УДК 519.853.4

Решение задач глобальной оптимизации с учетом возможных разрывов целевой функции*

Баркалов К. А., Усова М. А.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается задача поиска глобального минимума x^* одномерной функции $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x^*) = \min\left\{\varphi(x) : x \in [a, b]\right\}. \tag{1}$$

Предполагается, что целевая функция является многоэкстремальной и задана в виде "черного ящика", т.е. некоторого алгоритма вычисления значения функции в зависимости от параметра. При этом каждое *испытание* (т.е. вычисление значения функции в области поиска) является трудоемкой операцией.

Стоит отметить, что задачи одномерной оптимизации, несмотря на свою простоту, играют важную роль, поскольку многие подходы к решению многомерных задач оптимизации так или иначе основаны на сведении решения исходной многомерной задачи к решению серии связанных задач одномерной оптимизации (см., например, [1, 2]). В литературе описаны различные методы решения задачи (1) в зависимости от предположений о свойствах целевой функции. Одним из подобных наложенных условий на вид целевой функции, которое часто выполняется в прикладных оптимизационных задачах, является предположение о том, что целевая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с априори неизвестной константой L

$$\left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right| \leq L\left|x' - x''\right|, \; x', x'' \in [a, b], \; 0 < L < \infty.$$

Использование данного свойства целевой функции является типичным для многих подходов к разработке алгоритмов многоэкстремальной оптимизации [3, 4].

Однако в некоторых прикладных задачах свойство липшицевости может не выполняться в силу наличия скачкообразных изменений значений функции в ряде точек области поиска. Такие изменения в поведении целевой функции могут являться отображением в математической модели специфики оптимизируемого объекта (например, скачков геометрических размеров или свойств материала, ударных воздействий, резонансных явлений и т.п.). Мы будем интерпретировать подобные резкие изменения как разрывы первого рода. Иногда множество точек, в которых характеристики объекта претерпевают скачок, известно заранее. Вместе с тем существуют задачи, в которых нет априорных оценок точек разрыва, но имеется информация, что такие точки возможны.

Известные методы решения подобных задач, как правило, либо обобщают понятие градиента для разрывных функций [5], либо принадлежат классу биоинспирированных алгоритмов [6]. Указанные методы обеспечивают, вообще говоря, поиск только *локального решения* задачи.

В докладе на конференции будет представлен разработанный в ННГУ им. Н.И. Лобачевского эффективный алгоритм для поиска *глобального решения* многоэкстремальных задач с разрывными функциями. Данный алгоритм является дальнейшим развитием *алго-*

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-07-00242), научно-образовательного математического центра (075-02-2020-1483/1) и государственного задания (0729-2020-0055).

ритма глобального поиска (АГП), описание, теория сходимости и различные модификации которого представлены в [7].

В новом алгоритме глобального поиска для разрывных функций (АГП-Р) учет разрывов целевой функции происходит явно, т.е. без решения вспомогательной задачи построения сглаживающего преобразования и самой операции сглаживания разрыва. При этом охватываются случаи как заданных, так и не заданных точек разрыва: при отсутствии информации о координатах точек разрыва их оценка проводится адаптивно, на основе вычисленных значений функции в точках проведенных испытаний.

Вместо трудоёмкой операции сглаживания в АГП-Р при построении оценок неизвестной константы Липшица L целевой функции проводится приближенная идентификация точек, подозрительных на разрыв. Ошибочное определение некоторых точек разрыва не приводит к потере сходимости метода. Решающие правила алгоритма интерпретируют такие точки как случай устранимого разрыва, поскольку левый и правый пределы оптимизируемой функции в таких точках совпадают.

В качестве примера рассмотрим задачу минимизации функции

$$\varphi(x) = 0.1\sum_{i=1}^{5} i\sin(10(i+1)x+i) + \begin{cases} -4, & 0 \le x < 3.1 \\ 10, & 3.1 \le x < 4.6 \\ 0, & 4.6 \le x < 7.0 \\ 30, & 7.0 \le x < 9.0 \\ 0, & 9.0 \le x \le 10.0 \end{cases} \qquad (2)$$

при $x \in [0, 10]$.

Для решения задачи использовался алгоритм глобального поиска для разрывных функций (АГП-Р), точность поиска решения была выбрана равной $\epsilon = 0.001$. На рис. 1 изображен график функции, на котором наглядно видны точки разрывов. Штрихами под графиком обозначены точки поисковых испытаний, потребовавшихся алгоритму для решения задачи с заданной точностью.

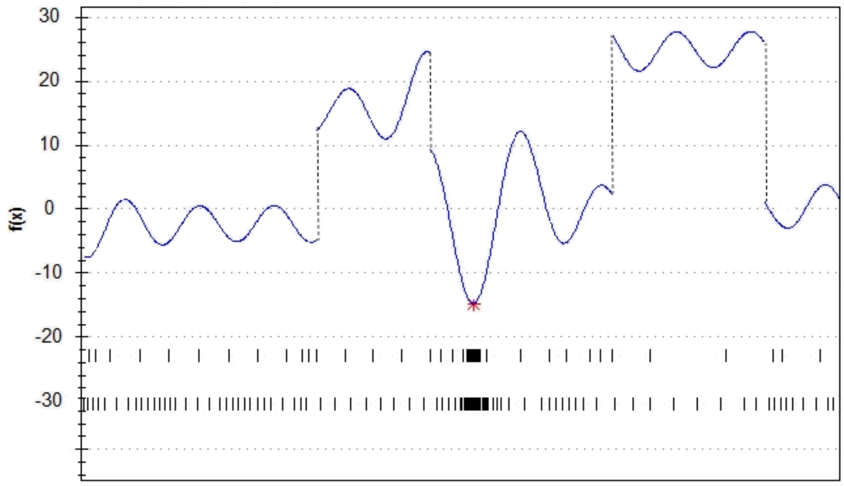

Рис. 1. График разрывной целевой функции и точки испытаний.

В случае, когда точки разрыва были известны, метод провел 74 испытания (штрихи верхнего ряда). В случае, когда все точки разрыва не были заданы заранее и идентифицировались в процессе поиска, методу потребовалось 140 испытаний (штрихи нижнего ряда). В обоих случаях распределение точек испытаний показывает наличие сходимости лишь к глобальному экстремуму, накопления точек около локальных экстремумов — отсутствуют. Стоит также отметить, что несмотря на то, что в случае незаданных точек разрыва число итераций метода увеличилось в 2 раза, алгоритм избегал проведения итераций в окрестностях точек разрыва благодаря правильной идентификации этих точек.

Для демонстрации эффективности АГП-Р проведем его сравнение с алгоритмом имитации отжига (ИО), реализованным в MATLAB Global Optimization Toolbox. Итерация данного алгоритма начинается с генерирования новой точки с использованием датчика псевдослучайных чисел. Расстояние между новой и текущей точкой определяется пропорционально текущей «температуре» (т.е. значению функции в точке). Если целевая функция в новой точке лучше, чем в текущей, то новая точка становится текущей; в противном случае новая точка может стать текущей только с некоторой вероятностью. Этот подход и позволяет избегать «застревания» в локальном минимуме, что делает метод применимым к решению задач многоэкстремальной оптимизации. Помимо этого ИО заявляется как метод, позволяющий решать задачи в том числе и с разрывами, что позволяет использовать его для сравнения с реализованным АГП-Р.

В качестве основного критерия сравнения будем использовать число поисковых испытаний (т.е. вычислений значений целевой функции), выполненное методом до достижения сходимости. Сравнение алгоритмов проводилось при решении серии из 100 задач с разрывной целевой функцией, которые были построены аналогично задаче (2). Сгенерированные случайным образом непрерывные периодические функции

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{4} [A_i \sin(5\pi i x) + B_i \cos(5\pi i x)],\ x \in [0, 1],$$

где коэффициенты A_i, B_i выбирались случайно и равномерно из интервала $[-6, 6]$, были дополнены четырьмя точками разрыва (выбранными случайно из [0,1]) и значением скачка из диапазона $[-20, 30]$.

В Таблице 1 представлено число решенных задач и среднее число испытаний, выполненных сравниваемыми методами при решении серии. Задача считалась решенной, если для точки некоторого испытания x^k выполнялось условие $\left|x^k - x^*\right| \le \epsilon$, где x^* — известное решение задачи, а $\epsilon = 10^{-3}$ — точность, используемая в условии остановки методов.

Таблица 1. Результаты решения серии задач с разрывными функциями

Метод	Решено задач	Среднее число испытаний
ИО	92	758
АГП-Р	100	76

Результаты показывают, что метод АГП-Р успешно решил все задачи серии, тогда как метод имитации отжига не справился с решением 8 задач, затратив при этом в среднем в 10 раз больше испытаний.

Литература

1. Городецкий С. Ю., Гришагин В. А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 489 с.

2. Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

3. Евтушенко Ю. Г., Малкова В. У., Станевичюс А.-И.А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 2. С. 255-269.

4. Елсаков С. М., Ширяев В. И. Однородные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 10. С. 1727-1740.

5. Батухтин В. Д., Бигильдеев С. И., Бигильдеева Т. Б. Численные методы решения разрывных экстремальных задач // Изв. РАН, сер. теория и сист. управления. 1997. Т. 3. С. 113-120.

6. Jihui Z., Junqin X. A new differential evolution for discontinuous optimization problems // Proceedings of the Third International Conference on Natural Computation. 2007. Vol. 3. P. 483-487.

7. Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Гришагин В. А., Баркалов К. А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 2013. 280 с.

MSC2020 90C26

Solving global optimization problems taking into account possible discontinuities of the objective function

K.A. Barkalov, M.A. Usova

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod