УДК 517.95

Об одной обратной краевой задаче для уравнения поперечных колебаний упругой балки с интегральным условием первого рода

Мегралиев Я.Т.[1], Севдималиев Ю.М.[1], Рамазанлы Н.А.[1]

Бакинский Государственный Университет[1]

В приборостроении, машиностроении приходится регулировать вибрационные процессы в одномерных распределенных системах, и актуальность этих проблем возрастает с повышением быстроходности механизмов и увеличением размеров конструкции. Для таких задач математические модели поперечных колебаний строятся на основе уточненной теории [1]. Восстановление неизвестных параметров в соответствующих практических задачах приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным его решения [2,3]. Такие задачи называют обратными задачами математической физики, которые исследовались для уравнений с частными производными [4]-[8]. В обратных задачах с начальными и граничными условиями, характерными для той или иной прямой задачи, задается дополнительная информация. Необходимость дополнительной информации обусловлена наличием неизвестных коэффициентов или правой части уравнений.

В предлагаемой статье исследована обратная краевая задача с интегральным условием первого рода для уравнения поперечных колебаний упругой балки.

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)u_t(x,t) + f(x,t) \qquad (1)$$

на множестве $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\ (0 \le x \le 1), \qquad (2)$$

граничными условиями

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(0,t) = 0\ (0 \le t \le T), \qquad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0\ (0 \le t \le T) \qquad (4)$$

и с дополнительными условиями

$$u(0,t) = h_1(t)\ (0 \le t \le T), \qquad (5)$$

$$u(1,t) = h_2(t)\ (0 \le t \le T), \qquad (6)$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h_i(t)\,(i = 1,2)$ — заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$, $b(t)$ — искомые функции.

Определение. *Классическим решением обратной краевой задачи (1)-(6) назовём тройку функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) функция $u(x,t)$ и её производные $u_t(x,t), u_{tt}(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ непрерывны в D_T ;

2) функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны на $[0,T]$;

3) уравнение (1) и условия (2)-(6) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $\varphi(x) \in C[0,1]$, $\psi(x) \in C[0,1]$, $h_i(t) \in C^2[0,T]$ $(i=1,2)$, $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$ $(0 \leq t \leq T)$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $\int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0$ $(0 \leq t \leq T)$ и выполняются условие согласования

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx = 0,\ \int\limits_0^1 \psi(x)dx = 0, \tag{7}$$

$$\varphi(0) = h_1(0), \psi(0) = h_1'(0),\ \varphi(1) = h_2(0), \psi(1) = h_2'(0) \tag{8}$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(6) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(6) из (1)-(3)

$$u_{xxx}(1,t) = 0\ (0 \leq t \leq T), \tag{9}$$

$$h_1''(t) + u_{xxxx}(0,t) = a(t)h_1(t) + b(t)h_1'(t) + f(0,t)\ (0 \leq t \leq T), \tag{10}$$

$$h_2''(t) + u_{xxxx}(1,t) = a(t)h_2(t) + b(t)h_2'(t) + f(1,t)\ (0 \leq t \leq T). \tag{11}$$

Пусть данные задачи (1)-(3), (9)-(11) удовлетворяют следующим условиям:

A_1. $\varphi(x) \in C^5[0,1]$, $\varphi^{(6)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = \varphi^{(3)}(0) = \varphi^{(3)}(1) = \varphi^{(5)}(0) = \varphi^{(5)}(1) = 0$;

A_2. $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1), \psi'(0) = \psi'(1) = \psi^{(3)}(0) = \psi^{(3)}(1) = 0$;

A_4.$f(x,t), f_x(x,t), f_{xx}(x,t), f_{xxx}(x,t) \in C(D_T), f_{xxxx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $f_x(0,t) = f_x(1,t) = f_{xxx}(0,t) = f_{xxx}(1,t) = 0$ $(0 \leq t \leq T)$;

A_5. $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$ $(0 \leq t \leq T)$,

Можно доказать следующую теорему

Теорема 1. Пусть выполнены условия A_1-A_5. Тогда при малых значениях T задача (1)-(3), (9)-(11) имеет единственное решение.

С помощью Леммы 1 из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)-(6).

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx = 0,\ \int\limits_0^1 \psi(x)dx = 0,\ \int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0\ \ (0 \leq t \leq T)$$

$$\varphi(0) = h_1(0), \psi(0) = h_1'(0),\ \varphi(1) = h_2(0), \psi(1) = h_2'(0)$$

Тогда при малых значениях T задача (1)-(6) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.М.: Наука, 1988. 712 с.

2. Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семериков Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность.М.: Физматлит, 2002. 208 с.

3. Ахмятов А. М., Урманчеев С. Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний //Сиб.журн.индустр.матем. 2008. Т. 11, № 4. С. 19-24.

4. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195-198.

5. Лавреньев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 67 с.

6. Лаврентьев М. М., Романов В. Г.,Шишатский С. Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

7. Иванов В. К., Васин В. В, Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

8. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.

MSC2010 35A02

On an inverse boundary value problem for the equation of transverse vibrations of an elastic beam with integral condition of the first kind

Y.T. Mehraliyev [1], Y.M. Sevdimalıyev [1], N.A. Ramazanly [1]
Baku State University [1]