УДК 517.9

Геометрия областей устойчивости линейных канонических систем периодических дифференциальных уравнений

Мамаева Н. А., Сахаров А. Н.

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия

Аннотация: А.М. Ляпунов и А. Пуанкаре в позапрошлом веке построили теорию линейных периодических систем дифференциальных уравнений. Результатом их исследований стали теоремы Флоке-Ляпунова и Пуанкаре-Ляпунова. Однако, к середине прошлого века возникла потребность найти возможности для использования этой теории в приложениях. Появился ряд замечательных работ М.Г. Крейна, И.М. Гельфанда, В.Б. Лидского и др., в которых задача описания канонических периодических систем была сведена к описанию геометрии поведения собственных чисел (мультипликаторов) отображения монодромии. Так как оператор монодромии является линейным оператором, то это дало возможность использовать вычислительные методы линейной алгебры. Для систем зависящих от параметров, поведение мультипликаторов определяется геометрией областей устойчивости решений, появляющихся и исчезающих при изменении параметров системы. В конце прошлого века для описания геометрии областей устойчивости систематически стал использоваться метод компактификации фазового пространства системы, что позволило использовать здесь результаты теории динамических систем на компактных пространствах. На примере двумерных систем в работе описываются оба подхода и дается их частичная топологическая классификация.

Ключевые слова: канонические линейные системы, оператор монодромии, мультипликаторы, зоны устойчивости, число вращения, языки Арнольда, топологическая эквивалентность.

1. Введение

Рассмотрим двумерную линейную систему

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где $A(t)$ – непрерывная периодическая с периодом 2π матрица, представимая в виде

$$A(t) = a(t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Фундаментальную матрицу решений $X(t)$ системы (1) всегда можно выбрать так, чтобы $\det X(t) = 1$ для дюбого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $X(t)$ – кривая в группе $SL(2,\mathbb{R})$. Несложные преобразования позволяют представить (1) в виде гамильтоновой системы

$$\dot{X} = JH(t)X, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $H(t)$ – вещественная симметрическая матрица. Такие системы называются *каноническими.*

Основной задачей теории динамических систем для определенного класса систем является нахождение полного топологического инварианта в заданном классе. Рассмотрим эту задачу применительно к классу канонических систем.

Система (1) называется *устойчивой*, если все её решения ограничены при $t \to \infty$. Однако, нам понадобится более сильное понятие *сильно устойчивой* канонической системы. Так называются устойчивые системы, все решения которых остаются ограниченными и при любом достаточно малом возмущении системы. Более точно,

Определение 1. *Система* (1) *называется сильно устойчивой, если она устойчива и существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что какова бы ни была матрица* $\tilde{A}(t)$ *вида* (2)*, удовлетворяющая условию* $\|A(t) - \tilde{A}(t)\| < \varepsilon$*, все решения системы* $\dot{X} = \tilde{A}(t)X$ *ограничены при* $t \to \infty$.

Если $X(t)$ матрица решений системы (1) с начальным условием $X(0) = E$, то $X(t+2\pi)$ также является матрицей решений этой системы. Поэтому справедливо равенство

$$X(t + 2\pi) = X(t)M, \tag{3}$$

где матрица $M = X(2\pi)$ так называемая *матрица монодромии* системы, собственные значения которой называются *мультипликаторами.*

Из равенства (3) следует $X(t + 2n\pi) = X(t)M^n$, так что решения нашей системы ограничены при $t \to \infty$, если матрица M^n ограничена при всех целых n в силу ограниченности $X(t)$ на интервале $[0, 2\pi]$. В рассматриваемом случае это эквивалентно тому, что

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \neq 0, \pi.$$

Собственные значения такой матрицы равны $e^{\pm i\alpha}$. Это равенство является необходимым и достаточным условием сильной устойчивости системы (1).

Как же работает в этом случае определение 1.1 и устроена область устойчивости каноническиз систем? Чтобы объяснить это опишем, следуя [1], множество значений матриц монодромии, то есть геометрию группы $SL(2, \mathbb{R})$. Произвольная матрица $M \in SL(2, \mathbb{R})$ допускает представление

$$M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau + \operatorname{sh}\tau\cos\varphi & \operatorname{sh}\tau\sin\varphi \\ \operatorname{sh}\tau\sin\varphi & \operatorname{ch}\tau + \operatorname{sh}\tau\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \tau < +\infty$. Параметризуем произведение окружности на открытый единичный диск D координатами (θ, φ, r). Тогда отображение

$$\varphi \mapsto \varphi, \quad \theta \mapsto \theta, \quad r \mapsto \operatorname{th}^2\tau \tag{5}$$

определяет гомеоморфизм $SL(2, \mathbb{R})$ и внутренности тора $G = S^1 \times D$.

Если M – матрица монодромии системы (1), то ее след (постоянная Ляпунова) равен $|2\cos\theta|\operatorname{ch}\tau$, что следует из представления (4). Условие невещественности корней вещественной унимодулярной матрицы M сводится, как легко проверить, к тому, чтобы ее след по модулю был бы меньше, чем 2. Таким образом, матрицы устойчивого вида выделяются условием $2|\cos\theta|\operatorname{ch}\tau < 2$.

Чтобы найти это множество во внутренности тора, определим уравнение его границы, полагая $|\cos\theta|\operatorname{ch}\tau = 1$. Это уравнение, устанавливаемое с помощью гомеоморфизма (5),

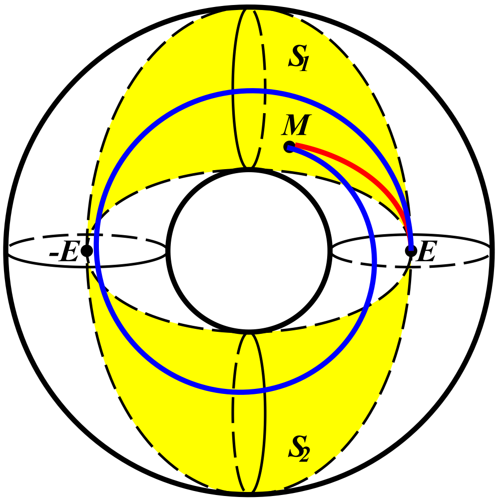

Рис. 1. Множество G.

записывается так $r = \sin^2\theta$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$. Эта поверхность выделяет во внутренности тора две связные компоненты (на рис. 1 показаны серым цветом) S_1 и S_2, которые соответствуют двум различным типам расположения мультипликаторов на единичной окружности[1]. Множества S_1, S_2 принято называть *областями устойчивости* двумерных канонических систем.

Матрица $X(t)$ при изменении t от 0 до 2π описывает кривую в множестве G, делая при этом неторое число витков по координате θ. Допустим, что ее конец $X(2\pi) = M$ соответствует сильно устойчивой системе, то есть попадает в одну из зон устойчивости. Соединим матрицу M с единичной матрицей непрерывной кривой, все внутренние точки которой лежат в этой же компоненте (рис. 1). В результате мы получим некоторую замкнутую кривую. Число полных витков этой кривой, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от направления обхода с увеличением t, называется *индексом вращения* матрицы монодромии M. **Замечание.** В литературе чаще используется не совсем удачный термин *номер зоны устойчивости*, так как этот номер произвольное целое число, а настоящих областей устойчивости в данном случае всего две. Поэтому мы будем употреблять этот термин только для нумерации областей значений параметров системы, в которых она сильно устойчива.

В работе [1] фактически доказано следующее более общее утверждение[1].

Утверждение 1. *Две сильно устойчивые системы, матрицы монодромии которых принадлежат одной и той же области устойчивости, гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их индексы вращения.*

Доказательство этого утверждения заключается в построении гомотопии между кривыми $X(t)$ и $Y(t)$, $0 \le t \le 2\pi$, где $X(t)$, $Y(t)$ матрицы решений двух сильно устойчивых систем, которым соответствует однотипное расположение мультипликаторов при условии, что совпадают их индексы вращения.

Таким образом, тип расположения мультипликаторов и индекс вращения представляют собой гомотопический инвариант сильно устойчивой канонической системы.

[1] Различие заключается в следующем. Возмущение $\dot{X} = (A(t) + \varepsilon B(t))X$ сильно устойчивой системы при комплексном ε приводит к тому, что обязательно один мультипликатор сдвигается внутрь окружности (мультипликатор 1-го типа), а другой – во внешность (мультипликатор 2-го типа) [2].

[1] Для канонических систем размерности $2k$, $k \ge 1$. При $k > 1$ число областей устойчивости (связных компонент множества устойчивости) равно 2^k [1].

При исследовании систем, зависящих от параметров, этот инвариант может меняться в зависимости от изменения паметров. Поэтому возникает задача описания геометрии областей устойчивости в пространстве параметров, в частности, границ таких областей [3]. Кроме того, для полной классификации канонических систем, требуется рассмотреть случай, когда $M \notin S_1, S_2$. Решение этой задачи основывается на свойствах уравнения Риккати, получаемого в результате проективизации линейной системы. Связь линейных систем с этим уравненем довно известна [4], но как заметил В.И. Арнольд в своих воспоминаниях об академике Я.Б. Зельдовиче [5]: "применения теории Пуанкаре к уравнению Риккати должны входить в учебники, но насколько я помню, никто из математиков их не заметил". Естественно, что ситуация с тех пор существенно изменилась, о чем свидельствует количество публикаций, посвященных применению этой теории (см., например, [6], [7]).

С другой стороны, многочисленные публикации, посвященные геометрическому описанию областей устойчивости канонических систем (см. [8], [9] и приведенную там библиографию), не используют теорию Пуанкаре. Поэтому основная цель данной работы показать, что эта теория позволяет получить как более прозрачное описание областей устойчивости (и неустойчивости), так и удобные средства их численного моделирования.

2. Уравнение Риккати, проективный поток и число вращения

Переход от однородных координат $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ к аффинным $w = x_2/x_1$ в (1) приводит к уравнению Риккати с периодическими коэффициентами

$$\dot{w} = (a(t) - b(t))w^2 - 2c(t)w + a(t) + b(t). \tag{6}$$

Это уравнение порождает *проективный поток*, индуцируемый линейной системой. Компактификация фазового пространства уравнения Риккати с помощью замены $w = \operatorname{tg}\theta/2$ ($-\pi \le \theta \le \pi$) преобразует его в систему на торе

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{\theta} = 2a(\varphi) + 2b(\varphi)\cos\theta - 2c(\varphi)\sin\theta = p(\varphi, \theta), \tag{7}$$

где (φ, θ) – угловые координаты на торе[1]. Проективный поток описывает угловую эволюцию решений системы (1).

Опишем основные свойства таких потоков, составляющих содержание теории Пуанкаре-Данжуа[2].

Пусть $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$ – решение (6) с начальными условиями (φ_0, θ_0). Так как $\dot{\varphi} \ne 0$, то существует предел: *число вращения* А. Пуанкаре

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t, \varphi_0, \theta_0)}{t},$$

который не зависит от начальных данных и является непрерывной функцией параметров системы. Будем считать, что $\varphi_0 = 0$, рассматривать решение $\theta(t, \theta_0)$, можно представить в виде

$$\theta(t, \theta_0) = \rho t + \theta_0 + \gamma(t, \theta_0), \tag{8}$$

где функция γ периодична по θ_0 и $|\gamma| = o(t)$ при $t \to \infty$.

Поток, порождаемый системой (6), определяет сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $f : S^1 \to S^1$ (отображение за период). Так как правые части в (7) аналитичны по θ, то f – аналитический гомеоморфизм. Поднятие F на универсальное накрытие

[1] Угловые координаты – это координаты на универсальном накрытии тора $\mathbb{R}^2$.

[2] Доказательства, формулируемых ниже утверждений, можно найти, например, в книге В.И. Арнольда [10], гл. 3, §11.

представимо в виде $F : \theta \to \theta + g(\theta)$, где $g(\theta)$, периодическая по θ функция[3]. Число вращения ρ выражается через $g(\theta)$:

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{g(\theta) + g(F(\theta)) + \cdots + g(F^{n-1}(\theta))}{n}.$$

Арифметические свойства числа вращения почти полностью определяют динамику потока на торе, допускающего существование такого числа.

Если оно иррационально, то по теореме Данжуа [11] в силу аналитичности гомеоморфизм f топологически сопряжен повороту[1] на угол $2\pi\rho$. Поток на торе топологически сопряжен линейному квазипериодическому потоку

$$(\varphi, \theta) \to (t + \varphi, \theta + \rho t). \tag{9}$$

Если оно рационально ($\rho = p/q$), то f имеет периодическую точку периода q. Поток на торе имеет замкнутую траекторию, делающую q оборотов по параллели тора и p оборотов по меридиану.

В рассматриваемом случае, если $\rho = p/q$, то гомеоморфизм F имеет периодическую точку периода q. Следовательно, имеет место равенство

$$F^q(\theta_0) = \theta_0 \tag{10}$$

для некоторого θ_0.

Если производная $(F^q)'(\theta_0)$ отлична от единицы (невырожденный случай), то малое возмущение отображения F также имеет неподвижную точку периода q (теорема о неявной функции). Отсюда следует, что число вращения возмущенного отображения равно p/q. Поток на торе имеет структурно устойчивую (грубую) замкнутую траекторию [13].

Если же эта производная равна единице (вырожденный случай), то либо все точки отображения F^q неподвижные и поток на торе топологически эквивалентен линейному потоку

$$(\varphi, \theta) \to (t + \varphi, \theta + \rho t), \tag{11}$$

либо F^q имеет единственную полуустойчивую неподвижную точку и тогда поток на торе имеет единственную полуустойчивую замкнутую траекторию. Эти утверждения следуют из теоремы об оценки мощности множества минимальных множеств проективного потока на торе ([14], теорема 8) и, в какой-то мере, дополняют классификацию Пуанкаре.

Таким образом, рациональному числу вращения может соответствовать три топологически различных случая поведения проективного потока: он может иметь одну, две, континуум замкнутых траекторий. Для различения этих случаев служит следующее понятие.

Определение 2. *Говорят, что интервал (α, β) является интервалом захвата фазы для проективного потока, зависящего от параметра, если его число вращения постоянно на этом интервале.*

Существование интервалов захвата фазы легко обнаружить в численных экспериментах, что демонстрирует рис. 2, где слева показан график зависимости числа вращения от параметра ε потока, порождаемого уравнением

$$\dot{\theta} + 2\sin\theta = \varepsilon + \sin t + (\sin 3t + \cos^2 3t)\cos\theta. \tag{12}$$

[3]Отображение F легко построить, используя (8). Например, можно положить $F(\theta) = \theta + \gamma(2\pi, \theta)$.

[1]Если число вращения иррационально, поток на торе имеет единственное минимальное множество, которое либо весь тор, либо негде не плотно. Во втором случае минимальное множество может иметь разную топологическую структуру при одном и том же значении числа вращения, что было замечено Н. Маркли [12].

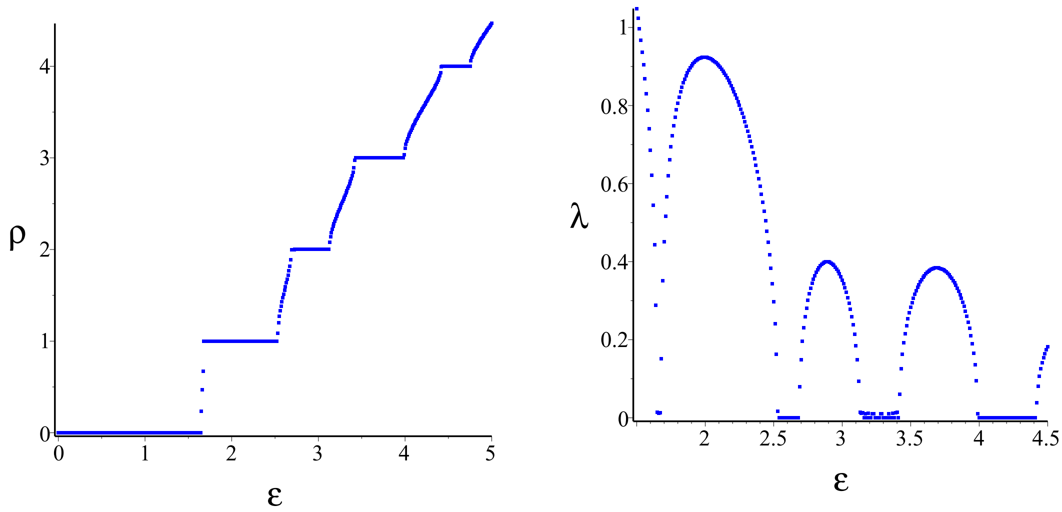

Рис. 2. Слева число вращения $\rho(\varepsilon)$ уравнения (12) на интервале $[0, 5]$, справа показатель Ляпунова $\lambda(\varepsilon)$ на интервале $[1.5, 4.5]$.

Интервалы захвата фазы – ступеньки на этом графике, соответствующие целым значениям числа вращения.

Очевидно, что структурно устойчивая периодическая траектория потока на торе имеет ненулевой показатель Ляпунова. Нетривиальное уравнение системы в вариациях[2] для траектории $\theta(t, \theta_0)$ записывается в виде

$$\dot{\xi} = (2c(t)\cos\theta(t, \theta_0) + 2b(t)\sin\theta(t, \theta_0))\xi = \frac{\partial p(t, \theta(t, \theta_0))}{\partial \theta}\xi. \tag{13}$$

В силу правильности периодических линейных систем, получаем

$$\lambda_{\pm} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t (2c(s)\cos\theta(s, \theta_0) + 2b(s)\sin\theta(s, \theta_0))ds. \tag{14}$$

Отсюда следует, что исходная линейная система (1) является в этом случае гиперболической, так как ее показатели Ляпунова отличаютс от показателей (14) множителем 2. Отметим, что спектр показателей Ляпунова системы (1) либо $\{0\}$, либо $\{-\gamma, \gamma\}$, где $\gamma \neq 0$.

Если система зависит от двух параметров, то области постоянства числа вращения становятся двумерными – это, так называемые, *языки Арнольда.*

Определение 3. *Множество уровня числа вращения $\rho(\epsilon, \delta) =$const, если оно имеет непустую внутренность, называется языком Арнольда.*

На рис. 3 показаны языка Арнольда ($\rho = 0, 1, 2, 3$) для системы

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{\theta} + 2\sin\theta = \varepsilon + \delta\sin\varphi + \delta(\sin 3\varphi + \cos^2 3\varphi)\cos\theta.$$

3. О топологической классификации канонических систем

Для классификации канонических систем необходимо иметь подходящее отношение эквивалентности. Так как рассматриваемые нами потоки определены на расслоениях, то топологическая эквивалентность таких потоков заменяется на послойную эквивалентность.

[2]Очевидно, что второе уравнение системы в вариациях имеет вид $\dot{\eta} = 0$.

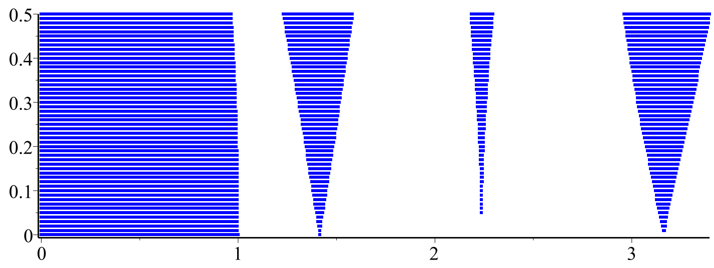

Рис. 3. Языки Арнольда ограничены парой непрерывных кривых и подходят оси $\delta = 0$ все более узким языком, ширина которого пропорциональна $O(\delta)$, за исключением $\rho = 0$.

Определение 4. *Два линейных расширения, порождаемых системами вида* (1) *послойно топологически эквивалентны, если существует непрерыное* 2π*-периодическое семейство гомеоморфизмов* $H_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *такое, что*

$$H_t(0) = 0, \qquad H_t(X_1(t)x) = X_2(t)H_t(x),$$

где $X_1(t)$, $X_2(t)$ *– фундаментальные матрицы решений соответствующих систем.*

В случае, когда H_t – линейный автоморфизм, говорят, что линейные расширения послойно линейно эквивалентны. Проективный поток, индуцируемый линейным расширением, также является потоком на расслоении $S^1 \times S^1$ (проективным расслоением). По аналоги с определением 4 будем говорить о послойной топологической эквивалентности проективных потоков.

Следуюие утверждения описывают связь между поведением траекторий проективного и линейного потоков. Хотя они и являются известными (см., например, [6]), мы доказываем их для полноты картины.

Лемма 1. *Гомеоморфизм* F *имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда мультиплткаторы матрицы монодромии* M *вещественны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предположим, что мультипликаторы вещественны и различны: $\mu_1 < 1 < \mu_2$, $\mu_1\mu_2 = 1$. Тогда можно построить решение $\boldsymbol{x}(t)$ системы (1) такое, что

$$\boldsymbol{x}(t + 2\pi) = \mu_1 \boldsymbol{x}(t) \tag{15}$$

(решение Флоке).

Растяжение (сжатие) $r(t, \theta_0)$ по направлению $\theta(t, \theta_0)$ является решением линейного уравнения

$$\dot{r} = -\frac{\partial p(t, \theta(t, \theta_0))}{\partial \theta} r,$$

которое с точностью до знака совпадает с уравнением (13). Таким образом,

$$\boldsymbol{x}(t) = (r(t, \theta_0) \cos \theta(t, \theta_0), r(t, \theta_0) \sin \theta(t, \theta_0))$$

или в комплексном виде

$$\boldsymbol{z}(t, \theta_0) = r(t, \theta_0) e^{i\theta(t, \theta_0)}.$$

Из (15) получаем $\boldsymbol{z}(t + 2\pi, \theta_0) = r(t + 2\pi, \theta_0) e^{i\theta(t+2\pi,\theta_0)} = \mu_1 r(t) e^{i\theta(t,\theta_0)}$. Следовательно,

$$e^{i\theta(t+2\pi,\theta_0)} = e^{i\theta(t,\theta_0)+i2\pi n}$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Повторяя эти рассуждения в обратном порядке получаем достаточность.

Заметим, что мультипликаторы (собственные значения матрицы монодромии) равны $\mu_{1,2} = e^{\pm\lambda}$. Поэтому, если показатели Ляпунова отличны от нуля, то мультипликаторы отличны от единицы. Если число вращения равно целому n, то это означает, что замкнутая траектория делает n оборотов по координате θ и один по φ.

Теорема 1. *Интервал захвата фазы определяется целыми значениями числа вращения проективного потока.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как число вращения не меняется в интервале захвата фазы, то такой интервал соответствует структурно устойчивому случаю потока на торе. Такой поток имеет четное число грубых замкнутых траекторий (в нашем случае две), показатели Ляпунова которых отличны от нуля. Следовательно, мультипликаторы отображения монодромии вещественные и различные. По лемме 3.1 существование таких траекторий возможно тогда и только тогда, когда число вращения целое.

Пусть число врашения проективного потока равно нулю Тогда система (1) топологически эквивалентна гиперболической системе (теорема Гробмана-Хартмана)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Такой системе соответствует система на торе

$$\varphi = 1, \qquad \dot{\theta} = -\sin\theta, \tag{16}$$

которую будем называть *гиперболической нормальной формой* системы (7).

Если число вращения равно $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$

преобразует систему на торе в систему с нулевым числом вращения. Таким образом, проективный поток, соответсвующий любой структурно устойчивой кананической системе, топологически эквивалентен нормальной форме (16). **Замечание.** Вообще говоря, произвольный поток на торе может иметь интервалы захвата фазы для нецелых рациональных значений числа вращения. В работе [**?**] предложен конструктивный критерий проверки отсутствия таких интервалов.

Теорема 2. *Для того, чтобы каноническая система* (1) *была сильно устойчивой необходимо и достаточно, чтобы число вращения соответствующего проективного потока было нецелым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Все решения сильно устойчивой системы (1) ограничены, тогда по теореме Р. Камерона [15] она послойно линейно эквивалентна системе вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = d(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \tag{17}$$

где $d(t)$ – 2π-периодическая функция. Проективный поток определяется равенством

$$\theta(t, \theta_0) = 2d_0 t + \theta_0 + 2 \int\limits_0^t \tilde{d}(s) ds, \qquad d_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d(s) ds.$$

С другой стороны, матрица монодромии системы (17) имеет вид

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi d_0 & -\sin 2\pi d_0 \\ \sin 2\pi d_0 & \cos 2\pi d_0 \end{pmatrix},$$

собственные значения которой равны

$$e^{\pm i2\pi d_0} = e^{\pm i\pi\rho}.$$

Они являются комплексными тогда и только тогда, когда ρ не является целым.

Достаточность следует из леммы 3.1.

Итак, если число вращения нецелое, то каноническая система является сильно устойчивой. Из теоремы 3.2 следует, что система на торе послойно эквивалентена системе

$$\varphi = 1, \qquad \dot{\theta} = \rho, \tag{18}$$

которую будем называть *эллиптической нормальной формой* (7).

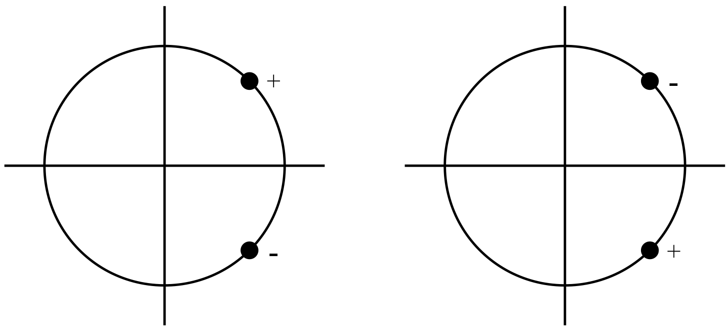

Рис. 4. Два типа мультипликаторов сильно устойчивой системы. Помеченные знаком + двигаются в положительном направлении, знаком − в отрацетельном.

Мультипликаторы сильно устойчивой системы при малом изменении параметров движутся по единичной окружности навстречу друг другу в направлении точки 1 или −1 (рис. 4). Матрица монодромии является матрицей поворота на угол $\pi\rho$. Имеет место неравенство $m\pi < \pi\rho < (m+1)\pi$, где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Тогда индекс вращения матрицы монодромии равен $m/2$, если m четно, или $(m+1)/2$, если m нечетно.

4. Заключительные замечания

Множество линейных канонических систем 2-го порядка дает пример класса динамических систем, в котором множество структурно устойчивых и множество устойчивых по Ляпунову систем имеют простое геометрическое описание (см. рис. 1). Число вращения проективного потока на торе дает полную информацию о расположении интервалов устойчивости (неустойчивости, которые являются множеством структурной устойчивости соответствующих проективных потоков). Конечно, простота этой картины является следствием теоремы Флоке-Ляпунова и свойства гамильтоновости исходной линейной системы.

Отметим, что приближенное вычисление чисел вращения не требует значительных вычислительных мощностей, для этого требуется обычный персональный компьютер. Для расчета показателей Ляпунова и областей устойчивости желательно использовать многопроцессорный вычислительный комплекс.

В настоящее время наблюдается повыщенный интерес к геометрии областей структурной устойчивости (языков Арнольда) уравнения

$$\dot{\theta} = \varepsilon + \delta a(\omega t) - \sin\theta. \tag{19}$$

Это связано с тем обстоятельством, что оно моделирует эффект Джозефсона[1] в квантовой физике. В ряде работ (см., например, [7] и приведенную там библиографию) исследуется геометрия языков Арнольда двупараметрического семейства уравнений вида (19) как множеств уровня числа вращения. С другой стороны, уравнение (19) служит моделью элемента потоковой цепочки системы фазовой синхронизации [16]. В этом случае число вращения ρ рассматривается как частота внутренних колебаний, слагаемое $\delta a(\omega t)$ как внешнее периодической воздействие с частотой ω, а интервалы захвата фазы как режимы, соответствующие синхронизации[2].

Заметим, что если коэффицинты матрицы $A(t)$ гладкие функции и $b^2(t) + c^2(t) \neq 0$, то система (7) гладким преобразованием приводится к виду (19).

Литература

1. Гельфанд И. М., Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. 1955. Т. 10, № 1. С. 3–10.

2. Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. 1950. Т. 73, № 3. С. 445–448.

3. Крейн М. Г. Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // сб. «Памяти Александра Александровича Андронова». М.: изд-во АН СССР. 1955. С. 413–498.

4. Prüfer H. Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen // Math. Annalen. 1926. vol. 95. pp. 488–518.

5. Арнольд В.И. ЯБ и математика // Природа. 1992, № 2. С. 105–108.

6. Перов А. И. Каноническая система двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и теория Пуанкаре-Данжуа дифференциальных уравнений на торе // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 2. С. 373–387.

7. Глюцук А. А., Клепцын Д. А., Филимонов И. В., Щуров И. В. О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона // Функциональный анализ и его прил. 2014. Т. 48, № 4. С. 47–64.

8. Broer H., Levi M. Geometrical Aspects of Stability Theory for Hill's Equations //Arch. Rational Mech. Anal. 1995. vol. 131. pp. 225–240.

9. Broer H., Simó C. Resonance Tongues in Hill's Equations: A Geometric Approach // Journal of Differential Equations. 2000. vol. 166. pp. 290–327.

[1]Это явление возникновения сверхпроводящей компоненты элетричечкого тока, протекающего через слой диэлектрика между двумя сверхпроводниками.

[2]Что объясняет происхождение термина "интервал захвата фазы".

10. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2000. 400 С.

11. Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1932. vol. 11. pp. 333–375.

12. Markley N. Homeomorphisms of the circle without periodic points // Proc. Lond. Math. Soc. 1970. vol. 20, No. 3. pp. 688–698.

13. Майер А.Г. Грубые преобразования окружности в окружность // Ученые записки ГГУ. 1939. Т. 12. С. 215–229.

14. Sacker R.J., Sell G.R. A spectral theory for linear differential systems // J. Diff. Equat. 1978. vol. 27. pp. 320–358.

15. Cameron R.H. Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients // J. Math. Phys. 1936. vol. 15. pp. 73–81.

16. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации // Горький: ИПФ АН СССР. 1989. 256 С.

MSC2020 34C25

The geometry of stability regions of linear canonical systems of periodic differential equations

N. A. Mamaeva, A. N. Sakharov

Nizhny Novgorod state agricultural academy

Abstract: A.M. Lyapunov and A. Poincare in the century before last built the theory of linear periodic systems of differential equations. The result of their research was the theorem of Floquet-Lyapunov and Poincare-Lyapunov. However, by the middle of the last century, there was a need to find opportunities for using this theory in applications. A number of wonderful works of M.G. Krein, I.M. Gelfand, V.B. Lidsky et al was appeared, in whose task of describing canonical periodic systems was reduced to a description of geometry the behavior of the eigenvalues of the monodromy operator. Since the monodromy operator in this case is a linear operator, his made it possible to use computational methods of linear algebra. For systems that depend on parameters, the behaviory of the multipliers is determined by the geometry of the regions of stability of solutions that appear and disappear when the system parameters change. At the end of the last century, the method of compactification of the phase space of the system was systematically used to describe the geometry of stability regions, which allowed us to use the results here theory of dynamical systems on compact spaces. Using two-dimensional systems as an example, both approaches are described and their partial topological classification is given.

Keywords: canonical linear systems, monodromy operator, multipliers, stability zones, rotation number, Arnold languages, topological equivalence.

References

1. Gelfand I. M., Lidskiy V. B. [On the structure of stability domains for linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients]. UMN. 1955. vol. 10, No. 1. pp. 3–10. (in Russian).

2. Kreyn M. G. [Generalization of some studies of A.M. Lyapunov on linear differential equations with periodic coefficients]. DAN SSSR. 1950. vol. 73, No. 3. pp. 445–448. (in Russian).

3. Kreyn M. G. [Fundamentals of the theory of λ-zones of stability of the canonical system of linear differential equations with periodic coefficients]. Pamyati Aleksandra Aleksandrovicha Andronova. M.: AN SSSR Proc. 1955. p. 413–498. (in Russian).

4. Prüfer H. Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen. Math. Annalen. 1926. vol. 95. pp. 488–518.

5. Arnold V.I. [YaB and mathematics]. Priroda. 1992, No. 2. pp. 105–108. (in Russian).

6. Perov A. I. [The canonical system of two differential equations with periodic coefficients and the Poincar?-Denjoy theory of differential equations on the torus]. Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. 2010. vol. 51, No. 2. pp. 373–387. (in Russian).

7. Glutsuk A. A., Kleptsyn D. A., Filimonov I. V., Shchurov I. V. [On the Adjacency Quantization in an Equation Modeling the Josephson Effect]. Funktsional'nyy analis i ego pril. 2014. vol. 48, No. 4. pp. 47–64. (in Russian).

8. Broer H., Levi M. Geometrical Aspects of Stability Theory for Hill's Equations. Arch. Rational Mech. Anal. 1995. vol. 131. pp. 225–240.

9. Broer H., Simó C. Resonance Tongues in Hill's Equations: A Geometric Approach. Journal of Differential Equations. 2000. vol. 166. pp. 290–327.

10. Arnol'd V. I. [Geometric methods in the theory of ordinary differential equations]. Izhevsk: Regulyarnya i khaoticheskaya dinamika. 2000. 400 p. (in Russian).

11. Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1932. vol. 11. pp. 333–375.

12. Markley N. Homeomorphisms of the circle without periodic points. Proc. Lond. Math. Soc. 1970. vol. 20, No. 3. pp. 688–698.

13. Mayer A.G. [Rough Circle to Circle Conversions]. Uchenye zapiski GGU. 1939. Vol. 12. pp. 215–229. (in Russian).

14. Sacker R.J., Sell G.R. A spectral theory for linear differential systems. J. Diff. Equat. 1978. vol. 27. pp. 320–358.

15. Cameron R.H. Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients. J. Math. Phys. 1936. vol. 15. pp. 73–81.

16. Afraymovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D. [Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks]. Gorkiy: IPF AN SSSR. 1989. 256 p. (in Russian).