УДК 517.938

Дискретные динамические системы с соленоидальными множествами седлового типа *

Н.В. Исаенкова [1], Е.В. Жужома [2]

Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации[1],
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»[2]

Соленоиды изучаются в таких разделах математики, как топология, теория групп и теория динамических систем. Как инвариантное множество динамической системы, соленоид впервые появился в книге "Качественная теория дифференциальных уравнений" В.В. Немыцкого и В.В. Степанова [1]. В этой книге соленоид рассматривался как объект теории динамических систем и был использован для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, который состоит из почти периодических траекторий.

Соленоид впервые был введен Виеторисом в 1927 году, как пример однородного множества. Однородность означает, что локальная структура соленоида одинакова во всех его точках. С топологической точки зрения, *соленоид* – это множество, представимое в виде пересечения последовательности полноторий $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{B}_i \supset \ldots$, таких, что для любого $i \geq 1$ ось полнотория $\mathcal{B}_{i+1}$ обходит $n_i \geq 2$ раз ось полнотория $\mathcal{B}_i$, не образуя крюков.

В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел С. Смейл, который построил несколько примеров структурно устойчивых и Ω-устойчивых диффеоморфизмов с притягивающими инвариантными множествами. Классическую конструкцию Смейла [2] можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, а затем сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем промежуточный полноторий вкладывается в исходный так, чтобы его ось прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория с сохранением дисковой структуры.

Напомним ряд определений перед тем, как перейти к формулировке основного результата. Пусть $f: M \to M$ – диффеоморфизм замкнутого многообразия M, наделенного некоторой римановой метрикой ρ. Инвариантное множество $\Lambda \subset M$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное df-инвариантное разложение касательного расслоения $T_\Lambda M$ в сумму $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ устойчивого и неустойчивого подрасслоений таких, что:

$$\|df^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \quad \|df^{-n}(w)\| \leq C\lambda^n \|w\|, \quad \forall v \in E^s_\Lambda, \forall w \in E^u_\Lambda, \forall n \in \mathbb{N},$$

для некоторых фиксированных чисел $C > 0$ и $0 < \lambda < 1$. Для $x \in \Lambda$ множества

$$W^s(x) = \{y \in M : \lim_{j\to\infty} \rho(f^j(x), f^j(y)) \to 0\}, W^u(x) = \{y \in M : \lim_{j\to\infty} \rho(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \to 0\}$$

являются гладкими инъективно вложенными подмногообразиями, при этом E^s_x и E^u_x являются касательными пространствами к W^s_x и W^u_x соответственно. Множество $W^s(x)$ ($W^u(x)$) называется *устойчивым* (*неустойчивым*) многообразием точки x.

Неблуждающее множество $NW(f)$ определяется как множество неблуждающих точек и является f-инвариантным и замкнутым. Точка $x \in M$ является *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U пересечение $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ для бесконечного множества целых n.

Диффеоморфизм f называется *A-диффеоморфизмом*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$ [2]. Согласно теореме Смейла [2] о спектральном разложении, множество $NW(f)$ любого A - диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения непересекающихся *базисных*

*Результаты работы получены при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01041).

множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ таких, что каждое Ω_i является замкнутым, f-инвариантным и содержит всюду плотную в Ω_i орбиту. Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно отлично от изолированной периодической орбиты. Множество Ω_i называется *аттрактором*, если существует окрестность U этого множества такая, что $\cap_{j\geq 0} f^j(U) = \Omega_i$. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}. Аттрактор Ω называется *растягивающимся*, если топологическая размерность Ω совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки.

Из статьи [3] следует, что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до некоторого диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А Смейла, замкнутого 3-многообразия с двумя базисными множествами, являющимися соленоидами, но при этом, одно базисное множество является аттрактором, а второе - репеллером.

Главным результатом данной работы является построение примера диффеоморфизма, который имеет одномерное соленоидальное базисное множество с неустойчивым и устойчивым инвариантными многообразиями произвольной ненулевой (наперед заданной) размерности. В этом случае базисное множество будет иметь седловой тип (не будет являться ни аттрактором, ни репеллером). Построенный диффеоморфизм с положительной топологической энтропией и в некоторой окрестности базисного множества диффеоморфизм является консервативным. Хотелось бы отметить, что сформулированная ниже теорема является обобщением основных результатов работ [4], [5].

Теорема. Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n-1$ существует А-диффеоморфизм $F : M^n \to M^n$ некоторого замкнутого многообразия M^n такого, что неблуждающее множество $NW(F)$ диффеоморфизма F содержит одномерное базисное множество Λ, являющееся топологическим соленоидом, с размерностями устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий $\dim W^s(x) = k$, $\dim W^u(x) = n-k+1$ соответственно для всех точек $x \in \Lambda$. Более того, F имеет положительную топологическую энтропию, и в некоторой окрестности множества Λ якобиан диффеоморфизма F равен единице.

Литература

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория тифференциальных уравнений. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 448 с.

2. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. pp. 747-817.

3. Bothe H. The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds // Math. Nachr. 1983. V. 112. pp. 69-102.

4. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б. О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы "динамо") // Успехи физ. наук. 1972. Т. 106. С. 431-457.

5. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., Медведев В.С. Об одной модели быстрого кинематического динамо // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 1. С. 14-28.

MSC 37D20 37G30

Discrete dynamical systems with solenoid saddle-type sets

N. V. Isaenkova [1], E. V. Zhuzhoma [2]

Nizhniy Novgorod Academy of the Ministry of the Interior of the Russian Federation [1],
National research University "Higher school of Economics"[2]