УДК 517.955.4

Быстро сходящиеся к решению одномерного уравнения теплопроводности черновские аппроксимации*

Веденин А.В.[1]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»[1]

Доклад посвящён новому методу приближённого решения линейных дифференциальных уравнений эволюционного типа с частными производными и переменными коэффициентами.

Отправной точкой для исследований служат работы И.Д. Ремизова [1–3]. Общий подход к исследованию скорости сходимости черновских аппроксимаций был предложен в [3], там же были сформулированы две гипотезы, при выполнении условий которых следует ожидать более высокую скорость сходимости аппроксимаций к решению уравнения. Главной целью является усиление результатов работы [2] таким образом, чтобы получить аппроксимации, сходящиеся быстрее к решению уравнения, чем аппроксимации, представленные в [2]. В докладе описывается первый шаг на этом пути: построение функции Чернова, удовлетворяющей гипотезе И.Д. Ремизова [3], для частного случая исследуемого уравнения: все коэффициенты постоянные и в правой части уравнения лишь коэффициент при старшей производной отличен от нуля.

В этом случае исследуемое уравнение представляет собой следующее уравнение теплопроводности, в котором a — строго положительная постоянная:

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = au_{xx}''(t,x); \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ u(0,x) = u_0(x); \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Для этого уравнения автором доклада были произведены следующие построения. Для каждых $x \in \mathbb{R}, t \geq 0, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a > 0$ положим

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f\left(x + \sqrt{6at}\right) + \frac{1}{6}f\left(x - \sqrt{6at}\right). \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что $S(t)$ при каждом $t > 0$ является линейным ограниченным оператором, действующим в пространстве ограниченных, равномерно непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Более того, S удовлетворяет условиям теоремы Чернова (см. [1]), в силу чего справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Для каждой ограниченной, равномерно непрерывной функции $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при каждом $t \geq 0$ существует ограниченное, равномерно непрерывное по x решение $u(t,x)$ задачи Коши (1), задаваемое при всех $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ формулой*

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left((S(t/n))^n u_0\right)(x),$$

где $S(t/n)$ получается заменой t на t/n в формуле (2), а $S(t/n)^n$ это композиция n копий линейного ограниченного оператора $S(t/n)$.

*Исследование выполнено в Лаборатории топологических методов в динамике НИУ ВШЭ и поддержано проектом ЦФИ в 2019 году.

Кроме того, доказано, что построенная функция Чернова S удовлетворяет условиям гипотезы И.Д. Ремизова [3], поэтому есть основания ожидать, что полученные с её помощью аппроксимации будут сходиться к решению быстрее, чем представленные в [2]. Следующий шаг в проводимом исследовании — построить аналогичную функцию Чернова для случая, когда вместо константы a в уравнении (1) присутствует функция $a(x)$.

Литература

1. Ремизов И. Д. Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 1. С. 17-21.

2. Remizov I. D. Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example) // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 328. P. 243-246.

3. Remizov I. D. On estimation of error in approximations provided by Chernoff 's product formula // International Conference «ShilnikovWorkshop-2018», Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, December 17-18, 2018. Book of abstracts. P. 38-41.

MSC2010 35K15

Fast converging to solution of one-dimensional heat equation Chernoff approximations

A.V. Vedenin[1]

National Research University – Higher School of Economics[1]