УДК 532.685

Влияние поступательно-колебательного движения плоского слоя на течение жидкости

Н. А. Храмова [1]

Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева[1]

Теория движения жидкостей через пористые среды интенсивно развивается в последнее время в связи с разнообразными приложениями в технологических процессах, а также при изучении природных явлений.

Задачи о течении жидкости в пористой среде вокруг сплошного цилиндра и сферы решены в [2]. Движение жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением пористого шара вокруг стационарной оси вращения, проходящей через центр шара, исследовано в [3].

Движение жидкости в объеме определяется условиями на ограничивающих ее поверхностях и называемых граничными условиями. Классическое граничное условие к уравнениям движения жидкости, контактирующей с твердой поверхностью, состоит в равенстве скоростей жидкости и твердой поверхности (условие прилипания).

Однако, как показали многочисленные эксперименты и теоретические исследования последнего времени, классическое граничное условие для скорости жидкости в некоторых случаях нуждается в определенных усложнениях. Например, на так называемых супергидрофобных поверхностях, как существующих в природных условиях, так и созданных искусственно, жидкость проскальзывает, не прилипая к твердой поверхности.

Вывод уравнений движения вязкой жидкости через пористую среду методом локального объемного усреднения приведен, например, в [4].

Рассматривается колебательное движение вязкой жидкости, контактирующей с плоским слоем пористой среды. Пористый слой совершает поступательно-колебательное движение по гармоническому закону с частотой ω в направлении, параллельном непроницаемой плоскости, ограничивающей этот слой снизу и движущейся со скоростью слоя.

Пористая среда далее предполагается недеформируемой, однородной и изотропной. Предполагается также, что пористая среда имеет достаточно большую пористость и высокую проницаемость. При таких свойствах пористой среды в ней могут возникать колебательные движения жидкости, в которых скорость жидкости будет заметно отличаться от скорости пористой среды.

Система координат выбрана так, что поверхность раздела пористой среды и жидкости совпадает с плоскостью y^*, z^*; пористая среда занимает область: $-H_1 < x^* < 0$, а области жидкости соответствует $0 < x^* < H_2$. Плоскость $x^* = H_2$ совпадает со свободной поверхностью жидкости. Непроницаемая плоская поверхность $x^* = -H_1$ ограничивает снизу слой пористой среды и движется вместе с ней. Ось y^* выбирается параллельно направлению колебаний пористого слоя и плоскости $x^* = -H_1$. Знаком «*» здесь и далее обозначаются размерные переменные (но не размерные параметры), чтобы отличать их от соответствующих безразмерных, обозначаемых теми же буквами. Величины, относящиеся к пористой среде и свободной жидкости, обозначаются в необходимых случаях индексами 1 и 2 соответственно.

Скорость поступательно-колебательного движения пористого слоя и ограничивающей его плоскости вдоль оси y^* запишем в виде функции от времени t^*

$$u^* = U_0 \exp(-i\omega t^*) \ ,$$

где U_0 — действительная постоянная.

В окончательных результатах вычислений везде подразумеваются действительные части соответствующих комплексных выражений.

Систему уравнений нестационарного движения жидкости в пористой среде (модель Бринкмана) запишем в виде [5].

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\Gamma^2}(\mathbf{u}_1^* \cdot \nabla)\mathbf{u}_1^* = -\frac{1}{\rho}\nabla^* p_1^* + \nu' \ \nabla^{*2}\mathbf{u}_1^* + \frac{1}{\rho}\ \mathbf{F}^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1^* = 0\ . \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, Γ — пористость ($\Gamma =$const), $\mathbf{u}_1^*$ — макроскопическая скорость фильтрации ($\mathbf{u}_1^* = \Gamma\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_1^*$ — средняя по объему пор скорость жидкости), p_1^* — среднее по объему пор давление, $\nu' = \eta'/\rho$, η' — эффективная вязкость жидкости в порах, $\nu = \eta/\rho, \eta$ — вязкость свободной жидкости вне пористой среды, K — коэффициент проницаемости пористой среды, $\mathbf{F}^* = -(\eta/K)(\mathbf{u}_1^* - \Gamma\mathbf{u}^*)$ — плотность силы сопротивления пористой среды. При $K \to 0$ (непроницаемая для жидкости среда) из (1) следует $\mathbf{u}_1^* = \Gamma\mathbf{u}^*$, т. е. жидкость будет двигаться как целое вместе с пористой средой. Если $\mathbf{u}^* = 0$, то $\mathbf{F}^*$ принимает известный вид силы Дарси.

Уравнения движения свободной жидкости имеют обычный вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)\mathbf{u}_2 = -\frac{1}{\rho}\nabla^* p_2^* + \nu\ \nabla^{*2}\mathbf{u}_2^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_2^* = 0\ . \tag{2}$$

Из соображений симметрии следует, что все переменные величины будут функциями только от вертикальной координаты x^* и времени t^*. А согласно уравнениям непрерывности (1), (2) будет $u_{1x}^* =$const, $u_{2x}^* =$const, где обе эти постоянные следует принять равными нулю, поскольку $u_{1x}^* = 0$ и $u_{2x}^* = 0$ на поверхностях $x^* = -H_1$ и $x^* = H_2$. Поэтому $u_{1x}^* \equiv 0$, $u_{2x}^* \equiv 0$ всюду. Кроме того, $(\mathbf{u}_j^* \cdot \nabla)\mathbf{u}_j \equiv 0$ $(j = 1, 2)$. Таким образом, вследствие симметрии нелинейные слагаемые выпадают из уравнений движения (1), (2). Из соображений симметрии следует также, что скорости $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*$ направлены всюду параллельно оси y^*.

Из x^*- компонент уравнений движения (1), (2) следует, что в случае горизонтального расположения пористого слоя, давления p_1^* и p_2^* будут функциями только от координаты x^* и времени t^*. Вид этих функций, очевидно, не влияет на характер движения жидкости в горизонтальном направлении. Поэтому без потери общности можно не рассматривать влияние силы тяжести на течение жидкости и принять $p_1^* =$const, $p_2^* =$const.

Вводя обозначения $u_{1y}^* \equiv u_1^*$, $u_{2y}^* \equiv u_2^*$, получим из (1) и (2)

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} = \nu'\ \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\nu}{K}(u_1^* - \Gamma u^*)\ , \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} = \nu\ \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x^{*2}}\ .$$

Граничные условия к этим двух уравнениям [2], [3]

$$x^* = -H_1: \quad u_1^* - \Gamma\ U_0 e^{-i\omega t^*} = B\ \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*}\ , \tag{4}$$

$$x^* = 0: \quad u_1^* = u_2^*\ ,$$

$$x^* = 0: \quad \Lambda\left(\eta'\ \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} - \eta\ \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*}\right) = \eta\ (u_1^* - \Gamma\ u^*)\ ,$$

$$x^* = H_2: \quad \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} = 0\ .$$

Здесь B и Λ — постоянные с размерностью длины, зависящие от свойств пористой среды и жидкости. В первом условии (4) учитывается возможное скольжение жидкости относительно непроницаемой поверхности, контактирующей с пористой средой. При $B = 0$

получается обычное условие прилипания $u_1^* = \Gamma\, U_0 \exp(-i\omega t^*)$. В более простой модели фильтрации Дарси возможное наличие скольжения неявно учитывается тем, что на скорость жидкости накладывается только условие непротекания в нормальном к твердой поверхности направлении, а скорость скольжения жидкости вдоль этой поверхности остается неопределенной. Второе условие (4) выражает непрерывность скорости на поверхности раздела пористой среды и жидкости ($x^* = 0$). Третье условие (4) связывает скачок касательных напряжений на поверхности $x^* = 0$ с касательной скоростью жидкости; при $\Lambda \to \infty$ оно переходит в условие непрерывности касательных напряжений, а при $\Lambda = 0$ — в условие прилипания на поверхности пористой среды. Четвертое — это условие отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности жидкости.

Введем безразмерные переменные

$$x = x^*/H \quad (H = H_1 + H_2), \quad t = \omega t^*, \quad u_1 = u_1^*/U_0, \quad u_2 = u_2^*/U_0\ , \quad u = u^*/U_0 = \exp(-it^*)\ .$$

Уравнения (3) в безразмерном виде

$$\frac{\omega H^2}{\nu\, \Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\nu'}{\nu}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{H^2}{K}(u_1 - \Gamma u)\ , \tag{5}$$

$$\frac{\omega H^2}{\nu}\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\ .$$

Граничные условия (4) в безразмерном виде

$$x = -h_1: \quad u_1 - \Gamma u = \beta\frac{\partial u_1}{\partial x}\ , \tag{6}$$

$$x = 0: \quad u_1 = u_2\ ,$$

$$x = 0: \quad \lambda\left(\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = u_1 - \Gamma u\ ,$$

$$x = h_2: \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0\ .$$

Здесь $h_1 = H_1/H, \quad h_2 = H_2/H, \quad \beta = B/H, \quad \lambda = \Lambda/H, \quad \alpha^2 = \eta/\eta'$.
Безразмерные скорости u_1, u_2 будем искать в виде

$$u_1(x,t) = F_1(x)\exp(-it), \quad u_2 = F_2(x)\exp(-it)\ . \tag{7}$$

Из уравнений (5) следует

$$\frac{d^2F_1}{dx^2} - \xi_1^2 F_1 = -2\alpha^2\left(\frac{H}{\delta_1}\right)^2, \quad \frac{d^2F_2}{dx^2} - \xi_2^2 F_2 = 0\ . \tag{8}$$

Здесь

$$\xi_1^2 = \frac{2\alpha^2}{\Gamma}\left[\left(\frac{H}{\delta_1}\right)^2 - i\left(\frac{H}{\delta_2}\right)^2\right], \quad \xi_2^2 = -2i\left(\frac{H}{\delta_2}\right)^2\ ,$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2K}{\Gamma}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}\ .$$

Общие решения уравнений (8):

$$F_1(x) = A_1\exp\xi_1 x + B_1\exp(-\xi_1 x) + C\ , \tag{9}$$

$$F_2(x) = A_2\exp\xi_2 x + B_2\exp(-\xi_2 x)\ ,$$

$$\xi_1 = \frac{\alpha H}{\sqrt{\Gamma}}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{i\delta}{\delta_2^2}\right)\ , \quad \xi_2 = (1-i)\frac{H}{\delta_2}\ ,$$

$$C = \frac{\Gamma}{1 - i(\delta_1/\delta_2)^2}\ , \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\delta_1^2} + \sqrt{\frac{1}{\delta_1^4} + \frac{1}{\delta_2^4}}\ .$$

Коэффициенты A_j, B_j $(j = 1, 2)$ в (9), определяемые с помощью граничных условий (6), имеют вид

$$A_1 = \frac{D_1}{D_2}\ ,$$

$$B_1 = \frac{\Gamma - C}{(1 + \beta\ \xi_1)\exp\xi_1 h_1} - \frac{D_1(1 - \beta\ \xi_1)}{D_2(1 + \beta\ \xi_1)\exp 2\xi_1 h_1}\ ,$$

$$A_2 = \frac{D_1 D_5 + D_2 D_4}{D_2(1 + \beta\ \xi_1)(1 + \exp 2\xi_2 h_2)\exp\xi_1 h_1}\ ,$$

$$B_2 = \frac{D_1 D_5 + D_2 D_4}{D_2(1 + \beta\ \xi_1)[1 + \exp(-2\xi_2 h_2)]\exp\xi_1 h_1}\ ,$$

$$D_1 = \lambda\xi_1(\Gamma - C) + \alpha^2 D_3 D_4 - \alpha^2\Gamma(1 + \beta\ \xi_1)\exp\xi_1 h_1\ ,$$

$$D_2 = \lambda\xi_1 D_6 - \alpha^2 D_3 D_5\ ,$$

$$D_3 = 1 - \lambda\xi_2\ \operatorname{th}\xi_2 h_2\ ,$$

$$D_4 = \Gamma - C + C(1 + \beta\ \xi_1)\exp\xi_1 h_1\ ,$$

$$D_5 = 2\operatorname{sh}\xi_1 h_1 + 2\beta\ \xi_1\operatorname{ch}\xi_1 h_1\ ,$$

$$D_6 = 2\operatorname{ch}\xi_1 h_1 + 2\beta\ \xi_1\operatorname{sh}\xi_1 h_1\ .$$

Решения вида (7), (9) описывают поперечные стоячие волны, в которых скорости $u_1(x,t), u_2(x,t)$, направленные параллельно оси y, перпендикулярны направлению распространения волны вдоль оси x.

Решена задача о движении вязкой жидкости, вызванном колебательно-поступательным движением плоского слоя пористой среды, контактирующего с вязкой жидкостью. Движение жидкости в пористой среде описывается нестационарным движением Бринкмана, а свободной жидкости вне пористой среды — уравнением Навье — Стокса. Найдены нестационарные поля скоростей жидкости в пористом слое и слое вне пористой среды.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.

2. Леонтьев Н.Е. Течения в пористой среде вокруг цилиндра и сферы в рамках уравнения Бринкмана с граничным условием Навье // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 2. С. 107–112.

3. Тактаров Н.Г. Движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением пористого шара // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 133–138.

4. Тактаров Н.Г. Конвекция намагничивающихся жидкостей в пористых средах // Магнитная гидродинамика. 1981. № 4. С. 33–35.

5. Brinkman H.C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dence swarm of particles // Appl. Sci. Res., 1947. Vol. 1. pp. 27–34.

MSC 76N20

The effect of the translational-oscillatory motion of a plane layer on the fluid flow

N.A. Khramova [1]

Mordovian State Pedagogical Institute named after Evsevyev [1]