

УДК 517.958:531.12; 534.11

Колебания кабеля на участке наложения на него ИЗОЛЯЦИИ

Анисимов В.Н.¹, Корпен И.В.¹, Косинова С.Н.¹, Литвинов В.Л.¹

Самарский государственный технический университет, филиал в г.Сызрани¹

Аннотация: В статье исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Модель учитывает натяжение кабеля, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды. Объект принадлежит к широкому кругу одномерных колеблющихся объектов с движущимися границами. Наличие движущихся границ затрудняет описание таких объектов. В статье при помощи метода Галеркина получено алгебраическое уравнение четвертого порядка, позволяющее получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Полученные результаты исследований могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологических установок по изготовлению кабелей.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, резонансные свойства, колебания кабеля, собственные частоты.

1. Введение

В статье исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъемных установок [2], [6], [8], гибкие звенья передач [1], [6], лентопротяжные механизмы [7], конвейеры [2], [6] и т.д. Наличие движущихся границ существенно осложняет математическое описание таких объектов, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

2. Постановка задачи

Схема технологической установки по изготовлению кабелей изображена на рис. 1. Здесь в точке через круглое отверстие в разжиженном виде выдавливается изоляционная масса 3, которая накладывается на протягиваемую через отверстие жилу 4. Кабель 2 охлаждается в водяной ванне 1 и наматывается на катушку 5.

Особенность задачи заключается в том, что изгибная жесткость кабеля изменяется по длине. Скорость волн, бегущих из точки $x = 0$ в точку $x = l_0$, уменьшается, так как уменьшается жесткость струны, поэтому волны концентрируются с приближением к точке $x = l_0$. Кроме того, эти волны бегут относительно среды с меньшей скоростью, и среда этим волнам, как указывается в статье [1], оказывает меньшее сопротивление, чем волнам, бегущим в обратном направлении. Указанные факты могут привести к большим амплитудам колебаний вблизи точки $x = l_0$, что нежелательно. Чтобы предотвратить это, необходимо знать собственные частоты колебаний рассматриваемой системы.

Задачу по определению собственных частот поставим следующим образом:

$$TU_{xx}(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}[C(x - v_0t)U_{xx}(x, t)] - \rho U_{tt}(x, t) - \lambda U_t(x, t) - RU_x(x, t) = 0; \quad (1)$$

$$U(v_0t, t) = 0; U(v_0t + l_0, t) = 0; U_x(v_0t, t) = 0; U_x(v_0t + l_0, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь λ, R – коэффициенты, учитывающие сопротивление воды; $C(x - v_0t)$ – функция, характеризующая изгибную жесткость кабеля; v_0 – скорость продольного движения кабеля, T – сила натяжения кабеля, ρ – масса единицы длины кабеля.

Если принять

$$R = \lambda v_0, \quad (3)$$

то на волну $U = \phi(x - v_0t)$, бегущую со скоростью v_0 и, следовательно, покоящуюся относительно воды, силы сопротивления не действуют ($F_c = \lambda U_t + R U_x = 0$), что соответствует действительности.

Введем новые переменные $\zeta = x - v_0t$; $t = t$; $V(\zeta, t) = U(x, t)$. После преобразований, с учетом (3), получим задачу с условиями, заданными на неподвижной границе:

$$(a^2 - v_0^2)V_{\zeta\zeta}(\zeta, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [C(\zeta)V_{\zeta\zeta}(\zeta, t)] + 2v_0V_{\zeta t}(\zeta, t) - V_{\zeta\zeta}(\zeta, t) - \frac{\lambda}{\rho}V_t(\zeta, t) = 0;$$

$$V(0, t) = 0; V(l_0, t) = 0; V_{\zeta}(0, t) = 0; V_{\zeta}(l_0, t) = 0.$$

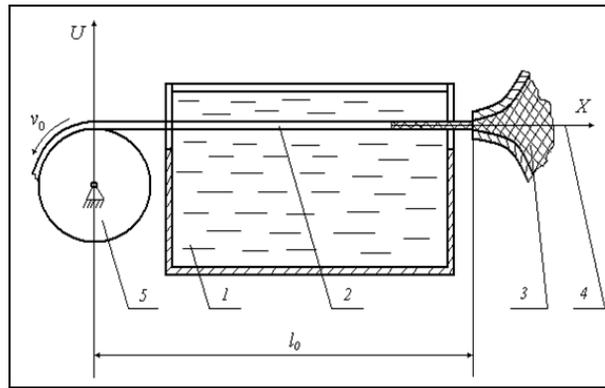


Рис. 1. Схема технологической установки по изготовлению кабелей.

Здесь a – скорость распространения колебаний. Примем зависимость жесткости от ζ линейной: $C(\zeta) = d - b\zeta$. Введем в задачу безразмерные переменные: $\xi = \frac{\zeta}{l_0} - 0,5$; $\tau = \frac{at}{l_0}$; $Z(\xi, \tau) = V(\zeta, t)$.

Окончательная постановка задачи примет вид

$$r\xi Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \gamma Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + 2r Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + (1 - v^2)Z_{\xi\xi}(\xi, \tau) + 2vZ_{\xi\tau}(\xi, \tau) - Z_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \beta Z_{\tau}(\xi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$Z(-0,5; \tau) = 0; Z(0,5; \tau) = 0; Z_{\xi}(-0,5; \tau) = 0; Z_{\xi}(0,5; \tau) = 0, \quad (5)$$

где

$$r = \frac{b}{\rho l_0 a^2}; \gamma = \frac{0,5b}{\rho l_0 a^2} - \frac{d}{\rho l_0^2 a^2}; v = \frac{v_0}{a}; \beta = \frac{\lambda l_0}{\rho a}.$$

Безразмерные параметры характеризуют: v – скорость продольного движения; r, γ – переменную изгибную жесткость; β – сопротивление внешней среды.

Изоляционная масса выдавливается в жидком виде, поэтому изгибную жесткость в точке $x = l_0$ можно принять равной нулю.

3. Решение задачи

Решение полученной задачи будем искать в виде произведения двух функций: $Z(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{Xt}$. Для $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$L[\mu(\xi)] = r\xi\mu''''(\xi) + \gamma\mu''''(\xi) + 2r\mu''''(\xi) + (1 - v^2)\mu''(\xi) + 2vW\mu'(\xi) - (W^2 + \beta W)\mu(\xi) = 0; \quad (6)$$

$$\mu(-0,5) = 0; \mu(0,5) = 0; \mu'(-0,5) = 0; \mu'(0,5) = 0. \quad (7)$$

Точно определить собственные частоты задачи (6), (7) довольно сложно, поэтому воспользуемся приближенным методом, основанным на методе Галеркина [4] – [6]. Решение задачи будем искать в виде

$$\mu(\xi) = A\varphi_1(\xi) + B\varphi_2(\xi),$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \xi^4 = 0,5\xi^2 + 0,0625; \varphi_2(\xi) = \xi^5 - 0,5\xi^3 + 0,0625\xi \quad (8)$$

– две линейно независимые функции (8) удовлетворяют граничным условиям (7) и являются ортогональными на интервале $(-0,5; 0,5)$.

При использовании метода Галеркина коэффициенты A и B следует определять из однородной системы

$$\begin{cases} A \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi + B \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi = 0; \\ A \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi + B \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi = 0. \end{cases}$$

Здесь оператор определяется выражением (6).

Приравняв нулю определитель системы, после преобразований получим уравнение собственных частот:

$$W^4 + 2\beta W^3 + W^2(\beta^2 - 4465\gamma - 12v^2 + 56) + W[56\beta(1 - v^2) - 4465\beta\gamma] + 1996855\gamma^2 - 69726\gamma(1 - v^2) + 528(1 - v^2)^2 - 128407r^2 = 0. \quad (9)$$

Данное уравнение позволяет определить две пары комплексно сопряженных корней:

$$W_1 = -\omega_{01} \pm i\omega_1; W_2 = \omega_{02} \pm i\omega_2.$$

Действительные части корней характеризуют затухание свободных колебаний. Мнимые части представляют собой первую и вторую собственные частоты системы.

Уравнение (9) решалось в среде MATLAB. В таблице приведены собственные частоты W_1 и W_2 в зависимости от параметров v и r при $\beta = 0,5$ и $\gamma = -0,5r$.

Анализ таблицы показывает, что частота колебаний (мнимая часть) увеличивается с увеличением r (характеризует изгибную жёсткость) и уменьшением v (характеризует скорость продольного движения). Действительные части корней, характеризующие затухание, от r и V зависят слабо.

Заметим, что если W_n безразмерная частота (задача (4), (5)), то частота реальной системы ω_n (задача (1), (2)) находится по формуле: $\omega_n = \frac{aW_n}{l_0}$.

Таблица 1. Зависимость собственной частоты колебаний кабеля от изгибной жёсткости и скорости продольного движения.

$r \setminus v$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	
0	-0,250+3,455i	-0,247+3,414i	-0,237+3,294i	-0,222+3,100i	-0,204+2,840i	W_1
	-0,250+6,629i	-0,253+6,641i	-0,263+6,674i	-0,278+6,722i	-0,297+6,775i	W_2
0,1	-0,253+6,641i	-0,250+5,560i	-0,250+5,508i	-0,250+5,420i	-0,240+5,300i	W_1
	-0,25+15,750i	-0,250+15,751i	-0,250+15,760i	-0,250+15,770i	-0,250+15,780i	W_2
0,2	-0,278+6,722i	-0,250+7,002i	-0,249+6,963i	-0,248+6,897i	-0,246+6,805i	W_1
	0,250+21,288i	-0,250+21,289i	-0,251+21,294i	-0,252+21,301i	-0,254+21,311i	W_2

4. Заключение

Рассмотренная математическая модель позволяет учесть широкий круг факторов, влияющих на колебания: продольное движение, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды, натяжение кабеля. Полученное уравнение собственных частот позволяет с использованием стандартных программных средств получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Полученные результаты могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологической установки по изготовлению кабелей.

Литература

1. Самарин Ю.П., Анисимов В. Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. Вузов. Машиностроение. 1986. № 12. С. 17–21.
2. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
3. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
4. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159–161.
5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.
6. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т. 2017. 149 с.
7. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». 2015. № 2 (19). С. 382–397.

8. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19, № 4. С. 161–165.
9. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2008. 358 с.
10. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей, описывающих колебания систем с движущимися границами // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (18 - 22 сентября 2017 г., Самара, Россия): в 2-х томах. Т.1. / под ред. Н.Ф. Морозова, А.В. Манжирова, В.П. Радченко. Самара: СамГТУ. 2017. С. 35–39.

MSC2010 35R37, 35G30, 35Q70

Cable oscillations on the section of the area of application of insulation

V.N. Anisimov¹, I.V. Korpen¹, S.N. Kosinova¹, V.L. Litvinov¹
Syzran' Branch of Samara State Technical University¹

Abstract: Researches the transverse vibrations of the cable in the area where the insulation is applied to it. The model takes into account the cable tension, variable bending stiffness, resistance of the external environment. The object belongs to a wide range of one-dimensional objects with moving boundaries. Moving boundaries complicate the description of such objects. In this paper, using the Galerkin method, a fourth-order algebraic equation is obtained, which makes it possible to obtain two first natural frequencies of cable oscillations. Results can be used to ensure reliable operation of the technological installation for the manufacture of cables.

Keywords: oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, resonant properties, cable oscillations, natural frequencies.

References

1. Samarin Yu.P., Anisimov V.N. Forced lateral vibrations of a flexible link during acceleration. *Izv. Universities. Engineering*, 1986. No. 12. P. 17-21.
2. Goroshko O. A., Savin G. N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Naukova Dumka, 1971. 270 p.
3. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries. M.: Fizmatlit, 2001. P.320.
4. Lezhneva A. A. Bending vibrations of a beam of variable length. *Izv. USSR Academy of Sciences. Solid Mechanics*, 1970. No. 1. P. 159–161.
5. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics*. 2018. No. 2. P. 70-77.

6. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and study of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph. Samar. state tech. univ, 2017. 149 p.
7. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical models of nonlinear longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries. Bulletin of the Samara State Technical University. Series "Physics and Mathematics". No. 2 (19). 2015. P. 382–397.
bibitemlitvinovBib8en Anisimov V.N., Litvinov V.L. Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction. Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19. No. 4. P.161-165.
8. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Calculation of natural frequencies of transverse vibrations of a viscoelastic rope moving in the longitudinal direction and having bending stiffness. Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation. Part 1: Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Samara: Samara State Technical University, 2008. 358 p.
9. Anisimov V.N., Litvinov V.L. A comparative analysis of linear and nonlinear models describing the oscillations of systems with moving boundaries. Materials of the X All-Russian Conference on the Mechanics of a Deformable Solid: in 2 volumes. V. 1. / ed. N.F. Morozova, A.V. Manzhirova, V.P. Radchenko. Samara: Samara State Technical University, 2017. P. 35–39.