УДК 517.962.2

Оценки решений разностных аналогов систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Афиногентова Е.В.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Аннотация: В статье предложен метод построения оценок погрешности линеаризации нелинейной системы конечно-разностных уравнений с переменными коэффициентами в линейной части. Метод основан на дискретном аналоге второго метода Ляпунова. Результат может быть применим к исследованию устойчивости разностных схем решения систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: устойчивость, погрешность линеаризации, оценка, конечно-разностные уравнения.

1. Введение

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений приводят к необходимости изучения свойств решений систем конечно-разностных уравнений. Вопросы устойчивости разностных схем имеют непосредственное отношение к поведению решений таких систем. В статье рассматривается нелинейный дискретный процесс, описанный системой конечно-разностных уравнений. Исследование проводится с привлечением дискретного аналога второго метода Ляпунова [1] и следующей теоремы сравнения [2].

Теорема 1. *Пусть скалярная функция $R(k,u)$, определенная для всех $k \in N = \{0,1,2,...\}$ и $0 \le u < \infty$, является неубывающей по u для любого фиксированного k. Тогда, если $u(k)$ и $v(k)$ удовлетворяют отношениям*

$$v(k+1) \le R(k, v(k)),\ u(k+1) = R(k, u(k)),\ k \in N,$$

то выполняется неравенство

$$v(k) \le u(k),\ k \in N,\ \textit{при условии, что}\ v(k_0) \le u(k_0).$$

2. Основные результаты

Пусть дискретный процесс задан системой конечно-разностных уравнений

$$x(k+1) = A(k)x(k) + F(x(k)) + r(k),\ x(0) = x_0,\ k \in N, \tag{1}$$

где $A(k)$ — матрица размерности $n \times n$, $F(x(k))$ — n-мерная вектор-функция, $x(k),\ r(k)$ — n-мерные векторы,

$$||F(x(k))|| \le h||x(k)||^{\gamma},\ \gamma > 1,\ ||r(k)|| \le R < \infty \text{ при } ||x(k)|| \le \rho.$$

Здесь $||\cdot||$ — евклидова норма, $h > 0,\ \rho > 0$ — произвольное вещественное число.

Предполагается, что для линейной однородной системы при фиксированном s

$$\tilde{x}(k+1) = A(s)\tilde{x}(k), \ k \in N, \tag{2}$$

существует дискретная функция Ляпунова $V(x(k))$, удовлетворяющая неравенствам

а) $||x(k)|| \le V(x(k)) \le M||x(k)||, \ M > 1;$

б) $|V(x''(k)) - V(x'(k))| \le M||x''(k) - x'(k)||;$

в) $V(\tilde{x}(k+1)) - V(\tilde{x}(k)) \le -\chi V(\tilde{x}(k)), \ 0 < \chi < 1.$

В [2] для систем вида (2) приведены условия существования функций Ляпунова, удовлетворяющих оценкам а)–в).

Линеаризованный вариант системы (1) имеет вид

$$t(k+1) = A(k)t(k) + r(k), \ t(0) = x_0, \ k \in N. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon(k) = x(k) - t(k), \ k \in N$ есть погрешность линеаризации. Необходимо найти оценку нормы разности $\varepsilon(k), \ k \in N$ решений системы (1) и (3). Сначала оценим $||x(k)||, \ k \in N$.

Для системы (1) выберем функцию Ляпунова $V(x(k))$, удовлетворяющую условиям а)–в). Первая разность функции $V(x(k))$ на решениях системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} &V(A(k)x(k) + F(x(k)) + r(k)) - V(x(k)) \le \\ &\qquad \le -\chi V(x(k)) + M||A(k) - A(s)|| \cdot ||x(k)|| + Mh||x(k)||^\gamma + MB, \ k \in N. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ||A(i) - A(i-1)||$ сходящийся и сумма ряда равна $\sigma' > 0$. Тогда частичные суммы ряда не превышают σ'. Получим следующую оценку

$$\begin{aligned} &V(A(k)x(k) + F(x(k)) + r(k)) - V(x(k)) \le \\ &\le -\chi V(x(k)) + M\left(\sum_{i=1}^{k} ||A(i) - A(i-1)|| + ||A(s) - A(0)||\right)||x(k)|| + Mh||x(k)||^\gamma + MB \le \\ &\qquad \le -\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) V(x(k) + MhV^\gamma(x(k)) + MB, \ k \in N. \end{aligned}$$

Пусть

$$0 < \chi - M\left(\sigma' + ||A(s) - A(0)||\right) < 1. \tag{5}$$

Выполнение условия (5) гарантирует асимптотическую устойчивость линейного приближения системы (1).

Введем обозначение

$$V(x(k)) = v(k). \tag{6}$$

Тогда с учетом условия а) неравенство (4) приводится к виду

$$v(k+1) - v(k) \le -\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) v(k) + Mhv^\gamma(k) + MB.$$

По теореме 1 $v(k) \le u(k), \ k \in N$, где $u(k)$ – решение уравнения

$$u(k+1) - u(k) = -\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) u(k) + Mhu^\gamma(k) + MB \equiv \varphi(u(k)), \tag{7}$$

$$u(0) = v(0), \ k \in N.$$

Если уравнение $\varphi(u) = 0$ имеет решение при $u \ge 0$, то таких решений может быть не более двух, а, именно: $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$. Для определенности будем считать, что $0 \le u^{(1)} \le u^{(2)}$. Очевидно, что $\varphi(u) > 0$ при $0 < u < u^{(1)}$, $u > u^{(2)}$; $\varphi(u) < 0$ при $u^{(1)} < u < u^{(2)}$, и $u^{(1)}$

— асимптотически устойчивое, а $u^{(2)}$ — неустойчивое положения равновесия уравнения (7). Таким образом, если $M||x(0)|| \leq u^{(2)}$, то

$$||x(k)|| \leq \max\{M||x_0||, u^{(1)}\} \equiv \Delta, \ k \in N. \tag{8}$$

Перейдем к оценке нормы погрешности линеаризации $\varepsilon(k), \ k \in N$. Для $\varepsilon(k)$ справедлива система конечно-разностных уравнений

$$\varepsilon(k+1) = A(k)\varepsilon(k) + F(x(k)), \ \varepsilon(0) = 0, \ k \in N. \tag{9}$$

С учетом полученной выше оценки $||x(k)||$ для первой разности функции $V(\varepsilon(k))$ на решениях системы (9) выполняется неравенство

$$V(A(k)\varepsilon(k) + F(x(k)) - V(\varepsilon(k)) \leq -\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) V(\varepsilon(k)) + Mh\Delta^{\gamma}, \ k \in N. \tag{10}$$

Используя обозначение (6) для $V(\varepsilon(k))$, неравенство (10) запишем следующим образом

$$v(k+1) \leq (1 - \chi + M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||))v(k) + Mh\Delta^{\gamma}, \ k \in N.$$

Согласно теореме 1 $v(k) \leq u(k), \ k \in N$, где $u(k)$ — решение скалярного уравнения

$$u(k+1) = (1 - \chi + M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||))u(k) + Mh\Delta^{\gamma}, \ u(0) = v(0), \ k \in N. \tag{11}$$

Уравнение (11) равносильно уравнению

$$u(k) = Mh\Delta^{\gamma} \frac{1 - (1 - \chi + M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||))^k}{\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)}, \ u(0) = 0, \ k \in N. \tag{12}$$

В силу условия (5), из (12) следует, что $u(k) < \dfrac{Mh\Delta^{\gamma}}{\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)}, \ k \in N$. Отсюда получаем оценку для нормы погрешности линеаризации $\varepsilon(k)$

$$||\varepsilon(k)|| < \frac{Mh\Delta^{\gamma}}{\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)}, \ k \in N. \tag{13}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть для линейной системы (2) существует функция V, обладающая свойствами а)–в), ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ||A(i) - A(i-1)||$ сходящийся и имеет место условие (5), кроме того, уравнение*

$$-\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) u(k) + Mhu^{\gamma}(k) + MB = 0 \tag{14}$$

имеет решения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ такие, что $0 \leq u^{(1)} \leq u^{(2)}$, то при $k \in N$ справедливы оценки

1) $||x(k)|| \leq \max\{M||x_0||, u^{(1)}\} \equiv \Delta$;

2) $||\varepsilon(k)|| < \dfrac{Mh\Delta^{\gamma}}{\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)}$.

Рассмотрим задачу построения оценки погрешности линеаризации по части переменных.

Представляя вектор $x(k)$ в виде $x(k) = (y(k), z(k))$, где $y(k) = (y_i(k)) = (x_i(k))$, $i = 1, 2, ..., n_1$; $z(k) = (z_j(k)) = (x_j(k))$, $j = n_1 + 1, ..., n$, систему (1) запишем следующим образом

$$\begin{gathered} y(k+1) = P(k)y(k) + L(y(k), z(k)) + f(k), \\ z(k+1) = S(k)y(k) + Q(k)z(k) + D(y(k), z(k)) + g(k), \\ x(0) = x_0, \ k \in N. \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $P,\ S$ и Q — матрицы размерности $(n_1 \times n_1)$, $(n-n_1)\times n_1$ и $(n-n_1)\times(n-n_1)$ соответственно; $L(y(k),z(k))$, $D(y(k),z(k))$ — вектор-функции размерности n_1 и $(n-n_1)$ соответственно; $f(k)$ — n_1-мерный вектор, $g(k)$ — $(n-n_1)$-мерный вектор, удовлетворяющие соотношениям

$$||L(y(k),z(k))|| \le m||y(k)||^{\alpha},\ ||f(k)|| \le q < \infty,\ \alpha > 1,\ q > 0, m > 0;$$

$$||D(y(k),z(k))|| \le d||y(k)||^{\beta},\ ||g(k)|| \le p < \infty,\ \beta > 1,\ d > 0, p > 0.$$

Оценим норму погрешности линеаризации $\varepsilon_y(k) = y(k) - \eta(k)$, $\varepsilon_z = z(k) - \nu(k),\ k \in N$, где $\eta(k)$ и $\nu(k)$ — решения системы

$$\eta(k+1) = P(k)\eta(k) + f(k),$$

$$\nu(k+1) = S(k)\eta(k) + Q(k)\nu(k) + g(k),\ \tau(k) = (\eta(k),\nu(k)),\ \tau(0) = x_0,\ k \in N.$$

Пусть для линейной системы при фиксированном s

$$\begin{gathered} \tilde{y}(k+1) = P(s)\tilde{y}(k), \\ \tilde{z}(k+1) = S(s)\tilde{y}(k) + Q(s)\tilde{z}(k),\ k \in N, \end{gathered} \tag{16}$$

существует дискретная функция Ляпунова $\tilde{V}(x(k))$, удовлетворяющая неравенствам

а$'$) $||y(k)|| \le \tilde{V}(x(k)) \le \mu(||y(k)|| + ||z(k)||),\ \mu > 1;$

б$'$) $|\tilde{V}(x''(k)) - \tilde{V}(x'(k))| \le \mu(||y''(k) - y'(k)|| + ||z''(k) - z'(k)||);$

в$'$) $\tilde{V}(A\tilde{x}(k)) - \tilde{V}(\tilde{x}(k)) \le -\theta\tilde{V}(\tilde{x}(k)),\ 0 < \theta < 1,\ \tilde{x}(k) = (\tilde{y}(k),\tilde{z}(k)).$

Потребуем, чтобы ряды были сходящимися и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ||P(i+1) - P(i)|| = \sigma_1,\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} ||S(i+1) - S(i)|| = \sigma_2,\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} ||Q(i+1) - Q(i)|| = \sigma_3$. В силу сделанных выше предположений для первой разности функции $V(x(k))$ на решениях системы (15) справедливо неравенство

$$\tilde{V}(x(k+1)) - \tilde{V}(x(k)) \le -(\theta - \vartheta)\tilde{V}(x(k)) + \mu m||y(k)||^{\alpha} + \mu d||y(k)||^{\beta} + \mu(p+q),$$

где

$$\vartheta = \mu\left(||P(s) - P(0)|| + ||S(s) - S(0)|| + ||Q(s) - Q(0)|| + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right).$$

Пусть $0 < \theta - \vartheta < 1$. После введения обозначения $\tilde{V}(x(k)) ::= \tilde{v}(k)$

$$\tilde{v}(k+1) - \tilde{v}(k) \le -(\theta - \vartheta)\tilde{v}(k) + \mu m\tilde{v}^{\alpha}(k) + \mu d\tilde{v}^{\beta}(k) + \mu(p+q).$$

По теореме 1 $\tilde{v}(k) \le w(k),\ k \in N$, где $w(k)$ — решение уравнения

$$\begin{gathered} w(k+1) - w(k) = \\ = -(\theta - \vartheta)w(k) + \mu m w^{\alpha}(k) + \mu d w^{\beta}(k) + \mu(p+q) \equiv \psi(w(k)), \\ w(0) = v(0),\ k \in N. \end{gathered} \tag{17}$$

Если уравнение $\psi(w) = 0$ имеет решение в области $w \ge 0$, то таких решений может быть не более двух. Обозначим их через $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ так, чтобы $0 \le w^{(1)} \le w^{(2)}$. Очевидно, что

$$\psi(w) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < w < w^{(1)},\ w > w^{(2)};$$

$$\psi(w) < 0 \quad \text{при} \quad w^{(1)} < w < w^{(2)};$$

или

$$w(k+1) > w(k) \quad \text{при} \quad 0 < w < w^{(1)},\ w > w^{(2)};$$

$$w(k+1) < w(k) \quad \text{при} \quad w^{(1)} < w < w^{(2)}.$$

Значит, если $0 < w(0) < w^{(1)}$ или $w^{(1)} < w(0) < w^{(2)}$, то $w(k) \to w^{(1)}$ при $k \to \infty$, а если $w(0) > w^{(2)}$, то $w(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Следовательно, $w^{(1)}$ — точка асимптотически устойчивого, а $w^{(2)}$ — точка неустойчивого положения равновесия для уравнения (17).

Таким образом, если $\mu||x(0)|| \le w^{(2)}$, то справедлива оценка

$$||y(k)|| \le \max\{\mu||x(0)||, w^{(1)}\} \equiv \delta. \tag{18}$$

Перейдем к оценке нормы погрешности линеаризации $\varepsilon(k)$. Вектор $\varepsilon(k)$ есть решение системы

$$\begin{gathered} \varepsilon_y(k+1) = P(k)\varepsilon_y(k) + L(y(k), z(k)), \\ \varepsilon_z(k+1) = S(k)\varepsilon_y(k) + Q(k)\varepsilon_z(k) + D(y(k), z(k)), \\ \varepsilon(k) = (\varepsilon_y(k), \varepsilon_z(k)),\ \varepsilon(0) = 0,\ k \in N. \end{gathered} \tag{19}$$

Оценим первую разность функции $\tilde{V}$ на решениях системы (19), принимая во внимание полученную оценку (18) для $||y(k)||$,

$$\tilde{V}(\varepsilon(k+1)) - \tilde{V}(\varepsilon(k)) \le -(\theta - \vartheta)\tilde{V}(\varepsilon(k)) + \mu(m\delta^\alpha + d\delta^\beta). \tag{20}$$

Применяя обозначение $\tilde{V}(x(k)) ::= \tilde{v}(k)$, перепишем неравенство (20)

$$\tilde{v}(k+1) - \tilde{v}(k) \le -(\theta - \vartheta)\tilde{v}(k) + \mu(m\delta^\alpha + d\delta^\beta),\ k \in N.$$

По теореме 1 $\tilde{v}(k) \le w(k),\ k \in N$, где $w(k)$ — решение уравнения

$$w(k+1) = (1 - \theta + \vartheta)w(k) + \mu(m\delta^\alpha + d\delta^\beta),\ w(0) = v(0),\ k \in N. \tag{21}$$

Уравнение (21) равносильно уравнению

$$w(k) = \mu(m\delta^\alpha + d\delta^\beta)\frac{1 - (1 - \theta + \vartheta)^k}{\theta - \vartheta},\ u(0) = 0,\ k \in N. \tag{22}$$

Поскольку $0 < \theta - \vartheta < 1$, то из (22) следует, что

$$||\varepsilon_y(k)|| \le w(k) \le \frac{\mu(m\delta^\alpha + d\delta^\beta)}{\theta - \vartheta} \equiv \sigma,\ k \in N. \tag{23}$$

Все выше изложенное сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Если для линейной системы (16) выполнены условия $a')$–$в')$ и уравнение*

$$-(\theta - \vartheta)w + \mu m w^\alpha + \mu d w^\beta + \mu(p + q) = 0 \tag{24}$$

в области $w \ge 0$ имеет решения $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ такие, что $0 \le w^{(1)} \le w^{(2)}$ и $\mu||x(0)|| \le w^{(2)}$, то при $k \in N$ справедливы оценки

$$||y(k)|| \le \delta,\ ||\varepsilon_y(k)|| \le \sigma,$$

где

$$\delta = \max\{\mu||x(0)||, w^{(1)}\}, \sigma = \frac{\mu(m\delta^\alpha + d\delta^\beta)}{\theta}.$$

Результат работы является обобщением метода построения оценок погрешности линеаризации, предложенного в [3], на случай систем с переменными коэффициентами в линейной части.

Литература

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М: Мир, 1971.

2. Sugiyama S. Difference inequalities and their applications to stability problems //Lect. Notes Math. 1971. № 243. 1–15. URL: https://doi.org/10.1007/BFb0058714

3. Афиногентова Е.В., Щенников В.Н. Построение оценок погрешности линеаризации систем конечно-разностных уравнений // Изв. вузов. Матем. 2002. № 8. 75–78. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm1061

MSC2010 39A22

The estimates for solutions of difference analogues of systems of differential equations with variable coefficients

E.V. Afinogentova[1]

National Research Mordovia State University[1]

,

Abstract: The paper proposes a method for constructing error estimates of linearization of a nonlinear system of finite-difference equations with variable coefficients in the linear part. The method is based on a discrete analogue of the second Lyapunov method. The result can be applied to the study of stability of difference schemes for solving systems of differential equations.

Keywords: stability, linearization error, estimation, finite difference equations.

References

1. Halanay A., Veksler D. Qualitative theory of impulse systems. Mir Publ., Moscow. 1971. 310 p. (In Russ.)

2. Sugiyama S. Difference inequalities and their applications to stability problems // Lect. Notes Math. 1971. No. 243. P. 1-15. URL: https://doi.org/10.1007/BFb0058714

3. Afinogentova E.V., Shchennikov V.N. Construction of error estimates for the linearization of finite-difference equations // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2002. 8. P. 75-78. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm1061 (In Russ.)