УДК 517.958:519.632.4

Распространение тепла в безграничной среде с кусочно-непрерывными свойствами

Понкратова Ю.В.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Имеется безграничная сплошная среда с постоянной теплопроводностью λ_F. В ней находится одна частица с теплопроводностью λ_P. Она представляет собой круг (на плоскости) или шар (в пространстве) радиуса R. Центр частицы находится в начале координат. В среде создан градиент температуры, который далеко от частицы, постоянен и равен T_1 (рис. 1).

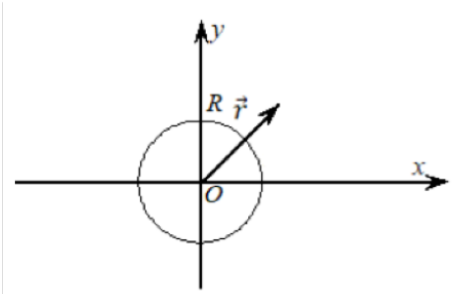

Рис. 1. Одиночная частица в среде с постоянным градиентом температуры.

Требуется получить распределение температуры, возникающее в жидкости и в частице.

Аналитическое решение такой задачи о сплошной среде с единичным включением на плоскости выглядит следующим образом [1]:

$$T_F = T_0 + T_1 x \left[1 + \frac{\lambda_P - \lambda_F}{\lambda_P + \lambda_F}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right], \quad (1)$$

$$T_P = T_0 + \frac{2\lambda_F}{\lambda_P + \lambda_F} T_1 x. \quad (2)$$

Более интересен случай, когда частиц в среде несколько. Но такие задачи решаются либо асимптотическими методами [2], либо численно, а значит, необходимо выявить источники погрешности расчетов и оценить эту погрешность. Сделаем это на примере одиночной частицы. Расчеты будем проводить в универсальной программе конечно-элементного анализа ANSYS.

В данной задаче необходимо найти стационарное распределение температуры, поэтому выбирается тип анализа Steady-State Thermal. Чтобы решить поставленную задачу в пакете ANSYS, нужно заменить бесконечную область на конечную. На плоскости внешняя область выбирается в форме квадрата со стороной H. Как следует из (1), (2), радиус частицы R не влияет на температуру T_P внутри частицы, а температура среды T_F зависит не от R, а от отношения R/r. Поэтому можно рассмотреть частицу в виде круга радиуса $R = 1$ м с центром в начале координат. Распределение температуры зависит не от самих теплопроводностей среды и частицы, а от их отношения. Поэтому можно считать, что $\lambda_F = 1$.

Далее будут рассматриваться возмущения T', вызванные частицей. Чтобы их найти, из аналитического решения (1) нужно вычесть выражение, соответствующее распределению температуры в случае однородной среды:

$$T' = T_F - (T_0 + T_1 x) = T_1 x \left[\frac{\lambda_P - \lambda_F}{\lambda_P + \lambda_F} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]. \qquad (3)$$

Для оценки точности численного метода будет рассмотрена относительная погрешность в определении T'.

Имеются три источника погрешности:

- погрешность, связанная с заменой бесконечной среды на конечную,
- погрешность метода конечных элементов (МКЭ), используемого при расчете в ANSYS,
- погрешность округления чисел в ЭВМ.

Из них основными являются первые два.

В системе ANSYS можно описать только ограниченную область, поэтому главная наша цель — это нахождение погрешности, связанной с заменой бесконечной среды на конечную. Однако вначале нужно оценить погрешность метода конечных элементов. При его использовании вблизи поверхности контакта «частица-среда» при всех расчетах выполнялось сгущение сетки с помощью инструмента Inflation.

Поскольку аналитическое решение (1) известно, то в качестве граничного условия можно задать точную температуру на границе квадрата. Тогда погрешность первого вида равна нулю и мы можем оценить погрешность МКЭ. Например, при $H = 80$ м и $\lambda_P = 10$ график относительной погрешности T' вдоль одной из прямых, проходящей по квадрату, показан на рис. 2.

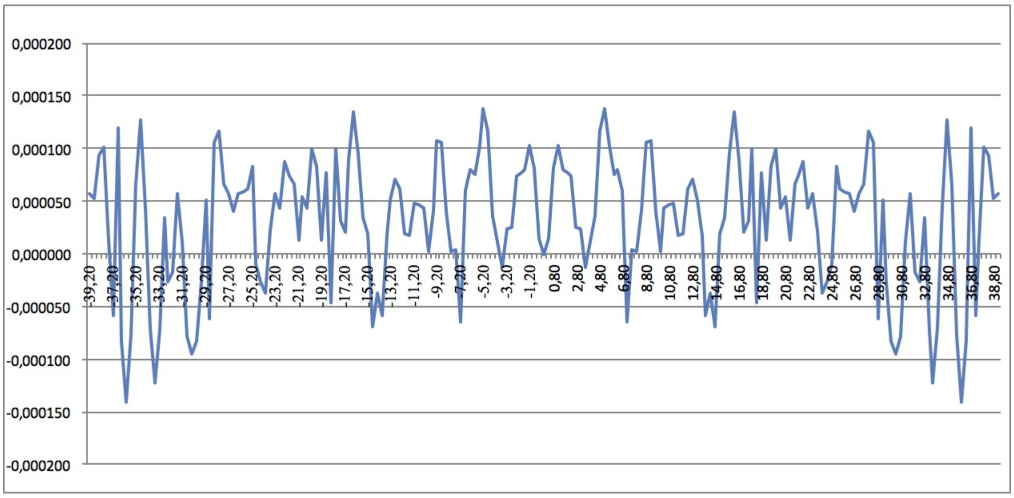

Рис. 2. Оценка погрешности МКЭ.

Если бы точное решение типа (1), (2) было неизвестно, то для описания градиента температуры на противоположных гранях области надо было бы задать постоянное значение температуры T_{left} и T_{right}. Тогда градиент температуры мог быть найден как

$$T_1 \approx \frac{(T_{right} - T_{left})}{H}.$$

Величина относительной погрешности T' вдоль различных прямых $y = const$ внутри квадрата со стороной $H = 20$ м приведена на рис. 3.

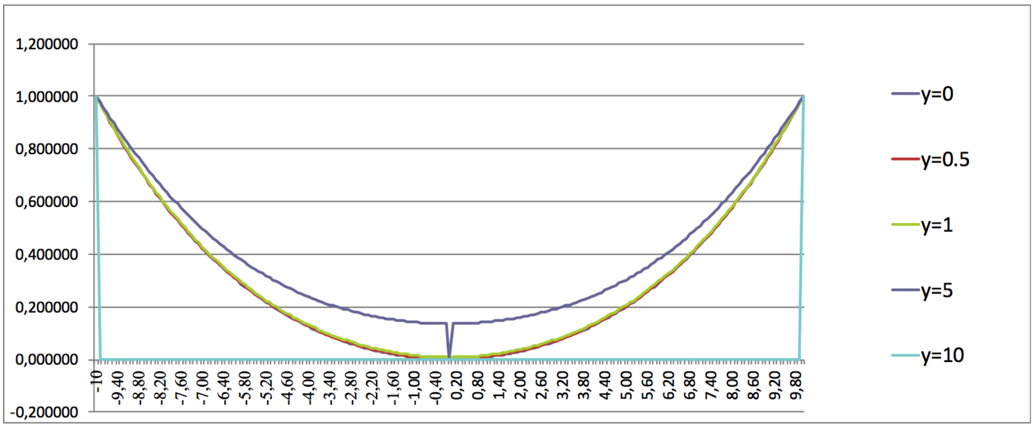

Рис. 3. Относительная погрешность вычислений.

В этих расчетах T_{left} и T_{right} подбирались так, чтобы выполнить равенство $T_1 \approx 5$.

Из него видно, что погрешность метода конечных элементов во много раз меньше погрешности, связанной с заменой бесконечной среды на конечную, то есть основным источником погрешности служит конечность расчетной области.

Кроме того, размер расчетной области должен быть в несколько раз больше той области, где необходимо обеспечить приемлемую погрешность. Например, при $H = 20$ м и $y = 0.5$ м относительная погрешность не превышает 0.05 только при $|x| < 2.5$ м.

Также выяснилось, что относительная погрешность возрастает при «сближении» теплопроводностей среды и частицы, т. е. при $\dfrac{\lambda_P}{\lambda_F} \to 1$.

При решении задачи в пространстве при тех же настройках, что и при решении задачи на плоскости, выбирается внешняя область в форме куба со стороной H и частица в форме шара радиуса R. Дальнейшее изучение погрешности аналогично рассмотренному на плоскости.

Полученные результаты в перспективе позволяют строить расчетные области для численного моделирования распределения температуры в среде с несколькими включениями.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. 3-е изд., перераб. М. : Наука, 1986. Т. 6 : Гидродинамика. 736 с.

2. Сыромясов А. О. Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4, ч. 3. С. 1158-1160.

MSC2010 35K05, 80A20, 80M10

The propagation of heat in an infinite medium with a piecewise continuous properties

Yu.V. Ponkratova[1]

National Research Ogarev Mordovia State University[1]