

УДК 519.6

Применение разрывного метода Галеркина для решения задач газовой динамики на динамических локально-адаптируемых сетках *

Жалнин Р. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье описан численный алгоритм для решения системы уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной смеси газов методом Галеркина с разрывными базисными функциями на адаптивных локально измельчающихся сетках. Реализация построенной схемы базируется на структуре данных и алгоритмах библиотеки `p4est`. Представлены результаты решения таких задач, как обтекание профиля NASA 0012, задача о распаде тройного разрыва, задача о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова.

Ключевые слова: метод Галеркина с разрывными базисными функциями, уравнения газовой динамики, многокомпонентная смесь газов, параллельные вычисления, задача о тройном распаде разрыва, неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, адаптивные локально измельчающиеся сетки, `p4est`.

1. Математическая модель и разностная схема

Рассматривается система уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной смеси:

$$\frac{\partial(\rho C_i)}{\partial t} + \nabla(\rho C_i \mathbf{v}) = Q_i + \nabla \cdot \mathbf{J}_i, i = \overline{1, N_{comp}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla((\rho E + p)\mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{v} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}). \quad (3)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями и уравнением состояния:

$$p = \rho R T \sum_i \left(\frac{C_i}{M_{wi}} \right). \quad (4)$$

Запишем систему (1)–(3) в компактном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{H}(U, \nabla U) + Q \quad (5)$$

Введем новые переменные $\mathbf{V} = \nabla U$ и применим разрывный метод Галёркина (РМГ) [1, 2] к следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(U) = \nabla \cdot \mathbf{H}(U, \mathbf{V}) + Q, \\ \mathbf{V} - \nabla U = 0. \end{cases} \quad (6)$$

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-41-130001

Покроем расчетную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ сеткой $\Omega_h = \{C_j | j = 1, \dots, N_h\}$, где C_j – шести-гранники.

Введем пространство

$$V_h^K = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{C_j} \in P_K(C_j), j = 1, \dots, N_h\},$$

здесь $P_K(C_j)$ – пространство полиномов степени не выше чем K , на элементе C_j .

Зададим в V_h^K базис

$$\hat{\varphi}_k(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_{jk}(x, y, z), \quad (7)$$

где

$$\varphi_{jk}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{cj}}{\Delta x_j}\right)^{\alpha_k} \left(\frac{y - y_{cj}}{\Delta y_j}\right)^{\beta_k} \left(\frac{z - z_{cj}}{\Delta z_j}\right)^{\gamma_k}, & \text{если } (x, y, z) \in C_j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (8)$$

здесь $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k \leq K$, $k = 1, \dots, N_\varphi$, $N_\varphi = (K + 1)(K + 2)(K + 3)/6$, (x_{cj}, y_{cj}, z_{cj}) – центр масс ячейки C_j .

Приближенное решение будем искать в виде:

$$U_h(t, x, y) = \sum_{k=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_h} U_{jk}(t) \varphi_{jk}(x, y). \quad (9)$$

Подставив его в систему (6) и потребовав ортогональность полученной невязки всем базисным функциям получим:

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{dU_{jk}}{dt} \int_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV + \int_{C_j} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \varphi_{jm} dV = \int_{C_j} (\nabla \cdot \mathbf{H}) \varphi_{jm} dV + \int_{C_j} Q \varphi_{jm} dV, \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \mathbf{v}_{jk} \int_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV + \int_{C_j} (\nabla U) \varphi_{jm} dV = 0, \quad (11)$$

$$m = 1, \dots, N_\varphi, \quad j = 1, \dots, N_h.$$

Далее выполнив интегрирование по частям получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{d}{dt} U_{jk}(t) \int_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV &= \int_{C_j} \mathbf{F} \cdot (\nabla \varphi_{jm}) dV - \oint_{\partial C_j} (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}) \varphi_{jm} dS, \\ &- \int_{C_j} \mathbf{H} \cdot (\nabla \varphi_{jm}) dV + \oint_{\partial C_j} (\hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n}) \varphi_{jm} dS + \int_{C_j} Q \varphi_{jm} dV, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \mathbf{v}_{jk} \int_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV = \int_{C_j} U \nabla \varphi_{jm} dV - \oint_{\partial C_j} (\hat{U} \mathbf{n}) \varphi_{jm} dS, \quad (13)$$

$$m = 1, \dots, N_\varphi, \quad j = 1, \dots, N_h.$$

В полученном выражении необходимо определить способ вычисления численных потоков. Значение конвективного численного потока $\hat{\mathbf{F}}$ берется как приближенное решение

задачи Римана о распаде разрыва. Используются потоки Лакса-Фридрихса-Русанова [3, 4] и HLLC [5]. Потоки $\hat{\mathbf{H}}, \hat{U}$ вычисляются как полусуммы значений «слева» и «справа» от соответствующей грани.

Обозначим A_j – матрицу составленную из элементов $a_{mk}^j = \int_j \varphi_{jk} \varphi_{jm} dS$,

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_{N_h})$$

$$\tilde{U}_h = \text{colon}(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1N_\varphi}, \dots, U_{N_h1}, U_{N_h2}, \dots, U_{N_hN_\varphi}),$$

Получим:

$$A \frac{d\tilde{U}_h}{dt} = R(\tilde{U}_h),$$

Для интегрирования по времени уравнения

$$\frac{d\tilde{U}_h}{dt} = L(\tilde{U}_h), \quad (14)$$

где $L(\tilde{U}_h) = A^{-1}R(\tilde{U}_h)$, используется TVD-схема Рунге-Кутты 3-го порядка:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_h^* &= \Lambda \Pi_h \left(\tilde{U}_h^n + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^n) \right), \\ \tilde{U}_h^{**} &= \Lambda \Pi_h \left(\frac{3}{4} \tilde{U}_h^n + \frac{1}{4} \left(\tilde{U}_h^* + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^*) \right) \right), \\ \tilde{U}_h^{n+1} &= \Lambda \Pi_h \left(\frac{1}{3} \tilde{U}_h^n + \frac{2}{3} \left(\tilde{U}_h^{**} + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^{**}) \right) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\Lambda \Pi_h$ – оператор лимитирования [6], обеспечивающий невозрастание нефизических осцилляций вблизи разрывов решения и удовлетворяющий условию консервативности:

$$\int_{Q_j} \Lambda \Pi_h(U_h) dS = \int_{Q_j} U_h dS, \quad \forall Q_j \in \Omega_h.$$

Для выполнения операции лимитирования осуществляется проекция решения на пространство с линейным базисом (в случае если $K > 1$):

$$U_h^\Lambda = \Pi_\Lambda U_h,$$

где Π_Λ - оператор проекции:

$$\Pi_\Lambda : V_h^K \rightarrow V_h^1.$$

Далее в данном исследовании к U_h^Λ применяется лимитер Барта-Йесперсена [7].

Программная реализация описанной методики выполнена на динамических локально-адаптивных сетках [8] с использованием библиотеки p4est [9] в программном комплексе CHARM_3D.

2. Моделирование обтекания профиля NASA 0012

Был выполнен расчет течение вязкого сжимаемого газа в окрестности аэродинамического профиля NASA 0012 с числом Маха $M = 0.7$ под углом атаки 1.49° со следующими параметрами набегающего потока:

$$p_\infty = 46066.16 \text{ Па};$$

$$T_\infty = 248.019 \text{ К};$$

$$\rho_\infty = 0.647 \text{ кг/м}^3.$$

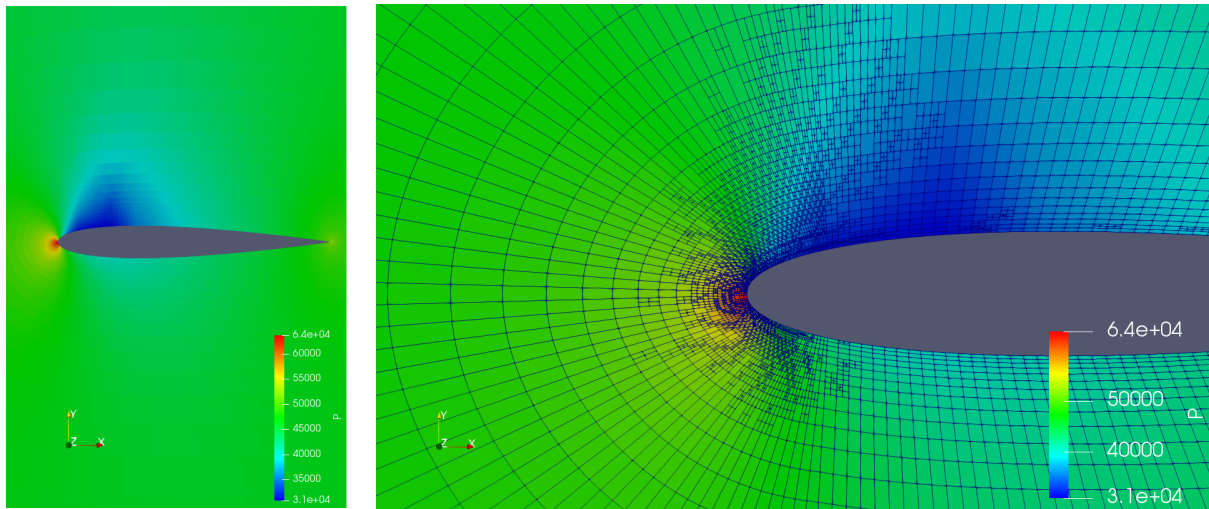


Рис. 1. Обтекание профиля NASA0012: а) поле давления вблизи профиля б) структура сетки вблизи профиля.

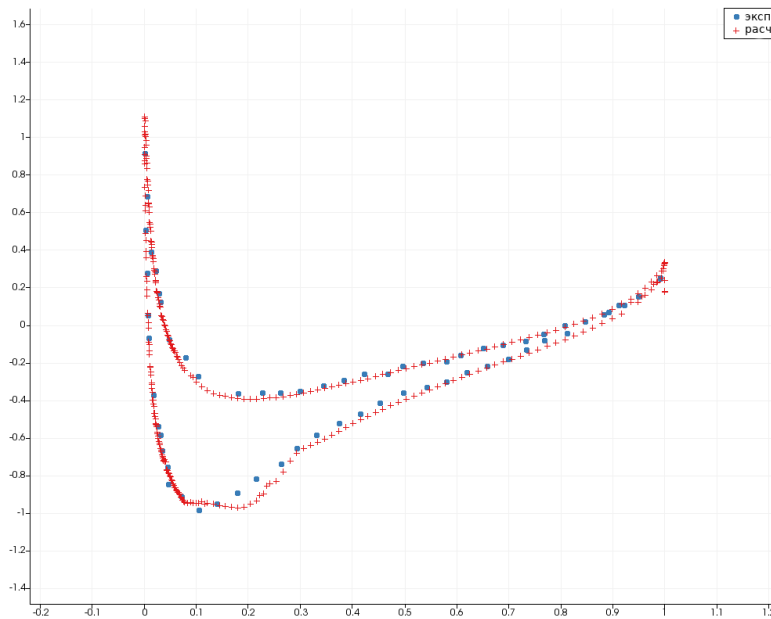


Рис. 2. Обтекание профиля NASA0012: а) поле давления вблизи профиля б) структура сетки вблизи профиля.

На рисунке 1 представлены результаты численного моделирования поставленной задачи: поле давления вблизи профиля и структура расчетной сетки около передней части профиля. На рисунке 2 представлено сравнение рассчитанного коэффициента давления на поверхности профиля с экспериментальными значениями [10]. Наблюдается достаточно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных результатов.

3. Тройной распад разрыва

Был выполнен расчет для задачи о распаде тройного разрыва (triple point problem) [11, 12]. Расчетная область представляет собой параллелепипед $[0, 7] \times [0, 3] \times [0, 0.125]$, разде-

ленный на три подобласти (рис. 3) с параметрами:

$$(\rho, p, \gamma, u, v) = \begin{cases} (1, 1, 1.5, 0, 0), & \text{если } (x, y, z) \in \Omega_1 = [0, 1] \times [0, 3] \times [0, 0.125]; \\ (1, 0.1, 1.4, 0, 0), & \text{если } (x, y, z) \in \Omega_2 = [1, 7] \times [0, 1.5] \times [0, 0.125]; \\ (0.125, 0.1, 1.5, 0, 0), & \text{если } (x, y, z) \in \Omega_3 = [1, 7] \times [1.5, 3] \times [0, 0.125]. \end{cases} \quad (16)$$

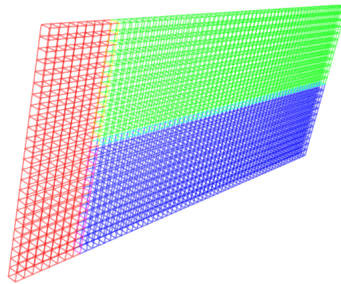


Рис. 3. Расчетная сетка.

На границах расчетной области заданы условия вытекания.

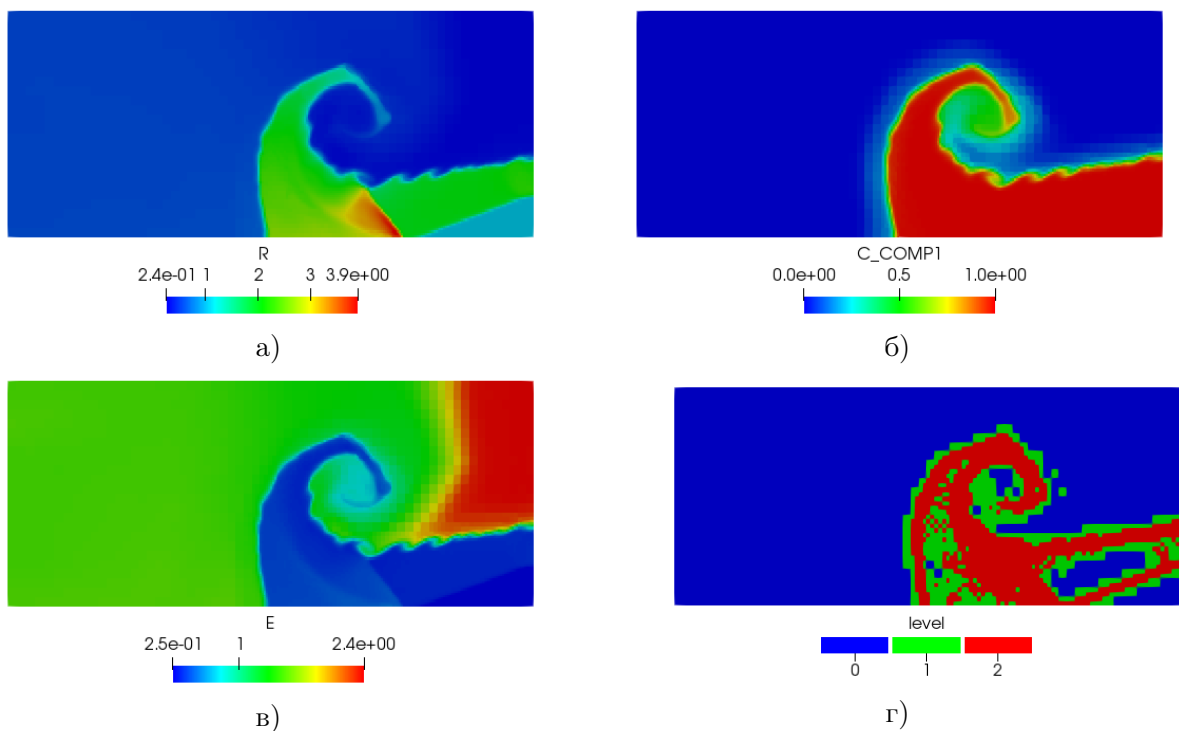


Рис. 4. Тройной распад разрыва: а) плотность, б) концентрация, в) внутренняя энергия, г) уровни адаптации сетки.

На рисунке 4 представлены распределения плотности, внутренней энергии и концентрации вещества, в начальный момент времени расположенного в области Ω_2 , в момент времени $t = 5$. На рисунке 5а показана структура адаптированной сетки и распределения плотности в трех сечения на момент времени $t = 5$. Полученные картины распределения хорошо согласуются с результатами, представленными в работе [12].

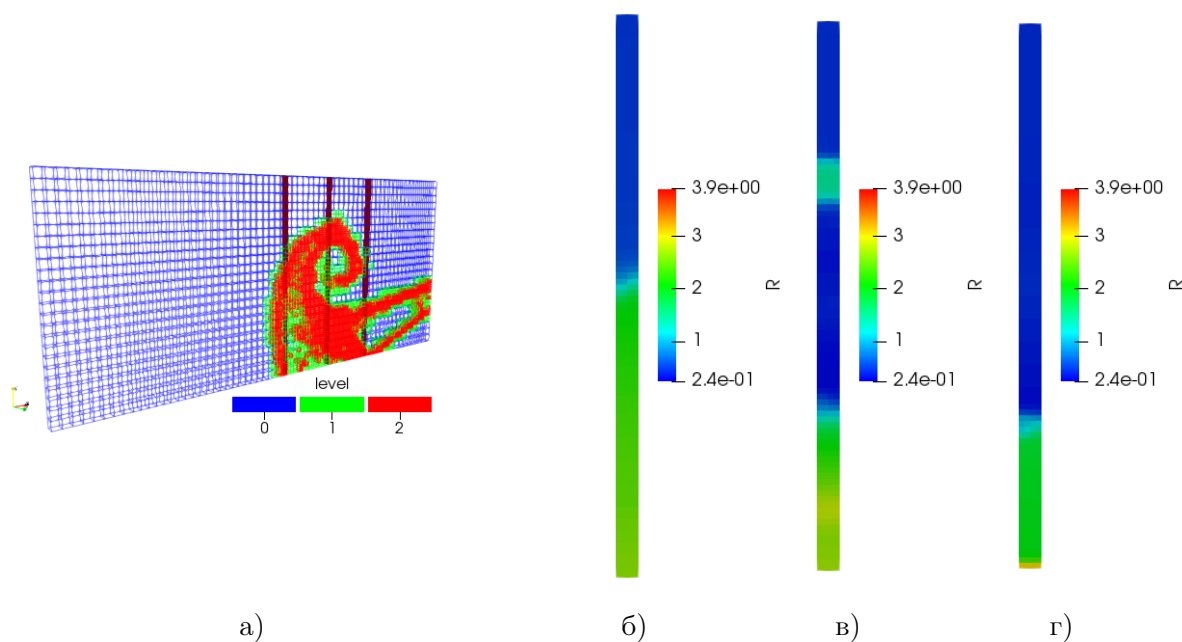


Рис. 5. Уровни адаптации сетки (а) и распределение плотности в поперечных сечениях на момент времени $t = 5$: б) $x = 3.5$, в) $x = 4.375$, г) $x = 5.25$.

4. Развитие неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

Смоделировано развитие неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, при прохождении ударной волны через возмущенный контактный разрыв между элегазом (SF_6) и воздухом, находящимися при атмосферном давлении.

Для расчетов была принята следующая физическая постановка задачи [13, 14], при начальной температуре 291 К и давлении 10^{-4} ГПа = 1 бар в камере низкого давления. За ударной волной в элегазе давление 2.152 бар, плотность $1.209 \cdot 10^{-2}$ г/см³, скорость ударной волны 195.2 м/с, скорость течения за ударной волной 97.76 м/с, начальные плотности элегаза и воздуха в камере низкого давления $6.037 \cdot 10^{-3}$ и $1.198 \cdot 10^{-3}$ г/см³ соответственно.

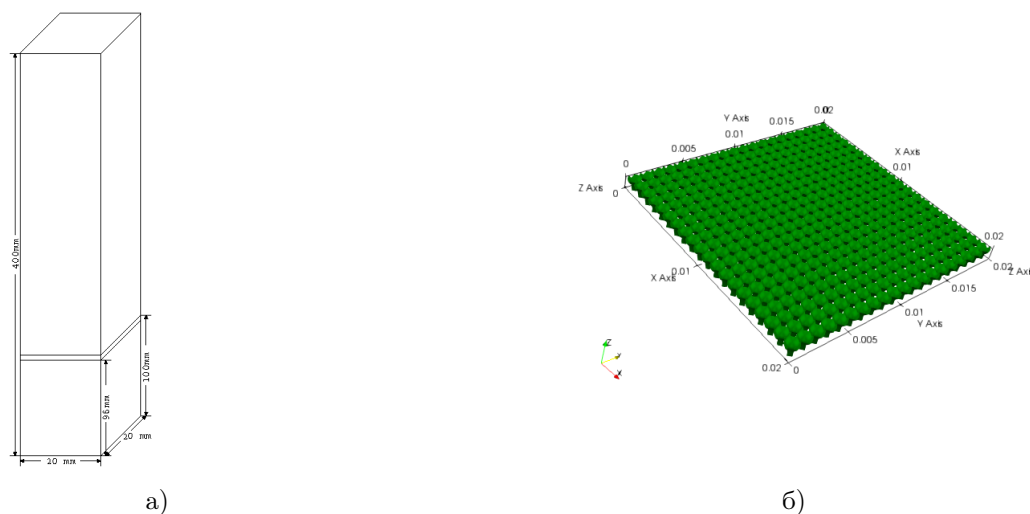


Рис. 6. Расчетная область: а) геометрия расчетной области; б) изоповерхность возмущенной контактной границы.

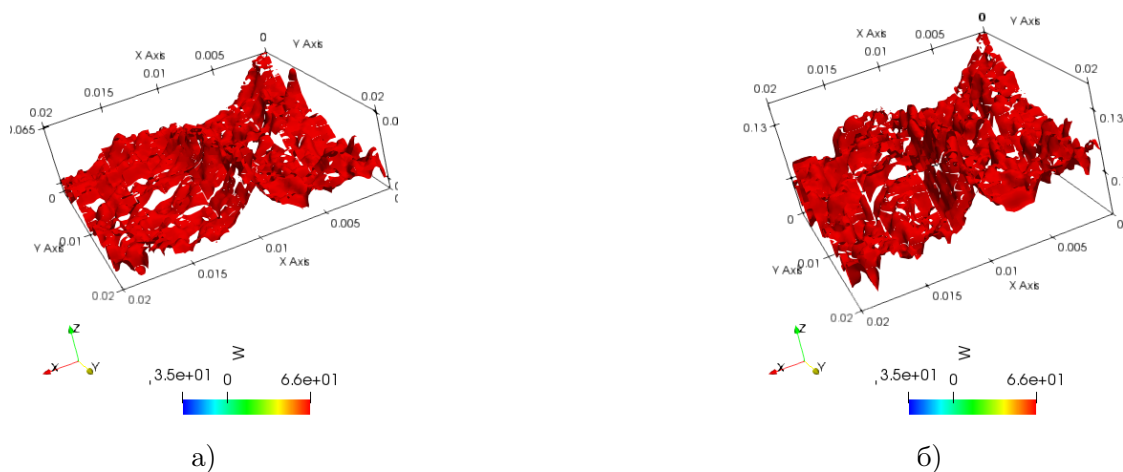


Рис. 7. Изоповерхность концентрации ($C_{air} = 0.5$): а) $t = 0.5$ мс, б) $t = 1$ мс

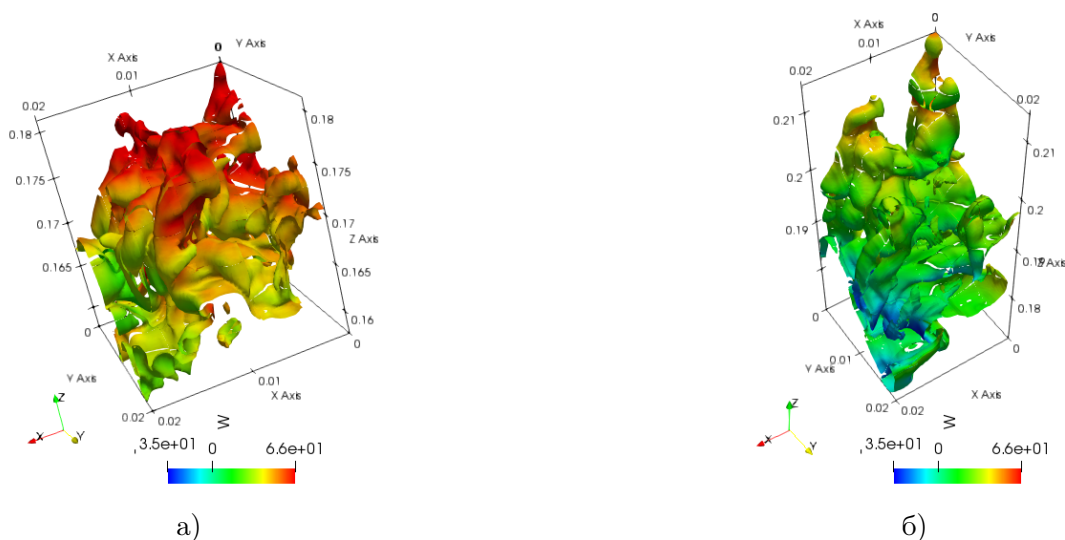


Рис. 8. Изоповерхность концентрации ($C_{air} = 0.5$): а) $t = 1.5$ мс, б) $t = 2$ мс.

Физические свойства элегаза и воздуха следующие: оба вещества являются невязкими, нетеплопроводными и идеальными газами с показателями адиабаты $\gamma = 1.094$ (SF_6) и $\gamma = 1.4$ (воздух), отношение молекулярных масс (SF_6 /воздух) принято равным 5.04.

Расчетная область была выбрана в виде параллелепипеда $\Omega = [0, 0.02] \times [0, 0.02] \times [-0.1, 0.3]$ (рис. 6а).

Положение фронта ударной волны в начальный момент времени полагалось равным $z = -0.004$. Положение контактного разрыва задавалось в виде (рис. 6б):

$$z(x, y) = -5 \times 10^{-4} * \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \right) \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi y}{\lambda} \right) \right), \lambda = 10^{-3}.$$

На рисунках 7 и 8 представлены изолинии концентрации ($C_{air} = 0.5$) на различные моменты времени.

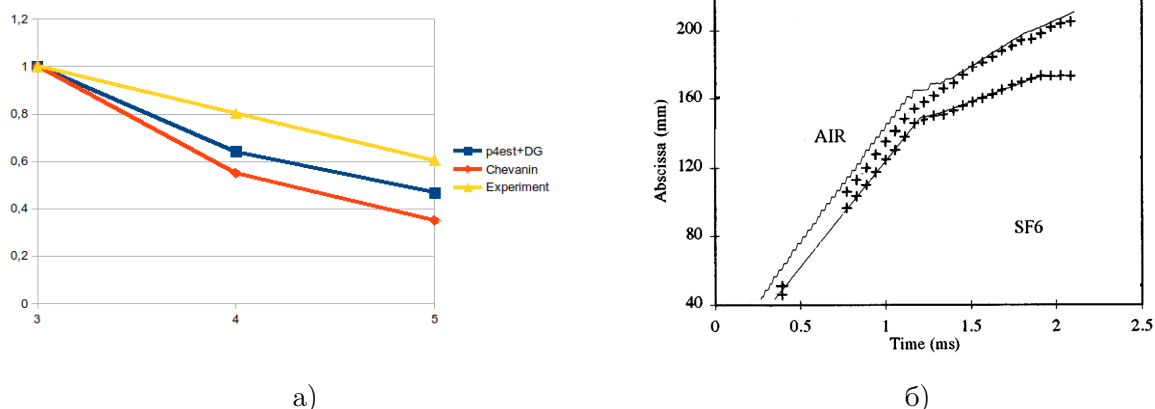


Рис. 9. Сравнение результатов: а) нормированные максимумы пульсаций продольной компоненты скорости в местах расположения 3, 4 и 5 датчиков, б) изменение ширины зоны турбулентного перемешивания (+ - эксперимент; - - расчет).

На рисунке 9а показаны нормированные относительно значений на 3 датчике максимумы пульсаций продольной компоненты скорости в местах расположения 3, 4 и 5 датчиков для расчетов в рамках этой работы (p4est+DG), для расчетов, выполненных в ИПМ им. В. М. Келдыша РАН (Chevanin) [15], и для данных, полученных в эксперименте. Видно, что расчеты выполненные с использованием данной методики дают более близкие к экспериментам результаты. На рисунке 9б показано изменение ширины зоны турбулентного перемешивания в сравнении с экспериментом.

5. Заключение

В целом полученные результаты свидетельствуют о состоятельности методики и ее применимости в для решения широкого класса задач. Программный комплекс CHARM_3D, разработанный на основе предложенного вычислительного алгоритма, позволяет решать задачи аэродинамики, моделировать течения многокомпонентных сред, исследовать развитие гидродинамических неустойчивостей.

Литература

1. Cockburn B., Shu Ch.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // Journal of Scientific Computing. 2001. vol. 16. No. 3. pp. 173 – 261.
2. Краснов М. М., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Реализация разрывного метода Галеркина в программном комплексе DGM // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018, № 245. 31 с.
3. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1. № 2. 267–279.
4. Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. vol. 7. No. 1. pp. 159 – 193.

5. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver // Shock Waves. 1994. No.4. pp. 25 – 34.
6. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 124 – 128.
7. Barth T. J., Jespersen D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper 89-0366. 1989.
8. Berger M. J., Colella P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // Journal of Computational Physics. 1989. No. 82. pp. 64 – 84.
9. Burstedde C., Wilcox L. C., Ghattas O. p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. vol. 33. № 3. pp. 1103 – 1133.
10. Harris C. D. Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel // NACA Technical Memorandum 81927. Langley Research Center. 1981.
11. Kucharik M., Garimella R. V., Schofield S. P., Shashkov M. J. A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations // Journal of Computational Physics. 2009. vol. 229. No. 7. pp. 2432 – 2452.
12. Kucharik M., Shashkov M. J. Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods // Journal of Computational Physics. 2014. No. 258. pp. 268 – 304.
13. Poggi F., Thoremby M.-H., Rodrigues G. Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability // Physics of Fluids. 1998. vol. 10. No. 11. pp. 2698 – 2700.
14. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 10. С. 61–66.
15. Чеванин В. С. Численное моделирование развития гидродинамических неустойчивостей на многопроцессорных системах // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 2. С. 17 – 32.

MSC2020 76M10

Application of the discontinuous Galerkin method for solving problems of gas dynamics on AMR*

R. V. Zhalnin

National Research Mordovia State University

Abstract: The article describes a numerical algorithm for solving the system of Navier-Stokes equations for a multicomponent gas mixture by the Discontinuous Galerkin Method on AMR. The implementation of the constructed scheme is based on the data structure and algorithms of the p4est library. The results of solving such problems as the flow around an NACA 0012 airfoil, the multimaterial triple point problem, and the problem of the development of the Richtmyer-Meshkov instability are presented.

Keywords: Discontinuous Galerkin Method, gas dynamics equations, multicomponent gas mixture, parallel computations, multimaterial triple point problem, Richtmyer-Meshkov instability, AMR, p4est.

References

1. Cockburn B., Shu Ch.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. *Journal of Scientific Computing*. 2001. vol. 16. No. 3. pp. 173 – 261.
2. Krasnov M. M., Ladonkina M. E., Tishkin V. F. Implementation of the Galerkin discontinuous method in the DGM software package. *KIAM Preprint*. 2018, No. 245. 31 p. (In Russian).
3. Rusanov V. V. [The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers]. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 1961. vol. 1. No. 2. pp. 267 – 279. (In Russian).
4. Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1954. vol. 7, No. 1. pp. 159 – 193.
5. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver. *Shock Waves*. 1994. No.4. pp. 25 – 34.
6. Ladonkina M. E., Nekljudova O. A., Tishkin V. F. Research of the impact of different limiting functions on the order of solution obtained by RKDG. *Matem. Mod.* 2012. vol. 24. No. 12. pp. 124 – 128. (In Russian).
7. Barth T. J., Jespersen D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *AIAA Paper* 89-0366. 1989.
8. Berger M. J., Colella P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*. 1989. No. 82. pp. 64 – 84.
9. Burstedde C., Wilcox L. C., Ghattas O. p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2011. vol. 33. № 3. pp. 1103 – 1133.

*The reported research was funded by Russian Foundation for Basic Research, grant № 18-41-130001

10. Harris C. D. Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. NACA Technical Memorandum 81927. Langley Research Center. 1981.
11. Kucharik M., Garimella R. V., Schofield S. P., Shashkov M. J. A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations. Journal of Computational Physics. 2009. vol. 229. No. 7. pp. 2432 – 2452.
12. Kucharik M., Shashkov M. J. Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods. Journal of Computational Physics. 2014. No. 258. pp. 268 – 304.
13. Poggi F., Thorembey M.-H., Rodrigues G. Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability. Physics of Fluids. 1998. vol. 10. No. 11. pp. 2698 – 2700.
14. Zhalnin R.V., Zmitrenko N.V., Ladonkina M.E., Tishkin V.F. Numerical simulation of Richtmyer–Meshkov instability development using the difference schemes of high order of accuracy. Matem. Mod. 2007. vol. 19. No. 10. pp. 61–66. (In Russian).
15. Chevanin V. S. Numerical simulation of hydrodynamics instabilities evolution on multiprocessor systems. Matem. Mod. 2012. vol. 24, No. 2. pp. 17 – 32. (In Russian).