УДК 517.938; 514.84; 514.132

Гамильтоновы системы с одной степенью свободы и квантование на плоскости Лобачевского

Алексеева Е.С.[1], Рассадин А.Э.[2]

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова[1],
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»[2]

Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы, и пусть функция Гамильтона $H(p,q)$ этой системы такова, что линии уровня её энергии E:

$$H(p,q)=E\,,\qquad E>0\,, \tag{1}$$

на всей фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ представляют собой гладкие кривые, диффеоморфные окружности, за исключением начала координат, в котором $H(0,0)=0$.

В этом случае с помощью канонического преобразования можно перейти от переменных (p,q) к переменным действие-угол (I,θ), в которых уравнения Гамильтона имеют вид [1]:

$$\dot{I}=0\,,\qquad \dot{\theta}=\frac{dH(I)}{dI}\,, \tag{2}$$

причём во втором уравнении системы (2) функция Гамильтона исходной системы выражена через переменную действия:

$$I=\frac{1}{2\,\pi}\oint p\,dq \tag{3}$$

(интегрирование в правой части формулы (3) ведётся по всей линии уровня энергии (1)).

При каждом обходе изображающей точки по фазовой траектории (1) угловая переменная θ испытывает приращение на $2\,\pi$ [1], а переменная действия I при этом остаётся постоянной и, согласно определению (3), неотрицательной, поэтому в канонических переменных фазовое пространство рассматриваемой системы можно считать полуцилиндром $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^+$.

Развернём этот полуцилиндр в полуполосу $\Pi=\{0<\theta<2\,\pi,\,0<I<+\infty\}$, которую затем поместим на плоскость комплексной переменной $z=\theta+i\,I$.

Далее, отобразим эту полуполосу Π на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}=\{\zeta\in\mathbb{C}:\,\Im\zeta>0\}$ конформно с помощью функции:

$$\zeta=-\cos(z/2)\,. \tag{4}$$

При отображении (4) луч $\pi+i\,I$ $(I>0)$ на комплексной плоскости z переходит в луч $i\,\sinh(I/2)$ $(I>0)$ на комплексной плоскости ζ.

Зафиксируем некоторое значение переменной действия $I=I^*$ и отобразим конформно полуплоскость $\mathbb{H}$ на единичный круг $\mathbb{D}=\{w\in\mathbb{C}:\,|w|<1\}$ так, чтобы точке $i\,\sinh(I^*/2)\in\mathbb{H}$ соответствовал центр круга $\mathbb{D}$.

Согласно общим правилам комплексного анализа такое конформное отображение задаётся следующей формулой [2]:

$$w\equiv f_{I^*}(z)=\frac{\cos(z/2)+i\,\sinh(I^*/2)}{\cos(z/2)-i\,\sinh(I^*/2)}\,. \tag{5}$$

С другой стороны, хорошо известно, что единичный круг $\mathbb{D}$ может быть взаимно однозначно отображён на плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$ [3], а именно, пусть $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$ — псевдосфера единичного радиуса в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_1$ и $w = u + i\,v$, тогда стереографическая проекция верхней полы этой псевдосферы из точки $(0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3_1$ на единичный круг $\mathbb{D}$:

$$x_0 = -1 + \frac{2}{1 - u^2 - v^2}\,, \qquad x_1 = \frac{2\,u}{1 - u^2 - v^2}\,, \qquad x_2 = \frac{2\,v}{1 - u^2 - v^2} \tag{6}$$

есть модель Пуанкаре плоскости Лобачевского [3].

С точки зрения классической механики построенное выше отображение (5)-(6) фазовых траекторий (1) исходной системы с евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$ может дать лишь новые неравенства на зависимость их длины от энергии E. Но в квантовой механике эта конструкция приводит к нетривиальным следствиям.

Во-первых, как хорошо известно, при переходе к квантовой механике координата q и импульс p системы заменяются на некоммутирующие между собой операторы координаты $\hat{Q}$ и импульса $\hat{P}$ соответственно, а соотношение (1) трансформируется в стационарное уравнение Шрёдингера на волновую функцию системы ψ:

$$\hat{H}\,\psi = E\,\psi\,. \tag{7}$$

Однако для построения оператора Гамильтона $\hat{H}$, фигурирующего в уравнении (7), по классической функции Гамильтона $H(p, q)$ произвольного вида нужно использовать симметрический способ упорядочения операторных аргументов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ этой функции, а именно, в качестве оператора Гамильтона необходимо выбрать [4]:

$$\hat{H} = \int\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{H}(s, \sigma)\, \exp(\,i\,\hat{P}\,s + i\,\hat{Q}\,\sigma)\, \frac{ds\,d\,\sigma}{(2\,\pi)^2}\,, \tag{8}$$

где

$$\tilde{H}(s, \sigma) = \int\int_{\mathbb{R}^2} H(p, q)\, \exp(-i\,p\,s - i\,q\,\sigma)\, dp\,dq \tag{9}$$

– двумерное преобразование Фурье от классической функции Гамильтона $H(p, q)$.

Выражения (8)-(9) называются квантованием по Вейлю (см. [4] и ссылки там).

Из структуры этих выражения ясно, что практическая возможность определения оператора Гамильтона по этим формулам существенно зависит от вида функции $H(p, q)$.

Между тем, в монографии [5] подробно описан алгоритм квантования на плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$, использующая гильбертово пространство аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций со скалярным произведением:

$$< f \mid g >= \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int_{\mathbb{D}} f(w)\,\overline{g(w)}\,(1 - w\,\overline{w})^{1/h}\, d\mu(w, \overline{w})\,, \tag{10}$$

где

$$d\mu(w, \overline{w}) = \frac{1}{\pi\,i}\, \frac{dw \wedge d\overline{w}}{(1 - w\,\overline{w})^2} \tag{11}$$

— мера на плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$, инвариантная относительно группы автоморфизмов $Aut(\mathbb{D})$ единичного круга $\mathbb{D}$ [2], а параметр h имеет смысл постоянной Планка.

Процедура квантования, стартующая с формул (10)-(11), называется квантованием по Березину [6]. Очевидно, что квантование по Березину обладает существенным преимуществом по сравнению с квантованием по Вейлю, потому что оно не зависит от вида функции $H(p, q)$.

Далее, интересным объектом квантовой механики являются когерентные состояния:

$$\psi_\alpha(x) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n\,!}}\, \phi_n(x)\,, \tag{12}$$

где α — комплексный параметр, а

$$\phi_n(x) = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{2^{\,n}\, n!}}\, H_n(x\,\sqrt{\omega})\, \exp\left(-\frac{\omega\, x^2}{2}\right)$$

— ортонормированные собственные функции квантовомеханического гармонического осциллятора [7], в которых $H_n(\ldots)$ — полиномы Чебышёва-Эрмита.

Волновые функции (12), введённые в работе [8] для гармонического осциллятора, минимизируют соотношение неопределённостей Гейзенберга и образуют переполненный базис в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Однако попытки построить когерентные состояния для систем с функцией Гамильтона, отличной от функции $H(p,q) = p^2/2 + \omega^2\, q^2/2$, наталкиваются на серьёзные трудности. Между тем, для плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ можно построить счётное множество систем когерентных состояний как неприводимых представлений её группы движений $SU(1,1)/\mathbb{Z}_2$ [6].

Наконец, с помощью конформного отображения (5) можно построить автоморфизмы полуполосы Π:

$$\varphi_{12}(z) \equiv (f^{-1}_{I_2^*} \circ f_{I_1^*})(z) = 2\, \arccos\left[\frac{\sinh(I_2^*/2)}{\sinh(I_1^*/2)}\, \cos\frac{z}{2}\right], \tag{13}$$

которые перемещают значения переменной действия по лучу $\pi + i\, I$.

С другой стороны, в квантовой механике при рассмотрении квазиклассического приближения выводится правило квантования Бора-Зоммерфельда [7]:

$$I(E) = \frac{h}{2\,\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n \gg 1\,. \tag{14}$$

В силу малости постоянной Планка h формула (14) при изменяющемся номере n собственной функции оператора Гамильтона весьма напоминает действие автоморфизма (13).

В заключение необходимо отметить, что линейное преобразование:

$$\tilde{p} = \alpha\, p + \beta\, q\,, \qquad \tilde{q} = \gamma\, p + \delta\, q\,,$$

оставляющее инвариантной симплектическую 2-форму $\Omega = dp \wedge dq$ системы (1) (см. задачу на стр. 193 в книге [9]), есть не что иное, как автоморфизм $Aut(\mathbb{H})$:

$$\zeta \mapsto \frac{\alpha\, \zeta + \beta}{\gamma\, \zeta + \delta}\,, \qquad \alpha\, \delta - \beta\, \gamma = 1\,,$$

верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ [2], на которой может быть реализована модель Клейна плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ [3], и в которую отображением (4) переводится полуполоса Π.

Таким образом, изучение скрытых связей между комплексной и симплектической структурой, которые можно ввести на вещественной двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$, приводит к универсальным схемам квантования системы (1), не зависящим от вида её классической функции Гамильтона $H(p,q)$. Полученные результаты особенно интересны с точки зрения квантовой теории поля для развития работ [10] и [11], потому что намёки на необходимость выявления таких связей имеются ещё в статье [12], в которой заложены основы квантовой электродинамики.

Авторы благодарят д. ф.-м. н. Н.Н. Шамарова за указание на работу [12].

Литература

1. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
2. Львовский С. М. Лекции по комплексному анализу. М.: МЦНМО, 2009. 136 с.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 760 с.
4. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. 272 с.
5. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986. 318 с.
6. Переломов А. М. Обобщённые когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. 272 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 768 с.
8. Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. Die Naturwissenschaften. 1926. Bd. 14, Heft 28. pp. 664-666.
9. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
10. Смолянов О. Г., Шамаров Н. Н. Гамильтоновы меры Фейнмана, интеграл Колмогорова и бесконечномерные псевдодифференциальные операторы // Доклады Академии наук. 2019. Т. 488, №. 3. С. 243-247.
11. Сергеев А. Г. Квантование соболевского пространства полудифференцируемых функций // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 10. С. 96-104.
12. Dirac P. A. M. The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1927. vol. 114. pp. 243-265.

MSC2020 70H15

Hamiltonian systems with one degree of freedom and quantization on the Lobachevsky plane

E. S. Alekseeva[1], A. E. Rassadin[2]

Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University[1],
National Research University «Higher School of Economics»[2]