УДК 517.9

Оптимальное оценивание линейных нестационарных систем с использованием множеств достижимости*

Сорокина М. С.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Аннотация: Рассматривается линейная нестационарная система при неточно известных начальном состоянии и действующем возмущении, удовлетворяющих единому ограничению. Ограничение представляет собой сумму квадратичной формы начального состояния и интеграла по времени от квадратичной формы возмущения (квадратичные формы могут быть вырожденными). Рассмотрен способ оценки эллипсоидального множества достижимости для таких систем. Его использование позволяет найти минимальное множество достижимости (то есть оценка оптимальна), которое определено при помощи оптимального наблюдателя. Приведен пример его применения для уравнения Матьё-Хилла с затуханием, которое описывает параметрические колебания и резонанс.

Ключевые слова: множества достижимости, эллипсоидальные множества, оптимальный наблюдатель.

1. Введение

Одной из основных задач в теории управления динамическими системами является исследование возможности достижения того или иного состояния системы под действием управления. Для этого необходимо исследовать её множества достижимости. Проблема их нахождения и оценивания впервые возникла в 60-х годах прошлого века, однако до сих пор привлекает к себе внимание.

Множества достижимости играют важную роль в разных областях теории управления. С их помощью, например, можно решить задачу сохранения беспилотным летательным аппаратом заданной траектории с учетом скорости и направления ветра [1] и задачу построения траектории манипулятора [2].

Также они играют важную роль при решении многих задач управления, имея способы эффективного их построения или оценивания, можно продвинуться в решении многих задач. Основные из них: оценка возможностей управления (возможно ли привести систему в заданное состояние в фиксированный момент времени), оценка возмущений и задача о накоплении возмущений (множество достижимости характеризует область, в которую может попасть система под действием возмущения), гарантированное оценивание (фильтрация) в динамических системах (при известном множестве достижимости и заданных ограничениях на возмущения получаем оценку разброса траекторий под его воздействием), задачи оптимального управления (при известном множестве достижения задача сводится к минимизации функции n переменных на нем). Это делает их применимыми для большого числа приложений.Так, например, задачи оптимального управления встречаются практически во всех сферах деятельности: в технической деятельности, экономике (подробнее в [3]), медицине(например, для управления иммунологическими реакциями человека [4]), химии (к

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект №0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего»

примеру, проведение параллельных химических реакций за минимальное время [5]) и т. д. Вычисление множеств достижимости является одним из основных методов проверки надежности линейных динамических системы.

2. Множества достижимости

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0 \in M, t \in [t_0, T], \tag{1}$$

где $x \in R^{n_x}$ — состояние системы; $v \in R^{n_v}$ — возмущение, действующее на систему: $v = v(\sigma), \sigma \in [t_0, t]$; M — замкнутое множество в пространстве состояний, определяющее совокупность возможных начальных состояний системы:

$$M(t, R) = \{(x, v(\sigma)) : x^T(t_0)R^{-1}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v^T(\sigma)G^{-1}v(\sigma) \leq 1\} \tag{2}$$

Пусть существует единственное решение системы (1) при $t \geq t_0$ $x(t)$ — фазовая траектория.

Из каждой точки множества M выходит много траекторий системы, отвечающих разным значениям возмущения. Множеством достижимости для системы при $t \geq t_0$ называется совокупность концов $x(t)$ всех траекторий, выходящих из M в момент времени $t \geq t_0$.

Для системы, подверженной возмущениям, множество достижимости дает оценку разброса траекторий под действием возмущения. Оно характеризует область, в которую под воздействием возмущения приходит система, и позволяет оценить точность попадания системы в заданное конечное состояние [6]. Так же, при добавлении в систему управления, оно дает возможность понять, возможно ли привести систему из одного состояния в заданное.

3. Оценивание множеств достижимости

Точное нахождение множества достижимости может быть довольно трудоёмкой операцией, часто используются множества, найденные приближенно, и их оценки. Например, в [6] приведена аппроксимация эллипсами вида:

$$E(a, Q) = \{x : (Q^{-1}(x - a), (x - a)) \leq 1\},$$

где a — вектор центра эллипсоида, Q — положительно определенная симметрическая матрица.

Рассмотрим способ построения оптимальной оценки множества достижимости, приведенный в статье [7].

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v, \\ y &= C(t)x + D(t)v \end{aligned} \tag{3}$$

с неизвестным начальным условием $x(t_0)$.

Пусть начальное состояние системы и возмущения представимы в виде

$$\begin{gathered} x(t_0) - x_* = R^{1/2}w_1, \ v(t) = G^{1/2}(t)w_2(t), \\ |w_1|^2 + \int_{t_0}^{t} |w_2(\sigma)|^2 d\sigma \leq 1, t \in [t_0, T]. \end{gathered} \tag{4}$$

Рассмотрим задачу оценивания состояния $x(t)$ системы (3) по измерениям выхода $y(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$ для заданной матрицы $R = R^T > 0$ и матричной функции $G^T(\sigma) = G(\sigma) > 0$.

Тогда получаем условие:

$$|x(t_0) - x_*|_R^2 + ||v||^2_{G_{[t_0;t]}} \leq 1. \tag{5}$$

Построим наблюдатель полного порядка [8]

$$\dot{\widehat{x}} = A(t)\widehat{x} + L(t)[y - C(t)\widehat{x}], \quad \widehat{x}(t_0) = x_*, \tag{6}$$

где $\widehat{x}(t)$ — оценка состояния $x(t)$, а $L(t)$ — матрица параметров наблюдателя, подлежащая определению. Обозначим ошибку оценки $\varepsilon(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varepsilon} = A_c(t)\varepsilon + B_c(t)v, \quad \varepsilon(t_0) = x(t_0) - x_*, \tag{7}$$

где $A_c(t) = A(t) - L(t)C(t)$, $B_c(t) = B(t) - L(t)D(t)$.

Для нахождения оптимальной эллипсоидальной оценки состояния системы (3) воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1. *Если $det[D(\sigma)G(\sigma)D^T(\sigma)] \neq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, то оптимальный наблюдатель (6), обеспечивающий наилучшую эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}(Y_*(t), \widehat{x}(t))$ состояния системы (3) в момент времени $t \geq t_0$ при любых начальных состояниях и возмущениях, удовлетворяющих ограничению (4) с $R \geq 0$ и $G(\sigma) \geq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, определяется матрицей*

$$L_*(t) = [D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y_*(t)]^T [D(t)G(t)D^T(t)]^{-1}, \tag{8}$$

где матрица $Y_*(t) \geq 0$ является решением матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \dot{Y} = A(t)Y + YA^T(t) + B(t)G(t)B^T(t) - \\ -[D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y]^T [D(t)G(t)D^T(t)]^{-1} [D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y] \end{aligned} \tag{9}$$

с начальным условием $Y(t_0) = R$. Кроме того, при $R > 0$ выполняется $Y_*(t) > 0$, $t \in [t_0, T]$.

Таким образом, для системы (6) множество достижимости имеет вид эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$, матрица которого удовлетворяет уравнению

$$\dot{Y} = A_c(t)Y + YA_c^T(t) + B_c(t)G(t)B_c^T(t), \tag{10}$$

с начальным условием $Y(t_0) = R$. То есть для системы (3) состояние $x(t)$ находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$ с центром в точке $\widehat{x}(t)$, определяемой уравнением наблюдателя (6).

Полученное множество является эллипсоидальной оценкой состояния $x(t)$ в момент времени t.

4. Пример

Рассмотрим применение описанного способа на примере уравнения Матьё-Хилла с затуханием:

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \omega_0^2(t)(1 + F(t))x = u + v, \quad F(t) = \frac{2\mu}{a + b\cos\omega t}, \tag{11}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a > b$. Добавим в систему выход $y = x_1 + x_2 + v$ и решим полученную задачу на отрезке времени [0, 4].

Система примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(1+F(t)) & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 1.$$

Матрицы для ограничений (4) возьмем в виде

$$G = 1, \quad R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Так же выберем значения параметров: $\omega_0 = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 1$, $b = 0.5$, $\mu = 0.1$

Для нахождения множеств достижимости системы под действием возмущения решим уравнение (9), используя его решение, найдём $L_*(t)$ при помощи (8), далее найдем матрицы замкнутой системы A_c и B_c и с их помощью найдем множества достижимости, решив (10).

Полученное дифференциальное матричное уравнение будем решать, перейдя к системе дифференциальных уравнений. Ее численное решение будет реализовано в математическом пакете MATLAB с использованием метода ode45 (метод Рунге-Кутта 4 и 5 порядка).

Система линейно зависима, $y_{21} = y_{12}$. Окончательный вид системы:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - (y_1 + y_2)^2 \\ \dot{y}_2 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))y_1 - (y_1 + y_2)(y_2 + y_3 + 1) + y_3 \\ \dot{y}_3 = -2\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))y_2 - (y_2 + y_3 + 1)^2 + 1 \end{cases}$$

Начальные условия:

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

Так же, для наглядности работы метода, построим траектории системы и наблюдателя.

Для этого добавим в систему (3) нестационарное возмущение $v = 0.5 \sin \pi t$ и сдвинем ее начальное условие в точку $x0 = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}$. Тогда из (4) начальным условием для оптимального наблюдателя (6) будет $x0 - R^{1/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

Проинтегрируем (3) и (6) совместно. Получим систему 4 порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))x_1 + v \\ \dot{x}_3 = x_4 + l_1(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + v) \\ \dot{x}_4 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))x_3 + l_2(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + v) \end{cases}$$

Построим траекторию системы и положение наблюдателя. Для этого отдельно построим (x_1, x_2) и (x_3, x_4). Голубой сплошной линией на рис. 1 обозначена траектория системы, сиреневой пунктирной — траектория наблюдателя. Так же на нем показана эволюция множеств достижимости в моменты времени $t = 0$ (синий пунктирный с точкой), $t = 2$ (красный пунктирный), $t = 4$ (желтый сплошной) и их центры.

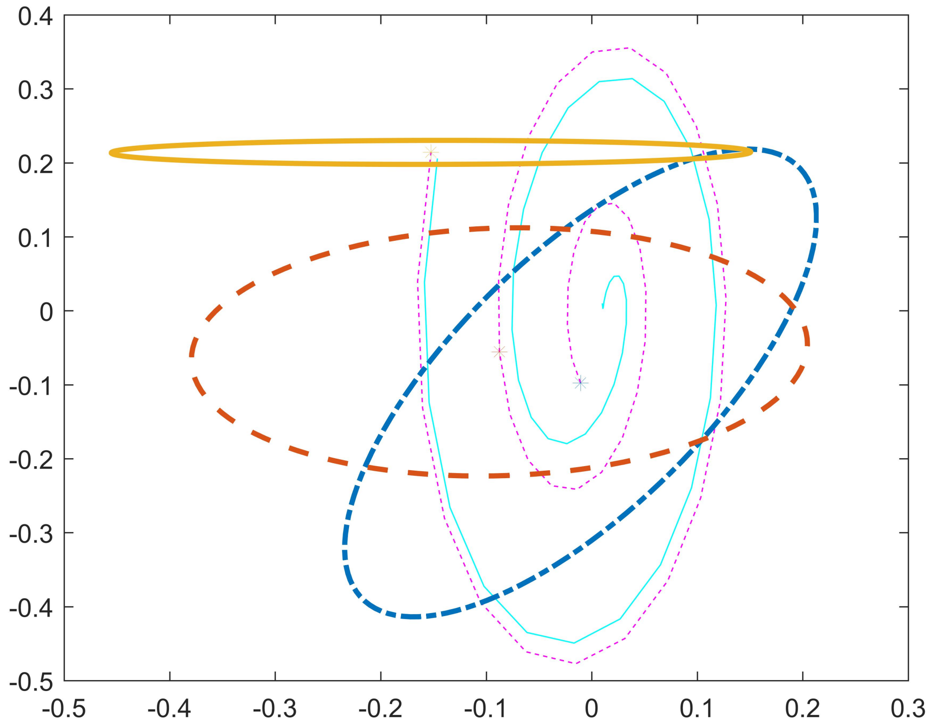

Рис. 1. Траектории системы и эволюция множеств достижимости.

С течением времени размер множеств достижимости уменьшается, при этом они содержат траекторию системы и положение наблюдателя, которое является его центром.

Литература

1. Рогалев А. Н., Рогалев А. А. Управление маршрутом и оценка множеств достижимости беспилотных летательных аппаратов // Математические методы моделирования, управления и анализа данных, 2017.

2. Holmes P., Kousik S., Zhang B. and others Reachable Sets for Safe. Real-Time Manipulator Trajectory Design. 2020.

3. Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008. - 224 с.

4. Болодурина И. П., Луговскова Ю. П. Оптимальное управление иммунологическими реакциями организма человека // Проблемы управления. 2009. № 5, С. 44-52.

5. Шатхан Ф. А. Применение принципа максимума к задачам оптимизации параллельных химических реакций // Автоматика и телемеханика, 1964. Т. 25, вып. 3. С. 368–373.

6. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 320 с.

7. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем в задачах оценивания и управления // Дифференциальные уравнения, 2019. Т. 55, № 11, С. 1485 – 1498.

8. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления (пер. с англ. Васильева В. А., Николаева Ю. А.) – М.: Мир, 1977. – 653 с.

MSC2020 45K05

Optimal evaluation of linear time-varying systems using reachable sets

M. S. Sorokina

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: The paper is devoted to reachable sets of linear time-varying systems under uncertain initial states and disturbances with a bounded uncertainty measure. The uncertainty measure is the sum of a quadratic form of the initial state and the integral over the finite-time interval from a quadratic form of the disturbance. Method of evaluation of ellipsoidal reachable sets has been cosidered for such systems. Applying this method allows to find minimal ellipsoidal set that is defined by optimal observer. Numerical modeling with the Mathieu-Hill equation for parametric vibrations and resonance illustrates this method.

Keywords: reachable sets, ellipsoidal sets, chemical reaction, optimal observer.

References

1. Rogalev A. N., Rogalev A. A. Controlling the path and reachable set estimations of unmanned air vehicle. Mathematical methods of modelling, control and data analysis, 2017. (In Russian).

2. Holmes P., Kousik S., Zhang B. and others Reachable Sets for Safe, Real-Time Manipulator Trajectory Design, 2020.

3. Lagosha B. A., Apal'kova T. G. Optimal control in economics: theory and applications. Moscow: Finance and statistics, 2008. 224 p. (In Russian).

4. Bolodurina I. P., Lygovskova Yu. P. Optimal control of immunological reactions of the human body. Control sciences. 2009. No. 5. p. 44-52. (In Russian).

5. Shatkhan F. A. Application of maximum principle to optimization problems of parallel chemical reactions. Avtomat. i Telemekh. 1964. vol. 25, issue 3. p. 368–373. (In Russian).

6. Chernousko F. L. Estimation of the phase state of dynamic systems. – Moscow: Nayka. 1988. (In Russian).

7. Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Ellipsoidal reachable sets of linear time-varying continuous and discrete systems in control and estimation problems. Automatica. 2020. No. 116. pp. 1-8. (In Russian).

8. Kvakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems – New York: Wiley, 1972. (In Russian).