УДК 517.9

О периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением в виде полиномиальной оператор-функции

П. А. Шаманаев [1]

Нацинальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Задача о ветвлении решений дифференциальных уравнений с вырожденным или единичным оператором при производной и возмущением в виде аналитической оператор-функции малого параметра рассматривались в работах [1], [2].

В настоящей работе решается задача о нахождении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или единичным оператором при производной и возмущением в виде полиномиальной оператор-функции второй степени относительно малого параметра.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$A\frac{dx}{dt} = B_0x - B(\varepsilon)x - f(t), \quad B(\varepsilon) = \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2, \tag{1}$$

где A и B_i - плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, действующие из E_1 в E_2, $f(t+T) = f(t)$, $T > 0$, ε – малый вещественный параметр.

Предполагается, что уравнение

$$A\frac{dy}{dt} = B_0y \tag{2}$$

имеет $2n$ $(n = n_1 + ... + n_r)$ T-периодических решений $\varphi_k^{(1)}$, $\bar{\varphi}_k^{(1)}$ $(k = \overline{1,n})$.

В работе при достаточно малых вещественных ε доказано существование и единственность T–периодического решения $x(t,\varepsilon)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $x(t,0) = z(t)$, где $z(t)$ — T–периодические решения уравнения

$$A\frac{dz}{dt} = B_0z - f(t). \tag{3}$$

Предполагается, что для уравнения (3) справедливы условия, обеспечивающие существование T–периодических решений.

Для решения поставленной задачи уравнение (1) представляется в виде

$$\mathcal{B}_0x = f(t) + B(\varepsilon)x, \quad \mathcal{B}_0x \equiv B_0x(t) - A\frac{dx}{dt}, \tag{4}$$

а, затем, используя метод линеаризации по спектральному параметру [3], приводится к матрично-операторной форме

$$\mathcal{B}y = H(t) + \varepsilon\mathcal{A}y, \tag{5}$$

где $y = colon(y_1, y_2)$, $H(t) = colon(f(t), 0)$,

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} \mathcal{B}_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь, C – произвольный обратимый оператор.

Далее, используя обобщённые жордановы наборы для оператор-функций $\mathcal{B}_0 - B(\varepsilon)$ и $\mathcal{B} - \varepsilon\mathcal{A}$ [1]- [3], с помощью метода Ляпунова-Шмидта задача о нахождении T–периодических решений уравнения (1) сводится к исследованию разрешающих систем в корневом подпространстве [4], [5]. Разрешающая система представляет собой систему линейных алгебраических уравнений и при $\varepsilon \neq 0$ имеет единственные решения, а при значении ε, равным нулю, – $2n$-параметрическое семейство решений.

T–периодическое решение уравнения (1) строится в виде линейной комбинации элементов обобщённого жорданова набора оператор-функций $\mathcal{B}_0 - B(\varepsilon)$ и дополнительного слагаемого. Показано, что T–периодическое решение уравнения (1) в общем случае имеет полюс в точке $\varepsilon = 0$, а при значении ε, равным нулю, переходит в $2n$-параметрическое семейство периодических решений.

Литература

1. Loginov B.V., Rusak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. Nonlinear analysis, theory, methods and applications. 1991. Vol. 17, N 3. pp. 219-232.

2. Коноплёва И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах. Изв. высших учеб. заведений. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск. С. 115-124.

3. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщённая жорданова структура аналитической оператор-функции и её роль в теории ветвления. Редкол. "Известия АН УзССР". Ташкент. 1977. 82 с. Деп. в ВИНИТИ 18.04.1977, № 1782.

4. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.

5. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 45–53.

MSC 39A23

On periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with small perturbation in the form of a polynomial operator function

P. A. Shamanaev[1]

National Research Mordovia State University[1]