УДК 517.925.52

О динамике систем, близких к двумерным гамильтоновым, с двойным предельным циклом при квазипериодических возмущениях *

Костромина О. С.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматриваются системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon g(x,y,\omega_1 t,...,\omega_k t), \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon f(x,y,\omega_1 t,...,\omega_k t), \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции H, g и f – достаточно гладкие и равномерно ограниченные по x, y вместе с частными производными порядка $\leqslant 2$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ (или $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$); функции g и f – непрерывные и квазипериодические по t равномерно относительно $(x,y) \in D$ с несоизмеримыми над полем рациональных чисел частотами $\omega_i, i = \overline{1,k}$.

Мы предполагаем, что соответствующая невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) является нелинейной гамильтоновой с гамильтонианом H и имеет ячейку $D_0 \in D$, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми $H(x,y) = h$, $h \in [h_{min}, h_{max}]$ и не содержащую малых окрестностей состояний равновесия и сепаратрис. Также мы предполагаем неконсервативность исходной системы (1), что эквивалентно выполнению условия: $g'_x + f'_y \not\equiv 0$.

Переходя от переменных x, y к переменным «действие I – угол θ » в D_0:

$$x = X(I,\theta),\ y = Y(I,\theta),$$

где X, Y – периодические по θ с периодом 2π функции, получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon \left(f(X,Y,\theta_1,...,\theta_k)X'_\theta - g(X,Y,\theta_1,...,\theta_k)Y'_\theta \right), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \left(-f(X,Y,\theta_1,...,\theta_k)X'_I + g(X,Y,\theta_1,...,\theta_k)Y'_I \right), \\ \dot{\theta}_i = \omega_i,\ i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{2}$$

Мы предполагаем, что собственная частота $\omega(I)$ невозмущенной системы является монотонной функцией и не обращается в нуль на интервале $(I_{min}, I_{max}) \equiv (I(h_{min}), I(h_{max}))$. Функции F, G – достаточно гладкие по $I, \theta, \theta_i, i = \overline{1,k}$ в области $[I_{min}, I_{max}] \times \mathbb{T}^{k+1}$, где $\mathbb{T}^{k+1}$ – (k+1)-мерный тор.

Рассматривается резонансный случай, когда:

$$n\omega(I) = \sum_{i=1}^{k} m_i \omega_i,$$

где n, $m_i, i = \overline{1,k}$ – взаимно простые целые числа. Вещественные решения I этого уравнения на отрезке $[I_{min}, I_{max}]$ будем обозначать $I_{n\mathbf{m}}, \mathbf{m} = (m_1, ..., m_k)$. Тогда уровни $I = I_{n\mathbf{m}}$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00306) и РНФ (грант 19-11-00280)

(замкнутые фазовые кривые $H(x,y) = h_{n\mathbf{m}}$ невозмущенной системы) будем называть *резонансными уровнями.* Окрестность $U_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(I,\theta) : I_{n\mathbf{m}} - C\sqrt{\varepsilon} < I < I_{n\mathbf{m}} + C\sqrt{\varepsilon},\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ C = \text{const} > 0\}$ индивидуального резонансного уровня $I = I_{n\mathbf{m}}$ будем называть резонансной зоной.

Важную роль при исследовании структуры резонансной зоны играет соответствующая возмущенная автономная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon g_0(x,y), \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon f_0(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

где

$$g_0(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^k}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} g(x,y,\theta_1,\dots,\theta_k)d\theta_1\dots d\theta_k,\ f_0(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^k}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} f(x,y,\theta_1,\dots,\theta_k)d\theta_1\dots d\theta_k.$$

В автономной системе (3) может существовать предельный цикл. При включении неавтономности резонансный уровень может совпасть с уровнем невозмущенной системы, порождающим предельный цикл в автономной системе. Воздействие квазипериодических по времени возмущений на системы с грубым предельным циклом было изучено в работах [1,2], а воздействие периодических по времени возмущений на системы с двойным предельным циклом – в работе [3]. В настоящей работе мы изучаем влияние квазипериодических возмущений на системы с двойным предельным циклом. Получена усредненная система, описывающая топологию резонансных зон. Согласно [1], простому устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия такой системы соответствует m-мерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (2), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами $\dfrac{2\pi n}{\omega_1}, \dots, \dfrac{2\pi n}{\omega_k}$ в системе (1). Грубому устойчивому (неустойчивому) предельному циклу усредненной системы с частотой ω_0 соответствует (m+1)-мерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (2), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами $\dfrac{2\pi}{\omega_0}, \dfrac{2\pi n}{\omega_1}, \dots, \dfrac{2\pi n}{\omega_k}$ в системе (1). Устанавливаются возможные фазовые портреты усредненной системы вблизи бифуркационного случая, когда резонансный уровень $I = I_{nm_1m_2}$ совпадает с уровнем $I = I_*$, в окрестности которого система (3) имеет двойной предельный цикл. Для иллюстрации полученных результатов приводятся результаты численного счета для уравнения маятникового типа с квазипериодическим по времени возмущением.

Литература

1. Морозов А. Д., Морозов К. Е. О квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1607-1615.

2. Morozov A. D., Morozov K. E. On synchronization of quasiperiodic oscillations. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. vol. 14, No. 3. pp. 367-376.

3. Morozov A. D., Mamedov E. A. On a double cycle and resonances. Regular and Chaotic Dynamics. 2012. vol. 17, No. 1. pp. 63-71.

MSC2020 34C15

Dynamics of systems close to two-dimensional Hamiltonian ones with a double limit cycle under quasi-periodic perturbations

O. S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod