||g(y, z)|| \le \beta(||z||^h + |y|^{m+1}),$$

$$m > 2,\ h \ge 2,\ |p(k)| \le P,\ ||q(k)|| \le Q,\ P > 0,\ Q > 0.$$

Здесь $||\cdot||$ — норма евклидова. Предполагается, что $A$ - постоянная матрица размерности $n \times n$, модули всех собственных значений которой меньше единицы. Пусть $\lambda < 0,\ m$ — нечетное число. Это гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого решения «укороченного» уравнения [1]

$$y(k+1) = y(k) + \lambda y^m(k) + f(y(k), 0). \tag{2}$$

В силу сделанных относительно матрицы $A$ предположений линейная система

$$\tilde{z}(k+1) = A\tilde{z}(k),\ k = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

асимптотически устойчива. Тогда [2] для нее существует определенно положительная функция Ляпунова $W(\tilde{z}(k))$ такая, что:

а) $||\tilde{z}|| \le W(\tilde{z}) \le M||\tilde{z}||,\ M \ge 1;$
б) $|W(\tilde{z}'') - W(\tilde{z}')| \le M||\tilde{z}'' - \tilde{z}'||;$
в) $W(A\tilde{z}(k)) - W(\tilde{z}(k)) \le -\chi W(\tilde{z}(k)),\ 0 < \chi < 1.$
На множестве $D$ рассмотрим систему следующего вида

$$\begin{cases} \bar{y}(k+1) = & \bar{y}(k) + \lambda \bar{y}^m(k) + p(k),\ \bar{y}(0) = y_0, \\ \bar{z}(k+1) = & A\bar{z}(k) + q(k),\ \bar{z}(0) = z_0 \end{cases}, \qquad (4)$$
$$k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Будем называть ее «линеаризованной». Цель работы — оценить отклонение решений системы (1) от решений системы (4). Введем обозначение.

$$\varepsilon(k) = y(k) - \bar{y}(k),\ \xi(k) = z(k) - \bar{z}(k).$$

Далее в работе будут получены оценки для $\varepsilon(k)$ и $\xi(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ .

## 2. Основные результаты

На основе разностного аналога второго метода Ляпунова [2] и дискретной теоремы сравнения [3] получим оценки на решения системы (1).

Рассмотрим первые разности функций $V(y(k)) = y^2(k)$ и $W$ на решениях системы (1)

$$\begin{cases} V(y(k+1)) - V(y(k)) & \le 2\lambda V^{(m+1)/2}(y(k)) + 2\delta_1(\alpha V^{(m+1)/2}(y(k)) + \\ & +P) + \lambda^2 V^m(y(k)), \\ W(z(k+1)) - W(z(k)) \le & -\chi W(z(k)) + M(Q + \beta(W^h(z(k)) + \\ & +|y^{m+1}(k)|)), \end{cases} \qquad (5)$$
$$k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Если потребовать выполнения условия $-\frac{1}{2} - \delta_1\alpha < \lambda < -\delta_1\alpha$, то к первому неравенству системы (5) применима теорема сравнения [3]: $V(y(k)) \le v_k$, где $v_k$ — решение уравнения

$$v_{k+1} - v_k = 2\lambda v_k^{(m+1)/2} + 2\delta_1(\alpha v_k^{(m+1)/2} + P) + \lambda^2 v_k^m, v_0 = y_0^2$$
$$k = 0, 1, 2, \dots\ . \qquad (6)$$

В области $u \ge 0$ рассмотрим функцию

$$\varphi(u) = 2\lambda u^{(m+1)/2} + 2\delta_1(\alpha u^{(m+1)/2} + P) + \lambda^2 u^m.$$

Уравнение $\varphi(u) = 0$ может иметь не более двух решений. Пусть $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ — решения этого уравнения, при этом $0 < u^{(1)} \le u^{(2)}$. Тогда очевидно, что $u^{(1)}$ - устойчивое, а $u^{(2)}$ — неустойчивое положения равновесия уравнения (6). Если $|y_0| \le \sqrt{u^{(2)}}$, то при всех $k = 0, 1, 2, \dots$

$$|y(k)| \le \max\{|y_0|, \sqrt{u^{(1)}}\} \equiv \Delta_1. \qquad (7)$$

Применяя оценку (7) ко второму неравенству системы (5), имеем

$$W(z(k+1)) - W(z(k)) \le -\chi W(z(k)) + M(Q + \beta(W^h(z(k)) + \Delta_1^{m+1})).$$

Так как $1-\chi>0$, то для $W(z(k))$ также применима теорема сравнения [3], согласно которой $W(z(k))\leq w_k$, где $w_k$ — решение уравнения

$$w_{k+1}-w_k=-\chi w_k+M(Q+\beta(w_k^h+\Delta_1^{m+1})), w_0=W(z_0), \qquad (8)$$
$$k=0,1,2,\dots\ .$$

Пусть $w^{(1)},\ w^{(2)}$ — положения равновесия уравнения (8) и $0\leq w^{(1)}\leq w^{(2)}$. Если $W(z_0)\leq w^{(2)}$, то также получаем оценку при всех $k=0,1,2,...$

$$||z(k)||\leq \max\{W(z_0);w^{(1)}\}\equiv \Delta_2, \qquad (9)$$

Дальнейшие рассуждения направлены на нахождение оценок уклонений $\varepsilon(k)$ и $\xi(k)$. Для них справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varepsilon(k+1) &= \varepsilon(k)+\lambda B(y(k),\bar y(k))\varepsilon(k)+f(y(k),z(k)),\ \varepsilon(0)=0; \\ \xi(k+1) &= A\xi(k)+g(y(k),z(k)),\ \xi(0)=0; \end{cases} \qquad (10)$$
$$k=0,1,2,\dots\ .$$

Здесь $B(y,\bar y)=y^{m-1}+y^{m-2}\bar y+...+\bar y^{m-1},\ B(y,\bar y)\geq 0$, т. к. $m>2$ – нечетное число. На множестве $D$: $B(y,\bar y)\leq m\delta_1^{m-1}$. За счет выбора параметра $\delta_1$ можно добиться, чтобы система

$$\bar\varepsilon(k+1)=(1+\lambda m\delta_1^{m-1})\bar\varepsilon(k), \qquad (11)$$
$$k=0,1,2,...$$

была асимптотически устойчива. Пусть система (11) асимптотически устойчива, тогда [2] существует функция Ляпунова $\tilde V$, удовлетворяющая условиям:

а’) $|\bar\varepsilon(k)|\leq \tilde V(\bar\varepsilon(k))\leq L|\bar\varepsilon(k)|,\ L\geq 1$;
б’) $|\tilde V(\bar\varepsilon''(k))-\tilde V(\bar\varepsilon'(k))|\leq L|\bar\varepsilon''(k)-\bar\varepsilon'(k)|$;
в’) $\tilde V(\bar\varepsilon(k+1))-\tilde V(\bar\varepsilon(k))\leq -\theta\tilde V(\bar\varepsilon(k)),\ 0<\theta<1$.

Следуя работе [4], получим

$$|\varepsilon(k)|\leq \alpha L\Delta_1^{m+1}\frac{1-(1-\theta-\lambda Lm\delta_1^{m-1})^k}{\theta+\lambda Lm\delta_1^{m-1}}<\frac{\alpha L\Delta_1^{m+1}}{\theta+\lambda Lm\delta_1^{m-1}},\ k=1,2,\dots\ , \qquad (12)$$

при $0<1-\theta-\lambda Lm\delta_1^{m-1}<1$, т. е. в достаточно малой окрестности начала отсчета.

Для получения оценки на $\xi(k)$ воспользуемся функцией $W$, введенной выше для системы (3)

$$W(\xi(k+1))-W(\xi(k))\leq -\chi W(\xi(k))+M\beta\left(\Delta_2^h+\Delta_1^{m+1}\right). \qquad (13)$$

Отсюда приходим к искомой оценке

$$||\xi(k)||\leq M\beta\left(\Delta_2^h+\Delta_1^{m+1}\right)\frac{1-(1-\chi)^k}{\chi}<\frac{M\beta\left(\Delta_2^h+\Delta_1^{m+1}\right)}{\chi},\ k=1,2,\dots\ . \qquad (14)$$

Таким образом, при выполнении условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1), существуют оценки (12) и (14) уклонений решений системы (1) от решений «линеаризованной» системы (4). Предложенный метод построения оценок требует наличия функций Ляпунова для линейных систем вида (3) и (11) с оценками а)–в) и а’)–в’). Примеры таких функций можно встретить, например, в [5].

## Литература

1. Liu Yong-qing. The necessary and sufficient conditions of stability for 1 st-order nonlinear discrete systems in the first critical case. Adv. Modell. and Simul. 1988. Vol. 14, No. 3. pp. 1-8.

2. Agarwal R. P. Difference equations and inequalities: theory, methods and applications. New York, Basel: Marcel Dekker, 2000. - 985 p.

3. Sugiyama S. Difference inequalities and their applications to stability problems. Lect. Notes Math. 1971. No. 243. pp. 1-15.

4. Афиногентова Е. В., Щенников В.Н. Построение оценок погрешности линеаризации систем конечно-разностных уравнений // Изв. вузов. Матем. 2002. № 8. С. 75-78.

5. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1977. 312 с.

MSC2020 39A22

# Correctness of the linearization method for the discrete system in one critical case

E. V. Afinogentova

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The linearization method is widely used for the study of nonlinear models. The article considers the question of the correctness of such a method in the case of a discrete system for which the question of stability is not solved by a linear approximation, i.e. there is a critical case. A method is proposed for estimating the deviation of the nonlinear system solution from its linearized version in the critical case of a single unit root.

*Keywords:* discrete system, stability, critical case.

## References

1. Liu Yong-qing. The necessary and sufficient conditions of stability for 1 st-order nonlinear discrete systems in the first critical case. *Adv. Modell. and Simul.* 1988. Vol. 14, No. 3. pp. 1-8.

2. R. P. Agarwal. Difference equations and inequalities: theory, methods and applications. New York, Basel: Marcel Dekker, 2000. 985 p.

3. S. Sugiyama. Difference inequalities and their applications to stability problems. Lect. Notes Math. 1971. No. 243. pp. 1-15.

4. E.V. Afinogentova, V.N. Shchennikov. “Construction of error estimates for the linearization of finite-difference equations”. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2002. No. 8. pp. 75-78. (in Russian)

5. A. Halanay, D. Veksler. Kachestvennaya teoriya impul’snykh sistem, “Qualitative theory of impulse systems”. Mir Publ., Moscow. 1971. 310 p. (in Russian)