

УДК 519.633

О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн

М.Е.Ладонкина^{1,2}, О.А.Неклюдова^{1,2}, В.В.Остапенко^{2,3}, В.Ф.Тишкин^{1,2}

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН¹, Институт
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН², Новосибирский
государственный университет³

В классической работе [1], широко известной в связи со схемой распада разрыва, было введено понятие монотонности двухслойной по времени схемы и показано, что среди линейных разностных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Развитие теории численных методов сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого "запрета Годунова". Были разработаны различные классы как разностных, так и проекционных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций.

Для определения точности схемы в областях влияния ударных волн необходимо рассчитывать разрывные решения квазилинейных систем законов сохранения с ударными волнами, распространяющимися с переменной скоростью, за фронтами которых формируется непостоянное решение. Такое решение для систем законов сохранения, как правило, не описывается точными формулами и для определения скорости сходимости к нему разностного решения необходимо проведение серии расчётов на последовательности сжимающихся сеток.

Изучена точность разрывного метода Галеркина [2] при расчете разрывных решений квазилинейной гиперболической системы законов сохранения с ударными волнами, распространяющимися с переменной скоростью. В качестве конкретного примера рассмотрена аппроксимация системы законов сохранения теории мелкой воды. На примере этой системы показано, что подобно TVD- и WENO-схемам [3-5] повышенного порядка аппроксимации на гладких решениях, разрывный метод Галеркина [6], не смотря на высокую точность на гладких решениях и при локализации ударных волн, снижает свой порядок сходимости до первого порядка в областях влияния ударных волн.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №17-01-00361-а, 16-01-00333.

Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб., 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998. V. 1697. P. 151-268.
3. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О сходимости разностных схем сквозного счёта // Докл. АН., 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603.
4. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О реальной точности разностных схем сквозного счета // Матем. моделир., 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74.
5. Михайлов Н.А. О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир., 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.
6. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф., Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Мат. модел., 2012. Т. 24. № 12. С.124-128.

MSC 65N30

On the accuracy of the discontinuous Galerkin method in the calculation of shock waves

M.E. Ladonkina^{1,2}, O.A. Neklyudova^{1,2}, V.V. Ostapenko^{2,3}, V.F. Tishkin^{1,2}

Keldysh Institute of Applied Mathematics¹, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics², Novosibirsk State University³