

УДК 517.958:531.12; 534.11

Исследование поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении

В.Н. Анисимов¹, В.Л. Литвинов¹

Сызранский филиал ФГБОУ ВО СамГТУ¹

Аннотация. В статье исследуются поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами. При постоянной скорости продольного движения колебания каната характеризуются набором собственных частот. В результате получено уравнение, позволяющее найти точные значения собственных частот. В статье проанализировано, как влияет скорость продольного движения каната на форму собственных колебаний. Решение произведено в безразмерных переменных, что позволяет использовать полученные результаты для расчёта колебаний широкого круга технических объектов.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, частота колебаний.

1. Введение

В статье исследуются поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [2, 9, 15], гибкие звенья передач [1, 4, 13], балки [3], лентопротяжные механизмы [11], конвейеры [10, 12] и т.д. Наличие движущихся границ делает неприменимыми к решению таких краевых задач классические методы математической физики, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

2. Постановка задачи

Схема объекта изучения изображена на рисунке 1.

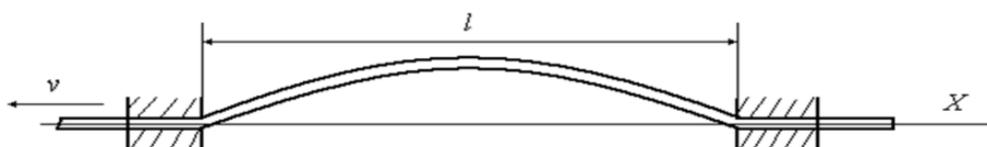


Рис.1. Схема объекта

Уравнение, учитывающее натяжение каната и сопротивление внешней среды, имеет вид:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + Gu_t(x,t) = 0. \quad (1)$$

Здесь $u(x,t)$ – поперечное смещение точки каната с координатой x в момент времени t ; $a^2 = \frac{T}{\rho}$; (T – натяжение каната; ρ – масса единицы длины каната); G – коэффициент сопротивления среды (сила, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения).

Граничные условия имеют вид:

$$u(vt, t) = 0; u(vt + l, t) = 0, \quad (2)$$

где v – скорость продольного движения каната, l – длина колеблющейся части.

Введем безразмерные переменные:

$$u(x,t) = U(\xi, \tau); \quad \xi = \frac{2\pi(x-vt)}{l}; \quad \tau = \frac{2\pi\sqrt{a^2-v^2}}{l}t. \quad (3)$$

В результате получим задачу с условиями, заданными на неподвижных границах:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \gamma U_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \lambda U_{\tau}(\xi, \tau) - \eta U_{\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$U(0, \tau) = 0; U(2\pi, \tau) = 0. \quad (5)$$

Здесь:

$$\gamma = \frac{2v}{\sqrt{a^2-v^2}}; \lambda = \frac{Gl}{2\pi\sqrt{a^2-v^2}}; \eta = \frac{Gvl}{2\pi(a^2-v^2)}. \quad (6)$$

Два коэффициента уравнения (1) могут быть выражены через два безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{v}{a}; D = \frac{Gl}{2\pi a}. \quad (7)$$

Параметры характеризуют: α – относительную скорость продольного движения каната; D – сопротивление среды.

Через безразмерные параметры коэффициенты уравнения (4) выражаются следующим образом:

$$\gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \lambda = \frac{D}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \eta = \frac{\alpha D}{1-\alpha^2}. \quad (8)$$

3. Решение задачи

Решим задачу (4), (5) аналитическим методом. Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}, \quad (9)$$

где $\mu(\xi)$ – собственные функции, характеризующие форму колебаний, ω – собственные частоты.

Для вычисления функции $\mu(\xi)$ получим следующую краевую задачу:

$$\mu''(\xi) + (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) - (\omega^2 + \lambda\omega)\mu(\xi) = 0; \quad (10)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами при граничных условиях (11).

Общее решение (10) имеет вид:

$$\mu(\xi) = e^{\frac{(\gamma\omega - \eta)\xi}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)}}{2} \xi + C_2 \sin \frac{\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)}}{2} \xi \right). \quad (12)$$

Используя граничные условия (11), получим

$$C_1 = 0$$

$$C_2 \sin \pi \sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)} = 0. \quad (13)$$

Тогда:

$$\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)} = n. \quad (14)$$

Из (14) получим квадратное уравнение относительно собственных частот ω :

$$\omega^2(4 + \gamma^2) + 2\omega(\gamma\eta + 2\lambda) + (\eta^2 + n^2) = 0. \quad (15)$$

В результате решения уравнения (15) получено выражение для собственных частот колебаний:

$$\omega_n = -\frac{\gamma\eta + 2\lambda}{\gamma^2 + 4} + i \frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4)(n^2 + \eta^2) - (\gamma\eta + 2\lambda)^2}}{\gamma^2 + 4}. \quad (16)$$

Здесь i – мнимая единица; n – порядковый номер частоты. Действительная часть выражения (16) характеризует затухание колебаний, а мнимая – фактическую частоту.

При отсутствии затухания ($\lambda = \eta = 0$) выражение (16) примет вид:

$$\omega_n = i \frac{n}{\sqrt{\gamma^2 + 4}}. \quad (17)$$

Найдем собственные функции $\mu(\xi)$ при отсутствии затухания. С учетом нормирования, из (12) получим:

$$\mu(\xi) = e^{\frac{-i\alpha\xi}{2}} \sin \frac{n\xi}{2}. \quad (18)$$

Используя формулу Эйлера, получим выражение для собственных функций в виде:

$$\mu(\xi) = \sin\left(\frac{(1-\alpha)n\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{(1+\alpha)n\xi}{2}\right). \quad (19)$$

Как изменяются собственные функции $\mu(\xi)$ в зависимости от параметра α показано на рис. 2.

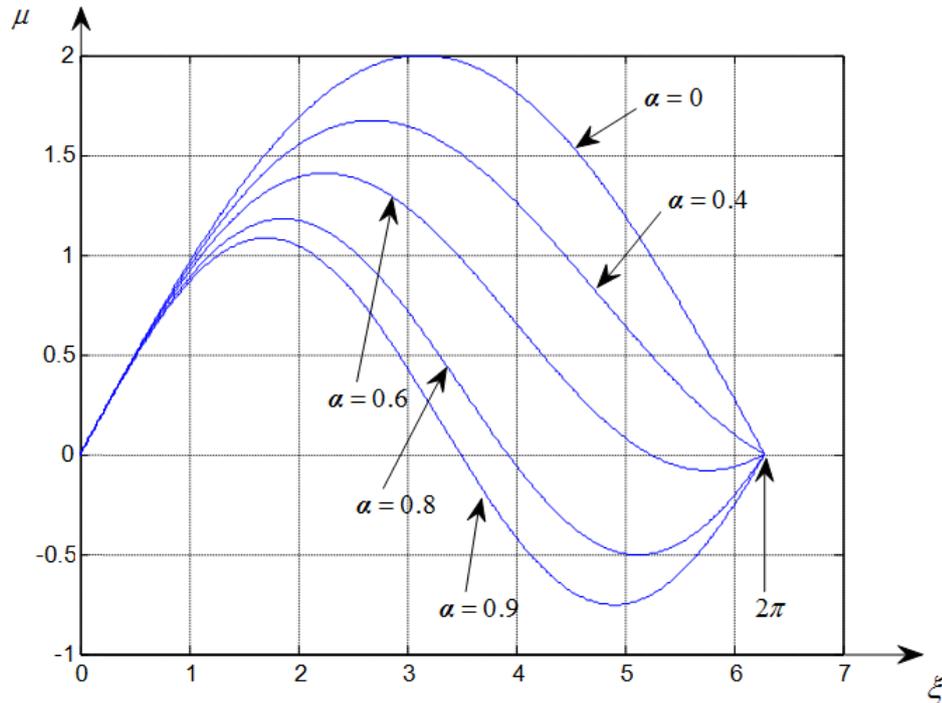


Рис.2. Зависимость собственных функций от скорости продольного движения каната

Анализ рис. 2 показывает, что чем больше скорость движения каната, тем больше искажаются собственные функции. Искажение происходит на границе, движущейся навстречу бегущим волнам.

4. Заключение

В статье произведен анализ поперечных колебаний каната движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната и сопротивление внешней среды. Решение произведено аналитическим методом. Полученные результаты могут быть использованы для расчёта широкого круга технических объектов.

Литература

1. Самарин Ю. П., Анисимов В. Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. Вузов. Машиностроение, 1986. № 12. С. 17–21.
2. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
3. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1970. № 1. С. 159–161.
4. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
5. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2009. № 1 (18). С. 149–158.
6. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2012. № 3 (28). С. 145–151.
7. Ding Hu, Chen Li-Qun. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams // J. Sound and Vibr., 2010. no. 17. pp. 3484–3494.
8. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009. – 131 с.
9. Zhu W. D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust., 2006. no. 1. pp. 66–78.
10. Ерофеев В. И., Колесов Д. А., Лисенкова Е. Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. № 6 (70), 2013. – С. 18–29.
11. Рагульский К. И. Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов // В сб.: Динамика машин. – М.: Наука, 1971. – С. 169–177.
12. Хосаев Х. С. Математическое описание динамических характеристик канатного става ленточного конвейера // Тр. Сев.-Кавк. гос. технол. ун-та. – 2001. – № 8. – С. 234–239.
13. Тихонов В.С., Абрамов А.А. Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке // Вестник МГУ. Сер. 1, 1993. № 5. С. 45–48.
14. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2015. Т. 19, № 2. С. 382–397.

15. Анисимов В. Н. Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъемной установки // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4-1. С. 128–133.
16. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 149 с.
17. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70-77.

MSC: 35R37; 35G30, 35Q70

Investigation of transverse oscillations of a rope moving in longitudinal direction

V.N. Anisimov¹, V.L. Litvinov¹

Syzran' Branch of Samara State Technical University¹

Abstract. The article researches the oscillations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the tension of the rope and resistance of the external environment. The object of the study refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries. At a constant speed of longitudinal motion, the rope oscillations are characterized by a set of eigen frequencies. As a result, an equation is obtained in the form of series, which makes it possible to find the exact values of the eigen frequencies. The article analyzes how the speed of longitudinal rope motion affects the shape of natural oscillations. The solution is made in dimensionless variables, which allows us to use the obtained results to calculate the oscillations of a wide range of technical objects.

Key Words: oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, mathematical models, oscillation frequency.