УДК 517.977.1

Матричная декомпозиция нелинейных систем автоматического управления

Камачкин А.М.[1], Шамберов В.Н.[2], Согонов С.А.[2]

Санкт-Петербургский государственный университет[1], Санкт-Петербургский государственный морской технический университет[2]

Предлагается метод построения неособенных линейных преобразований нелинейных систем автоматического регулирования и управления. Метод позволяет в определённых случаях свести исследование динамики исходной многомерной системы к исследованию поведения ее подсистем, допускающих строгий анализ.

Матрица неособенного преобразования строится в виде произведения двух матриц, одна из которых постоянная, другая состоит из элементов, зависящих от вводимых параметров. Данная параметрическая матрица отражает неоднозначность выбора преобразования, приводящего матрицу линейной части системы к первой естественной нормальной форме или жордановой нормальной форме. Параметрическая матрица позволяет при условии ее неособенности увеличить число декомпозиционных вариантов в пространстве параметров исходной системы.

1. История вопроса

Впервые для нелинейных задач теории автоматического регулирования каноническое преобразование специального вида было предложено А.И. Лурье в 1949 г. В основе этого преобразования лежало разложение элементов передаточной функции линейной части системы на простые дроби. В 1957 г. В.А. Троицкий расширил преобразование на случаи наличия кратных корней в характеристическом уравнении преобразуемой линейной части системы. Данное преобразование было обобщено в методе сечений пространства параметров, разработанном в 1967 г. Р.А. Нелепиным. Известен также метод редукции пространства параметров, в котором матрица преобразования строится на основе матрицы Вандермонда (В.В. Петров, А.А. Гордеев). Зарубежные авторы, в основном, использовали тот же метод, что отражено, например, в монографии [1], где рассмотрены различные методы нахождения матрицы канонического преобразования.

2. Каноническое преобразование

Воспользуемся неоднозначностью неособенных преобразований. Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot \{N[y(t)] + \psi(t)\}, x(0) = x_0,\ y(t) = C \cdot x(t), \tag{1}$$

где A, B, C — вещественные матрицы размерности $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(m \times n)$ соответственно; $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $y(t)$ — векторы переменных размерности n, n и m (при этом $n \geqslant m$) соответственно; $\psi(t)$ — вектор внешнего возмущающего воздействия размерности m. Нелинейная часть системы представлена вектором нелинейных функций $N[y(t)]$ размерности m; точкой обозначено дифференцирование по времени.

Считаем, что элементы матрицы A заранее определены, а элементы матриц B и C выступают в качестве параметров настройки и могут изменяться в задаваемых пределах для придания системе требуемых свойств.

Каноническим преобразованием $x(t) = T \cdot z(t)$ исходная система (1) приводится к эквивалентной системе относительно $z(t)$

$$\dot{z}(t) = A_T \cdot z(t) + B_T \cdot \{N[y(t)] + \psi(t)\}, z(0) = x_0,\ y(t) = C_T \cdot z(t), \tag{2}$$

где $A_T = T^{-1} \cdot A \cdot T$, $B_T = T^{-1} \cdot B$, $C_T = C \cdot T$.

Приравниванием к нулю определённых элементов матриц B_T и C_T, можно добиться расщепления преобразованной системы на подсистемы более низкой (чем n) размерности, допускающих их полное аналитическое исследование [2,3]. Возникает задача получения преобразования, приводящего систему (1) к системе (2) с наперёд заданными свойствами.

Известно, что матрица преобразования T, с помощью которой матрица A приводится к первой естественной нормальной форме или к жордановой форме A_T, определяется неоднозначно. Неоднозначность выбора матрицы T можно описать как $T = S \cdot Q$, где S – некоторая матрица такая, что $S^{-1} \cdot A \cdot S = A_T$, а Q – невырожденная матрица, описывающая неоднозначность выбора матрицы T.

3. Теорема

Пусть неособенная матрица Q обладает свойством $A_T \cdot Q = Q \cdot A_T$, где A_T – первая естественная нормальная форма, или жорданова нормальная форма матрицы A, тогда матрица преобразования будет иметь вид $T = S \cdot Q$, где S – одна из возможных постоянных матриц, приводящих матрицу A к первой естественной нормальной форме или к жордановой нормальной форме.

Равенство $A_T \cdot Q = Q \cdot A_T$ позволяет определять элементы матрицы Q, которые можно использовать как переменные множители в элементах матриц B_T и C_T.

Чаще всего [1, 4], в качестве A_T используется матрица в ждановой нормальной форме, т. е. $A_T = A_j$, где A_j – матрица в жордановой форме, тогда S - одна из возможных постоянных матриц, приводящих A к виду A_j. Матрица S при этом состоит из собственных и дополнительных векторов матрицы A. В этом случае обозначим $T = S \cdot Q = M$.

Хорошо известно, что, например, разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и ненулевой правой частью с помощью замены переменных приводится к виду

$$x_{(k+1)} = A_n \cdot x_{(k)} + B \cdot F_{(k)}, y_{(k)} = C \cdot x_{(k)}, \tag{3}$$

где $x_{(k)}$ – $(k+1)$-мерный вектор, A_n – $(n \times n)$ постоянная матрица в форме Фробениуса, или, иначе, в первой естественной нормальной форме, $F_{(k)}$ – дискретная входная переменная, $B = [0\ \ 0\ ...\ 0\ \ 1]$ – $(n \times 1)$ матрица, $C = [1\ \ 0\ ...\ 0\ \ 0]$ – $(1 \times n)$ матрица. Система (3) полностью наблюдаема. Аналогичные выкладки справедливы и для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Если выход одномерной системы n-го порядка с управлением ν в правой части является взвешенной суммой производных текущих переменных до порядка m включительно, то тогда после соответствующей замены переменных приходим к системам вида

$$\dot{z} = A_n \cdot x + B \cdot \nu,\ y = \langle C, x \rangle + d_0 \cdot \nu,\ d_0 \in R \text{ при } n = m; \tag{4}$$

$$\dot{z} = A_n \cdot x + B \cdot \nu,\ y =< C, x >,\ \text{при } n > m. \tag{5}$$

Тогда системы (4) и (5) всегда полностью управляемы по входу ν.

Задача состоит в том, чтобы построить матрицы вида Q и Q^{-1}, зависящие от параметров так, чтобы можно было воспользоваться преимуществами, которые дает приведение к системе (2) с указанными выше матрицами A_T, т. е. $A_T = A_j$ и $A_T = A_n$. Во втором случае $T = S \cdot Q_n$, где S и Q_n – невырожденные матрицы, такие, что $S^{-1} \cdot A \cdot S = A_n$, $Q_n^{-1} \cdot A \cdot Q_n = A_n$.

В случае первой естественной нормальной формы матрицы до 4-го порядка включительно получены параметрические матрицы. Указан метод получения таких матриц в любых случаях, когда порядок матриц больше четырёх [6,7]. Введение этих матриц как параметрического сомножителя, позволяет во многих случаях приводить исходную систему уравнений к управляемой или наблюдаемой форме.

Задачу построения неособенного декомпозиционного преобразования в случае A_j можно считать решённой [4,7]. Решение состоит из следующих этапов:

1) строим матрицу S, состоящую из собственных (модальных) векторов и дополнительных векторов матрицы A;

2) получаем матрицу $A_j = S^{-1} \cdot A \cdot S$;

3) из условия $A_j \cdot Q = Q \cdot A_j$ получаем невырожденную матрицу Q так, что матрица преобразования $M = S \cdot Q$ приводит систему (1) к системе уравнений относительно $z(t)$ с матрицами $A_j = M^{-1} \cdot A \cdot M$, $B_m = M^{-1} \cdot B$, $C_m = C \cdot M$ соответственно;

4) приводим матрицы B_m, C_m к нужному блочному виду, варьируя элементы матрицы Q, исключая случаи, когда $det(Q) = 0$;

5) решив систему относительно $z(t)$, возвращаемся к системе относительно $x(t)$, используя преобразование $x(t) = M \cdot z(t)$. Изложенный подход к декомпозиции систем вида (1) был с успехом применён и дополняется исследованиями ее подсистем первого и второго порядков [5,7].

Литература

1. Derusso P.M., Rob J.R., Close C.M., Desrochers A.A. State Variables for Engineers. 2nd ed., New-York: Wiley – Interscience, 1998. 575 p.

2. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Определение бифуркационной структуры пространства параметров методом декомпозиции // Системы управления и информационные техно-логии. М.; Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2012. № 4 (50). С. 11-13.

3. Камачкин А.М., Согонов С.А., Шамберов В.Н. Вынужденные периодические решения нелинейных многосвязных систем // Системы управления и информационные технологии. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2014. № 1 (55). С. 8-12.

4. Kamachkin A.M., Chitrov G.M., Shamberov V.N. Algebraical aspects of parametrical decomposition method // 2015 Intern. Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP-2015), IEEE. P. 52–54 (DOI: 10. 1109 / SCP. 2015. 7342056).

5. Kamachkin A.M., Shamberov V.N. The method of parametrical decomposition. Base subsystems and their state space // 2016 Intern. Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems» (Pyatnitskiy's Conference), IEEE (DOI:10.1109/stab. 2016.7541190).

6. Kamachkin A.M., Chitrov G.M., Shamberov V.N. Special Matrix Transformations of Essentially Nonlinear Control Systems // 2017 Intern. Conference «Constructive nonsmoth analysis and related topics» to the memory of V. F. Demyanov (CNSA-2017). IEEE. P. 138–140, DOI:10.1109 / CNSA. 2017.7973966.

7. Kamachkin A.M., Chitrov G.M., Shamberov V.N. Normal matrix forms to decomposition and control problems for manydimensional systems // Vestnik of Saint Petersburg

University. Applied Mathematics. Computer science. Control Processes. 2017. Vol. 13, Iss. 4. P. 417-430. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.408.

MSC2010 93B11; 93C10

Matrix decomposition of nonlinear systems of automatic control

A.M. Kamachkin[1], V.N. Shamberov[2], S.A. Sogonov[2]

St. Petersburg State University[1], St. Petersburg State Marine Technical University[2]