УДК 517.958:531.12; 534.11

Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами

Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.
Сызранский филиал ФГБОУ ВО «СамГТУ»

Аннотация: Рассмотрен аналитический метод решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. С помощью замены переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным, исходная краевая задача сведена к системе функционально – разностных уравнений, которая может быть решена с помощью прямого и обратного методов. Описан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи. Получены новые частные решения для достаточно широкого круга законов движения границ. Рассмотрен прямой асимптотический метод приближенного решения функционального уравнения. Произведена оценка погрешностей приближенного метода в зависимости от скорости движения границы.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевые задачи, колебания систем с движущимися границами, замена переменных, законы движения границ, функциональные уравнения.

1. Введение

Одномерные системы, границы которых движутся, широко распространены в технике: канаты грузоподъемных установок [1, 4, 8, 11–15, 21], гибкие звенья передач [1, 2, 5, 16, 19, 20], стержни твердого топлива [22], бурильные колонны [8] и т. д. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [1–4, 8, 10, 16, 17, 20–22, 25]. Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [5], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [6] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, используемый в [7], заключающийся в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного.

В данной статье рассмотрен аналитический метод решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. С помощью замены переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным, исходная краевая задача сведена к системе функционально – разностных уравнений, которая может быть решена с помощью прямого и обратного методов. Описан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи. Получены новые частные решения для достаточно широкого круга законов движения границ. Рассмотрен прямой асимптотический метод приближенного решения функционального уравнения. Произведена оценка погрешностей приближенного метода в зависимости от скорости движения границы. В данном подходе удачно сочетается методика, используемая в [5, 6, 9, 18, 23, 24].

2. Постановка задачи

Рассмотрим свободные колебания в системе с движущимися границами.

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Граничные условия на закрепленных концах имеют вид

$$\begin{gathered} u\big(l_1(t),t\big) = 0; \quad u\big(l_2(t),t\big) = 0, \\ \big(l_1(0) \le x \le l_2(0)\big). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $u(x,t)$ – смещение точки объекта с координатой в момент времени t; a – скорость распространения волн в системе; $l_1(x)$, $l_2(x)$ – законы движения границ.

В работах [5,6] Весницким А. И. был предложен достаточно общий метод подбора новых переменных для волнового уравнения. Следуя этому методу, замена переменных производится в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\xi = \varphi\big(t + x/a\big) - \psi\big(t - x/a\big); \\ &\tau = a^{-1}\big[\varphi(t + x/a) + \psi(t - x/a)\big], \end{aligned} \tag{3}$$

где φ и ψ – некоторые функции. В результате такой замены исходное уравнение остается инвариантным (волновым), а φ и ψ определяются из условия постоянства ξ на границах.

В новых переменных ξ, τ, определяемых соотношением (3), исходная задача (1), (2) сводится к следующей

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0 \tag{4}$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered} U\big(\ell_1(\tau),\tau\big) = 0; \quad U_\xi\big(\ell_2(\tau),\tau\big) = 0; \\ \big(\ell_1(\tau) \le \xi \le \ell_2(\tau)\big). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь τ, ξ безразмерное время $(\tau \ge 0)$ и безразмерная пространственная координата; $U(\xi,\tau) = u(x,t)$; $\ell_i(\tau)$ – законы движения границ.

Граничные условия (5) в переменных ξ, τ задаются на новых, вообще говоря, движущихся границах, положение которых зависит от двух функций φ и ψ. Так как φ и ψ произвольны, можно потребовать, чтобы граничные условия записывались на неподвижных границах, т.е. $\ell_1 = \text{const}$ и $\ell_2 = \text{const}$; $\big(\ell_2 > \ell_1\big)$.

Для этого необходимо, чтобы φ и ψ удовлетворяли системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi\big(\tau + \ell_1(\tau)\big) - \psi\big(\tau - \ell_1(\tau)\big) = \ell_1; \\ \varphi\big(\tau + \ell_2(\tau)\big) - \psi\big(\tau - \ell_2(\tau)\big) = \ell_2, \end{cases} \tag{6}$$

которые однозначно определяют функции φ и ψ через известные законы движения границ. При движении границ со скоростью большей скорости распространения волн решение волнового уравнения становится некорректным, поэтому на скорость движения границ накладывается ограничение $\big|\ell_i'(\tau)\big| < 1$. Постоянные ℓ_i могут быть произвольными, но не равными величинами (например, $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$). Тогда система (6) примет вид:

$$\begin{cases} \varphi\big(\tau + \ell_1(\tau)\big) = \psi\big(\tau - \ell_1(\tau)\big); \\ \varphi\big(\tau + \ell_2(\tau)\big) = \psi\big(\tau - \ell_2(\tau)\big) + 1. \end{cases} \tag{7}$$

Существование решения данной системы было доказано в работе [5].

Решение (4), (5) находится методом Фурье [24]:

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\omega_{0n}\xi\right)\left(D_n\cos\left(\omega_{0n}\tau\right)+E_n\sin\left(\omega_{0n}\tau\right)\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}r_n\left\{\sin\left(\omega_{0n}(\tau+\xi)+\alpha_n\right)-\sin\left(\omega_{0n}(\tau-\xi)+\alpha_n\right)\right\}, \quad (8)$$

где $\omega_{0n}\big(\varepsilon_0\tau\big)=\dfrac{\pi n}{\ell_2-\ell_1}$; $r_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{D_n^2+E_n^2}$; $\alpha_n=\operatorname{arctg}\big(E_n/D_n\big)$.

Решение, полученное в работах [1–6, 8–10] имеет вид, аналогичный (8).

Возвращаясь к переменным x и t, получим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}r_n\left\{\sin\left(\omega_{0n}\varphi(t+x)+\alpha_n\right)-\sin\left(\omega_{0n}\psi(t-x)+\alpha_n\right)\right\}. \quad (9)$$

Здесь φ и ψ находятся из решений системы функциональных уравнений (7) по известным законам движения границ, а постоянные D_n, E_n определяются из начальных условий.

Решить систему (7), вообще говоря, нелегко. При ее решении возможны два различных подхода:

– обратная задача [5, 6, 8, 9, 18, 22, 23], т.е. по заданным «фазам» собственных колебаний φ и ψ нахождение законов движения границ $\ell_i(\tau)$;

– прямая задача [17, 22], т.е. нахождение «фаз» собственных колебаний по заданным законам движения границ $\ell_i(\tau)$.

3. Решение обратной задачи

Для решения системы (7) А. И. Весницким [5] был использован обратный метод, т.е. по заданным $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из получающейся системы уравнений находятся законы движения границ $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$. При решении обратной задачи уравнения системы (7) сводятся к исследованию алгебраических или трансцендентных уравнений относительно $\ell_i(\tau)$, которые во многих случаях допускают точные решения. На основе обратной задачи Весницким А. И. и Потаповым А. И. [5, 6] были получены решения для достаточно широкого круга законов движения границ.

Система (7) имеет бесконечно много решений, так как на интервале $[0,1]$ функция $\varphi(z)$ и на интервале $[-1,0]$ функция $\psi(z)$ могут задаваться произвольно и с помощью метода последовательных приближений [24] находятся значения функций в других областях. Нам же достаточно найти одно частное решение, определяющее взаимно-однозначное соответствие точек z и точек $y_1=\varphi(z)$; $y_1=\varphi(z)$. Из всех решений нас интересуют только монотонные, а монотонные решения в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн $\big(\big|\ell_1'(\tau)\big|<1;\big|\ell_2'(\tau)\big|<1\big)$ могут быть только монотонно возрастающими.

Лемма. Если функция $\varphi(z)$ – монотонно возрастающая (убывающая), то функция $\psi(z)$ – также монотонно возрастающая (убывающая).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из первого уравнения системы (7) при $\tau=\tau_0$

$$\varphi\left(\tau_0+\ell_1(\tau_0)\right)=\psi\left(\tau_0-\ell_1(\tau_0)\right).$$

Теперь предположим, что $\tau_1>\tau_0$ и функция $\varphi(z)$ возрастает (убывает), тогда в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн $\big(\big|\ell_1'(\tau)\big|<1;\big|\ell_2'(\tau)\big|<1\big)$ будем иметь:

$$\tau_1+\ell_1\big(\tau_1\big)>\tau_0+\ell_1\big(\tau_0\big);$$
$$\tau_1-\ell_1\big(\tau_1\big)>\tau_0-\ell_1\big(\tau_0\big).$$

Поскольку функция $\varphi(z)$ в данном случае возрастает (убывает), то для выполнения первого равенства системы (7) при $\tau = \tau_1$ необходимо, чтобы возрастала (убывала) функция $\psi(z)$, т.е. функция $\psi(z)$ – также возрастающая (убывающая).

Покажем также, что монотонное решение системы (7) в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн может быть только возрастающим.

Действительно, учитывая неравенство $\ell_1(\tau) < \ell_2(\tau)$ получим:

$$\tau + \ell_1(\tau) < \tau + \ell_2(\tau); \quad \tau - \ell_1(\tau) > \tau - \ell_2(\tau).$$

Предположим, что $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ убывают, тогда можно записать:

$$\varphi\big(\tau + \ell_2(\tau)\big) < \phi\big(\tau + \ell_1(\tau)\big) = \psi\big(\tau - \ell_1(\tau)\big) < \psi\big(\tau - \ell_2(\tau)\big).$$

Однако данное неравенство противоречит второму уравнению системы (7). Следовательно, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть только монотонно возрастающими. Лемма 3 доказана.

Заметим, что из системы (7) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются с точностью до константы в том смысле, что если $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ решение системы (7), то $\varphi(z) + C$ и $\psi(z) + C$ также являются решением (здесь C – произвольная постоянная). Поэтому для определенности можно выбрать такую функцию $\psi(z)$, что $\psi(-1) = -1$. При этом из второго уравнения системы (7) при $\tau = 0$ следует, что $\varphi(1) = 0$. Из первого уравнения системы (7) при $\tau = 0$ получим

$$\phi(0) = \psi(0).$$

При задании функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$ от величин этих констант позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям:

$$\ell_1(0) = 0; \quad \ell_2(0) = 1; \quad \psi(-1) = -1.$$

Множество полученных законов движения границ разбито на классы.

1. Решения, приведенные в таблице 1, относятся к классу А, когда левая граница неподвижна и $\phi(z) = \psi(z)$. Решения под номерами 1, 2, 3, 6, получены А. И. Весницким и А. И. Потаповым [5, 6], решения 4, 5, 7 получены впервые.

2. Следующий класс В определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$\ell_1(\tau) = \ell(\tau); \quad \ell_2(\tau) = 1 + \ell(\tau); \quad \ell(0) = 0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением:

$$\varphi\big(\bar{\varphi}(\psi(z)) + 1\big) - \psi(z - 1) = 1. \tag{10}$$

Система (7) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (10). Приведем два ранее не известных решения класса В:

1) $\ell = v\tau$; $\varphi(z) = (1 - v)z/2 + (1 + v)/2 - 1$; $\psi(z) = (1 + v)z/2 + (1 + v)/2 - 1$;

2) $\ell(\tau) = \dfrac{1}{\alpha} \ln\left[\big(Be^{-\alpha\tau} - Ce^{\alpha\tau}\big)/(B - C)\right]$; $\varphi(z) = B\big(e^{-\alpha z} - 1\big) - C\big(e^{-\alpha} - 1\big) - 1$;
$B = C + 1/\big(e^{-\alpha} - 1\big)$; $\psi(z) = C\big(e^{\alpha z} - 1\big) - C\big(e^{-\alpha} - 1\big) - 1$.

Таблица 1. Решения, относящиеся к классу А.

№	$l_2(\tau)$	$\varphi(z)=\psi(z)$
1	$v\tau+1$	$\dfrac{\mathrm{Ln}\big[(vz+1)/(1-v)\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+v)/(1-v)\big]}-1$
2	$\sqrt{B\tau+B^2}/\lvert B\rvert$	$\sqrt{Bz+B+0,25}-\sqrt{B^2-B+0,25}-1$
3	$1/(4B\tau+1)$	$Bz^2+0,5z-B-0,5$
4	$\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{arcsh}\left[\dfrac{0,5}{B_1e^{\alpha\tau}-B_2e^{-\alpha\tau}}\right]$	$B_1\big(e^{\alpha z}-e^{-\alpha}\big)+B_2\big(e^{-\alpha z}-e^{\alpha}\big)-1,$ $B_1=B_2+1/\big(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\big),\ \alpha>0$
5	$\sqrt{(\tau+B)^2\big(\alpha^2-1\big)+1+2\alpha B+B^2}-\alpha(\tau+B)$	$\dfrac{\mathrm{Ln}\big[(z+B)^2+1+2\alpha B+B^2\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+\alpha)/(1-\alpha)\big]}-$ $\dfrac{\mathrm{Ln}\big[(B-1)^2+1+2\alpha B+B^2\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+\alpha)/(1-\alpha)\big]}-1$
6	$\dfrac{1}{\alpha}\left[-d+\sqrt{1+d^2+(\alpha\tau+B)^2}\right],$ $d=\dfrac{1+B^2-\alpha^2}{2\alpha}$	$\dfrac{\mathrm{arctg}(\alpha z+B)}{\mathrm{arcctg}\left[\big(1+B^2-\alpha^2\big)/(2\alpha)\right]}-$ $\dfrac{\mathrm{arctg}(B-\alpha)}{\mathrm{arcctg}\left[\big(1+B^2-\alpha^2\big)/(2\alpha)\right]}-1$
7	$\dfrac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1+4A^2e^{2\alpha\tau}}}{2A}\right)-\tau$	$Ae^{\alpha z}+B,\ \alpha=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+4A^2}}{2A}$

3. Для решений класса C границы движутся симметрично в разные стороны, т.е.

$$\ell_1(\tau)=-\ell(\tau);\quad \ell_2(\tau)=\ell(\tau).$$

Уравнение взаимосвязи функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ здесь имеет вид:

$$\varphi(z)=\psi(z)+0,5.$$

Решения класса C получаются из решений класса A по следующим формулам:

$$\ell(\tau)=\ell_A(\tau);\quad \psi(z)=\frac{1}{2}\psi_A(z);\quad \varphi(z)=\psi(z)+0,5,$$

где с индексом A обозначены соответствующие функции решений класса A.

4. Решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$\ell_1(\tau)=\big(B_2-B_1\big)\tau/\big(B_2+B_1\big);\quad \ell_2(\tau)=\big(B_2e^{1/c}-B_1\big)\tau/\big(B_1+B_2e^{1/c}\big)+1;$$
$$\varphi(z)=C\mathrm{Ln}\big(B_1z+D\big)-C\mathrm{Ln}\big(D-B_2\big)-1;$$
$$\psi(z)=C\mathrm{Ln}\big(B_1z+D\big)-C\mathrm{Ln}\big(D-B_2\big)-1;$$
$$D=\big(B_1+B_2e^{1/c}\big)/\big(e^{1/c}-1\big).$$

Решение под номером один в таблице 1 может быть использовано при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске) [1, 4, 11–15, 21]. Приведенные решения класса B могут быть использованы при изучении колебаний гибких звеньев передач [16, 19, 20]. Остальные решения являются модельными.

Класс обратных решений ограничен, например, не получено решение для равноускоренного движения границы $l(\tau)=1+v\tau^2$. Получение указанного решения актуально при описании продольных и поперечных колебаний канатов грузоподъемных установок на стадии разгона [1].

4. Решение прямой задачи

Решение прямой задачи, как правило, сталкивается с большими трудностями, т.к. известные методы решения функциональных уравнений хотя и позволяют иногда находить φ и ψ по известным $\ell_i(\tau)$, но в ограниченном интервале значений аргумента и в виде, мало пригодном для аналитического исследования.

В связи с этим рассмотрим приближенное решение функционального уравнения

$$\varphi\big(\tau + l(\tau)\big) - \varphi\big(\tau - l(\tau)\big) = 1. \tag{11}$$

Для приближенного решения уравнения (11) предлагается использовать асимптотический метод [17].

При неподвижных границах $\ell(\tau) = \ell$ решением (11) является линейная функция

$$\varphi_s(z) = \frac{1}{2\ell}z + \text{const}.$$

В случае медленного движения границы $\ell(\tau)$ «фаза» волны $\varphi(z)$ за время ее пробега через систему изменяется незначительно относительно $\varphi_s(z)$. Предполагается, что $\varphi(z)$ имеет производные любого порядка, и записывая $\varphi\big(\tau+\ell(\tau)\big)$ в виде степенных рядов по $\ell(\tau)$, после их подстановки в (1) получим дифференциальное уравнение для медленно изменяющейся «фазы» $\varphi(\tau)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{d^{k+1}\varphi}{d\tau^{k+1}} = 1. \tag{12}$$

Так как $\varphi(\tau)$ мало отклоняется от линейного закона φ_s $(z = \tau)$ за время пробега волны, то каждый следующий член в левой части уравнения (12) много меньше предыдущего и его решение нужно искать в виде ряда

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12) и приравнивая члены одинакового порядка малости по отдельности к нулю, получим для нулевого приближения

$$\varphi_0(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau} \frac{\partial t}{\ell(t)}.$$

В случае линейного закона движения границы $\ell(t) = 1 + v\tau$ фаза динамических собственных колебаний равна

$$\varphi(z) = \frac{\ln\big[(vz+1)/(1+v)\big]}{2v}. \tag{14}$$

Значения (14) сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения (таблица 1):

$$\varphi(z) = \frac{\mathrm{Ln}\big[(vz+1)/(1-v)\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+v)/(1-v)\big]} - 1. \tag{15}$$

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы v приведены в таблице 2.

В интервале $v \in [0,1; 0,6]$ погрешности приближенного метода малы. Увеличение погрешности при приближении v к единице объясняется тем, что функция (15) при $v \to 1$ становится бесконечно большой.

Незначительные погрешности позволяют применять описанный метод для решения функционального уравнения (11) в случаях, когда его точное решение не известно.

Таблица 2. Погрешность асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы.

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Δ	0,002	0,006	0,013	0,023	0,036	0,053	0,073	0,100	0,139

5. Заключение

С помощью аналитического метода замены переменных, исходная краевая задача сведена к системе функционально – разностных уравнений. Решение исходной задачи зависит от того, возможно ли решить данную систему (7). Весницкий А. И. предложил решать её обратным методом, т.е. задавать функции φ и ψ и из получившейся системы уравнений находить законы движения границ. В работе приведены пять новых обратных решений системы.

Рассмотрен приближенный асимптотический метод решения функциональных уравнений системы (7). В условиях медленного движения границ незначительные погрешности позволяют применять указанный метод в случаях, когда точное решение системы функциональных уравнений не известно.

Приведенные решения могут быть использованы при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске), гибких звеньев передач (например, ременная передача) и т.д.

Литература

1. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев, Наук. думка, 1962. 332 с.

2. Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 26. Выпуск 3. С. 77–80.

3. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». 2009. № 1(18). С. 149–158.

4. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев, Наук. думка. 1971. 270 с.

5. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М., Физматлит. 2001. 320 с.

6. Весницкий А.И. Обратная задача для одномерного резонатора изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 10. С. 1538–1542.

7. Барсуков К.А., Григорян Г.А. К теории волновода с подвижными границами // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 2. С. 280–285.

8. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами. Самара, Самар. гос. техн. ун-т. 2017. 149 с.

9. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с

движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2012. № 3(28). С. 145–151.

10. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159–161.
11. Колосов Л.В., Жигула Т.И. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. Вузов. Горный журнал. 1981. № 3. С. 83–86.
12. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. 2006. No. 1. pp. 66–78.
13. Shi Y., Wu L., Wang Y. Nonlinear analysis of natural frequencies of a cable system // J. Vibr. Eng. 2006. No. 2. pp. 173–178.
14. Wang L. Zhao Multiple internal resonances and non–planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vib. 2009. No. 1–2. pp. 1–14.
15. Zhao Y., Wang L. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three–to one internal resonance // J. Sound Vib. 2006. No. 4–5. pp. 1073–1093.
16. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 4. С. 161–165.
17. Литвинов В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 1. С. 83–88.
18. Литвинов В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15. № 3. С. 112–119.
19. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго–инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. 2013. № 6(70). С. 18–29.
20. Литвинов В.Л. Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. 2015. № 4(92). С. 29–33.
21. Литвинов В.Л. Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно–технического развития. 2016. № 1(101). С. 19–24.
22. Литвинов В.Л. Точное и приближенное решения задачи о колебаниях стержня переменной длины // Вестник научно–технического развития. 2017. № 9(121). С. 46–57.
23. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно–технического развития. 2016. № 2(102). С. 28–35
24. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высшая школа. 1970.
25. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Применение метода Канторовича–Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.

MSC2020 35R37, 35G30, 35Q70

About one method for replacing variables for a wavean equation describing vibrations of systems with moving boundaries

V. N. Anisimov, V. L. Litvinov
Syzran' Branch of Samara State Technical University

Abstract: An analytical method for solving the wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries is considered. By replacing variables that set boundaries and leave the equation invariant, the original boundary value problem is reduced to a system of functional – difference equations that can be solved using forward and reverse methods. The inverse method is described, which allows us to apply sufficiently diverse laws of boundary motion to the laws obtained from the solution of the inverse problem. New partial solutions for a fairly wide range of boundary motion laws are obtained. A direct asymptotic method for approximating the solution of a functional equation is considered. The errors of the approximate method are estimated depending on the speed of the border movement.

Keywords: wave equation, boundary value problems, oscillations of systems with moving boundaries, substitution of variables, laws of boundary motion, functional equations.

References

1. Savin G.N., Goroshko O.A. Dynamics of a thread of variable length. Kiev, Dumka, 1962, 332 pp. (in Russian).
2. Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for a wave equation in a one–dimensional space. Applied mathematics and mechanics. 1964, vol. 26, No 3. pp. 77–80. (in Russian).
3. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Investigation of resonant properties of mechanical objects with moving boundaries using the Kantorovich–Galerkin method // Bulletin of Samara state technical University. Ser. "Physical and mathematical Sciences 2009, 1(18). pp. 149–158. (in Russian).
4. Goroshko O.A., Savin G.N. Introduction to the mechanics of deformable one–dimensional bodies of variable length. Kiev, Dumka, 1971, 270 pp. (in Russian).
5. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads. Moscow, Fizmatlit, 2001, 320 pp. (in Russian).
6. Vesnitsky A.I. Inverse problem for a one–dimensional resonator changing its dimensions in time. Izv. vuzov. Radiophysics, 1971, vol. 10, pp. 1538–1542.
7. Barsukov K.A., Grigoryan G.A. On the theory of a waveguide with movable boundaries. Izv. higher educational. Radiophysics, 1976, vol. 2, pp. 280–285. (in Russian).
8. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and research of vibrations of one–dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph. Samara, Samar. state tech. university, 2017, 149 pp. (in Russian).

9. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. On a method for obtaining an analytical solution of a wave equation describing vibrations of systems with moving faces. Bulletin of the Samara state technical university. Ser. "Physical and mathematical Sciences 2012, 3(28), pp. 145–151. (in Russian).

10. Lezhneva A.A. Flexural vibrations of beams of variable length. Izv. USSR ACADEMY OF SCIENCES. Solid–body mechanics, 1970, 1, pp. 159–161. (in Russian).

11. Kolosov L.B., Zhigula T.I. Longitudinal and transverse vibrations of the rope string of the lifting installation. Izv. Higher educational. Gorny Zhurnal, 1981, 3, pp. 83–86. (in Russian).

12. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control. J. Vibr. Acoust, 2006, 1, pp. 66–78.

13. Shi Y., Wu L., Wang Y. Nonlinear analysis of natural frequencies of a cable system. J. Vibr. Eng., 2006, 2, pp. 73–178.

14. Wang L., Zhao Y. Multiple internal resonances and non–planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations. J. Sound Vib., 2009, 1–2, pp. 1–14.

15. Zhao Y., Wang L. On the symmetrical modal interaction of the suspended cable: three–to one in–ternal resonance. J. Sound Vib., 2006, 4–5, pp. 1073–1093.

16. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction. Proceedings of the Samara scientific center of the Russian Academy of Sciences, 2017, vol. 19, 4, pp. 161–165. (in Russian).

17. Litvinov V.L. Investigation of free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method. Middle Volga mathematical society, 2014, vol. 16, 1, pp. 83–88. (in Russian).

18. Litvinov V.L. Solving boundary value problems with moving boundaries using the method of replacing variables in a functional equation. Journal of the middle Volga mathematical society, 2013, vol. 15, 3, pp. 112–119. (in Russian).

19. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Investigation of wave processes in a one–dimensional system lying on an elastic–inertial base with a moving load. Bulletin of scientific and technical development, 2013, 6(70), pp. 18–29. (in Russian).

20. Litvinov V.L. Transverse vibrations of a viscoelastic rope lying on an elastic base, taking into account the influence of the resistance forces of the medium. Bulletin of scientific and technical development, 2015, 4(92), pp. 29–33. (in Russian).

21. Litvinov V.L. Longitudinal vibrations of a rope of variable length with a load at the end. Bulletin of scientific and technical development, 2016, 1(101), pp. 19–24. (in Russian).

22. Litvinov V.L. Exact and approximate solutions to the problem of vibrations of a rod of variable length. Bulletin of scientific and technical development, 2017, 9(121), pp. 46–57. (in Russian).

23. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Analytical method for solving a wave equation with a wide class of conditions on moving boundaries. Bulletin of scientific and technical development, 2016, 2(102), pp. 28–35. (in Russian).

24. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Equations in partial derivatives of mathematical physics. Moscow, Higher school, 1970. (in Russian).

25. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics, 2018, 2, pp. 70–77. (in Russian).