УДК 517.9

О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении*

Морозов А.Д.[1], Морозов К.Е.[1], Драгунов Т.Н.[1]

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[1]

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = \varepsilon f(x, y, t), \tag{1}$$

где $\alpha = \pm 1$, $f(x, y, t) = (p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 \sin t \sin \Omega t$, ε – малый параметр, p_1, p_2, Ω – параметры, причем Ω предполагается иррациональным. Тогда f является квазипериодической функцией по t с частотным базисом $(1, \Omega)$. Отметим, что возмущение является неконсервативным.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) допускает интеграл энергии $H(x, \dot{x}) = \dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{\alpha x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} = h$. Фазовое пространство невозмущенной системы при $\alpha = 1$ состоит из одной ячейки, заполненной замкнутыми фазовыми траекториями, а при $\alpha = 1$ — из трех ячеек, разделенных сепаратрисами седла, которые образуют гомоклиническую «восьмерку».

Глобальное исследование (1) при малых ε включает в себя установление глобальной динамики в областях, заполненных замкнутыми фазовыми траекториями и отделенных от сепаратрис и состояний равновесия, а также изучение поведения решений в малой окрестности «восьмерки» (при $\alpha = 1$) и в малых окрестностях центров. В первом случае устанавливается динамика в окрестностях индивидуальных (как резонансных, так и нерезонансных) уровней энергии невозмущенной системы (следуя [1]). Получены условия существования двумерных и трехмерных инвариантных торов. Рассматривается вопрос о прохождении трехмерного тора через резонансные зоны при вариации расстройки (следуя [2]). В силу ограниченности числа частично проходимых резонансов делается вывод о глобальной динамике в рассматриваемых областях.

При исследовании окрестности сепаратрисы получен аналог формулы Мельникова (в случае периодических возмущений см. [3]) для величины, определяющей расщепление сепаратрисных многообразий седлового решения. С ее помощью устанавливаются условия существования гомоклинических решений и квазиаттракторов, обсуждается вопрос сложной динамики. Теоретические результаты иллюстрируются при помощи компьютерного моделирования.

Литература

1. Morozov A.D., Morozov K.E. Quasiperiodic Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems // Differential Equations. 2017. vol. 53, no. 12, P. 1607–1615.

2. Morozov A.D., Morozov K.E. On Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. vol. 14, no. 3. P. 367-376.

3. J. Sanders Melnikov's method and averaging // Celestial Mechanics. Vol. 28, Iss. 1-2. P. 171-181.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 18-01-00306), Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3287.2017/PCh)

MSC2010 47A13

On global dynamics of the Duffing equation under quasiperiodic perturbation

A.D. Morozov[1], K.E. Morozov[1], T.N. Dragunov[1]
Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod[1]