

УДК 517.91

Исследование динамики математической модели системы фазовой автоподстройки с запаздыванием

Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О.

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

Рассматривается система фазовой автоподстройки с запаздыванием, динамика которой описывается операторным уравнением [1]- [5]

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau(p)\Omega_y F(\sigma) = \Omega_H, \quad (1)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ – разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_y – полоса удержания фазового кольца, $K_\varphi(p)$ – коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx (1 - \tau p)$ – операторный коэффициент запаздывания, τ – время запаздывания, $F(\sigma)$ – характеристика фазового детектора, $F(\sigma)$ – Δ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция, $\Omega_H = const$ – начальная расстройка. Уравнение (1) рассматривается в случае дробно-рационального фильтра $K_\varphi(p) = \frac{A_1 p + A_2}{B_0 p^2 + B_1 p + B_2}$ и $K_\tau(p) = (1 - \tau p)$. Пусть $K(p) = K_\varphi(p)K_\tau(p)$, тогда получим равенство $K(p) = \frac{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}{B_0 p^2 + B_1 p + B_2}$, где $a_0 = -\tau A_1 < 0$, $a_1 = A_1 - \tau A_2$, $a_2 = A_2 > 0$. Введём следующие обозначения $\varphi(\sigma) = F(\sigma) - \gamma$, $\gamma = \Omega_H(a_2 \Omega_y)^{-1}$, $\alpha_1 = B_1 B_0^{-1}$, $\beta_1 = B_2 B_0^{-1}$, $\rho = -\Omega_y a_0 B_0^{-1} = \Omega_y \tau A_1 B_0^{-1} > 0$, $\Gamma = \Omega_y B_0^{-1}(a_1 + \rho B_1)$, $\nu = -\Omega_y B_0^{-1}(a_2 - B_1 B_0^{-1}(a_1 + \rho B_1) + \rho B_2) = -\nu_1$, $\rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1} > 0$, $\rho_0 = \rho - \rho_1 > 0$. Заменой переменных $\dot{\sigma} = x_2 + \rho \varphi(\sigma)$, $\dot{x}_2 = x_1 - \Gamma \varphi(\sigma)$ операторное уравнение (1) сводится к фазовой системе дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x + (\rho_1 + \rho_0)\varphi(\sigma). \quad (2)$$

Система (2) является математической моделью системы фазовой автоподстройки с запаздыванием, для которой справедливы соотношения $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $\text{rang}\{c, l\} = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, $\varphi(\sigma)$ – Δ -периодическая функция. Запаздывание в системе автоподстройки определяет значение параметра $\rho > 0$, при отсутствии запаздывания выполняется равенство $\rho = 0$.

В случае $\rho = 0$ изучению системы (2) посвящены многочисленные работы [1]- [3]. В настоящей работе качественно-численными методами для системы (2) получены условия существования колебательных, вращательных и колебательно-вращательных предельных циклов [4]- [8]. Численными методами с использованием вращения векторного поля показано, что бифуркация цикла определяется как увеличением оборотности устойчивого цикла, так и формированием неустойчивых циклов на разных частотах. При этом вопрос об устойчивости колебательных и вращательных предельных циклов решается с помощью мультипликаторного анализа [4]- [8].

Результаты, полученные для математической модели (2), позволяют получить условия существования различных режимов, реализуемых в системе (1), таких как режимы фазовой синхронизации, режимы фазовой мультистабильности, квазисинхронные режимы и режим вынужденной фазовой синхронизации, влияющих на появление в системе (1) режима скрытой синхронизации [5].

В работе рассмотрен пример электрической цепи, для которой найдены условия, определяющие значения коэффициентов фильтра нижних частот и запаздывания для вынужденной фазовой синхронизации [4].

Для системы (2) показано, что наличие запаздывания ($\rho > 0$) приводит к появлению вынужденной фазовой синхронизации. В частности, при $\rho = 0$ рассмотрена система (2), в которой наблюдается режим биений. Увеличение ρ до значения 1.16, приводит к трансформации режима биений в квазисинхронный режим фазовой синхронизации [5]. На рисунке 1 изображены режим биений при отсутствии запаздывания $\rho = 0$ и квазисинхронные режимы при $\rho = 1.16$.

Наличие запаздывания позволяет для системы фазовой автоподстройки формировать режим фазовой мультистабильности, в этом случае в системе (2) наблюдаются три колебательных цикла. Два устойчивых $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$ цикла и один неустойчивый $z_0^-(t)$ определяют режим фазовой мультистабильности системы (1). Для определения пространственных характеристик циклов, в работе используются понятия кривизны и кручения цикла. На основе анализа пространственных характеристик циклов решается вопрос о выборе цикла, соответствующего наилучшему режиму синхронизации. На рисунке 2 представлена мультистабильность системы (2).

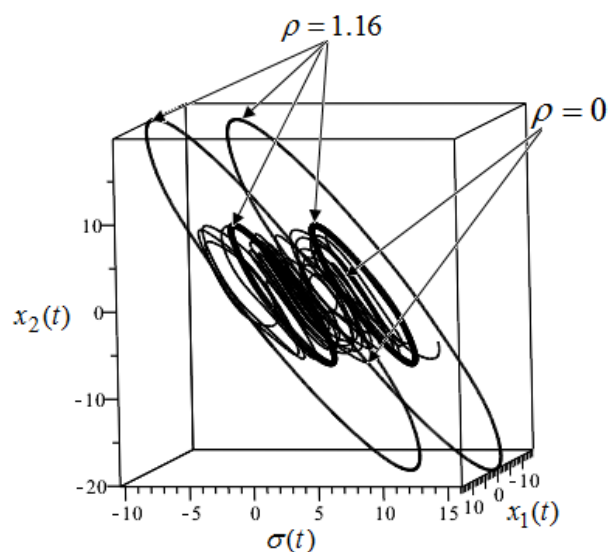


Рис. 1 Вынужденная синхронизация

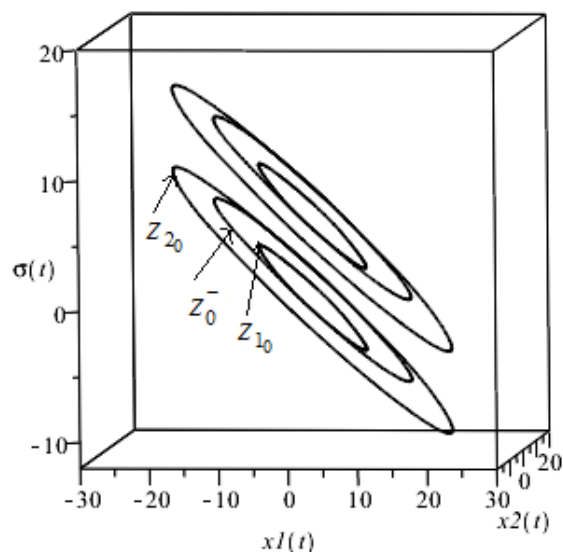


Рис. 2 Мультистабильность системы (2)

Проведенный анализ позволяет проследить динамику математической модели системы фазовой автоподстройки (ФАП) с запаздыванием и сделать вывод о наличии в такой системе режимов скрытой синхронизации. Запаздывание может быть использовано для подавления хаотически модулированных режимов биения и формированию на их базе квазисинхронных режимов, обеспечивающих фазовую синхронизацию. Полученные результаты позволяют получить практические рекомендации для определения параметров фильтров второго порядка с запаздыванием, при которых в системе ФАП наблюдается мультистабильность, что позволяет использовать систему ФАП как генератор многочастотных колебаний.

Литература

1. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448с.
2. Матросов В. В. Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вуз. Радиофизика. 2006. Т.49, №3. С. 267-278.
3. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.
4. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 62. С. 26-35.
5. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3. С. 333-348.
6. Мамонов С. С., Харламова А. О. Циклы первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 148. С. 83-92.
7. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2018. № 4. С. 51-57.
8. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Кривизна колебательных циклов фазовых систем // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 19, № 2. С.105-110.

MSC2020 34C25

The study of the dynamics of a mathematical model delayed phase locked loop systems

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova
Ryazan State University named after S. A. Yesenina