УДК 517.9

Вычисление потока тепла в задаче о течение Пуазейля в пространстве между двумя параллельными плоскостями с зеркально-диффузным граничным условием Максвелла *

О.В. Гермидер [1], В.Н. Попов [1]

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова[1]

Развитие новых нанотехнологий требует разработки методов математического моделирования пространственных течений разреженного газа [1]. В представленной работе рассматриваются установившееся течение газа в канале, образованном между двумя параллельными бесконечными пластинами, расположенными в плоскостях $y' = \pm b'/2$ декартовой системы координат, где b' – расстояние между ними. Движение газа обусловлено действием постоянного малого по абсолютной величине градиента давления, параллельного стенкам канала. Направление Oz' совпадает градиентом давления. Изменение состояния газа будем описывать уравнением Вильямса, которое для станционарного режима течения газа в выбранной системе координат имеет вид [2]:

$$v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f), \tag{1}$$

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T_*}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2\right). \tag{2}$$

где $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, $\mathbf{v}$ – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор, l_g – средняя длина свободного пробега молекул газа, $\gamma = 5\sqrt{\pi}/4$, T_0 – температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат, m – масса молекул газа, k_B – постоянная Больцмана. Параметры n_*, T^* и $\mathbf{u}_*$ в функции (2) выбираем из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворял законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [3].

В качестве граничного условия на стенках канала используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла [4]:

$$f^+(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = (1-\alpha) f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})) + \alpha f_M(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}\mathbf{n} > 0,$$

$$f_M(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = n(\mathbf{r}'_\Gamma) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{r}'_\Gamma)}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T(\mathbf{r}'_\Gamma)}\mathbf{v}^2\right), \tag{3}$$

где α – коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа, $f^-(\mathbf{r}'_\mathbf{\Gamma}, \mathbf{v})$ – функция распределения падающих молекул газа на обтекаемую поверхность Γ, $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности Γ, направленный в сторону газа, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}$ – радиус-вектор и скорость молекул газа, m – масса молекул газа, k_B – постоянная Больцмана, $T_\Gamma = T(\mathbf{r}'_\Gamma)$, $n_\Gamma = n(\mathbf{r}'_\Gamma)$ – температура и концентрация газа на обтекаемой поверхности.

Линеаризуем локально-равновесную функцию распределения (3) с параметрами, заданными на стенках канала, относительно абсолютного максвеллиана. Здесь $\beta = m/(2k_B T_0)$,

*Работа выполнена при финансовой поддержки РФФИ по научному проекту 16-29-15116 офи_м.

$\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа. В качестве размерного масштаба длины выбираем при этом b'. Предполагаем, что температура, которая поддерживается в канале, является постоянной. Учитывая при этом, что $|G_p| \ll 1$ (G_p – безразмерный градиент давления) и $p(z) = n(z)k_B T$, приходим к следующим выражениям

$$f_M(z, \mathbf{C}) = f_0(C)\left(1 + G_p z\right), \tag{4}$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C)\left(1 + G_p z + h(y, \mathbf{C})\right). \tag{5}$$

Представляя функцию $h(y, \mathbf{C})$ в виде:

$$h(y, \mathbf{C}) = \gamma Kn G_p C_z Z_0(y, C_y), \tag{6}$$

раскладываем $Z_0(y, C_y)$ по ортогональным функциям $e_1 = 1$, $e_2 = 1/C - 3\sqrt{\pi}/8$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю интеграла $(f_1, f_2) = \int\limits_0^{+\infty} g(C) f_1(C) f_2(C) dC$):

$$Z_0(y, C_y) = Z_1(y, \mu) + \left(\frac{1}{C} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\right) Z_2(y, \mu),$$

где $\mu = \sin\varphi \sin\theta$, а углы φ и θ отсчитываются от положительных направлений осей C_x и C_z в пространстве скоростей, соответственно.

Подставляя (6) в (1), в силу ортогональности функций e_1, e_2 приходим к системе двух незацепленных уравнений

$$\frac{\partial Z_1}{\partial y}\mu\gamma Kn + Z_1(y, \mu) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} = \frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta' \sin\theta' d\theta' \int\limits_0^{2\pi} Z_1(y, \mu) d\varphi', \tag{7}$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial y}\mu\gamma Kn + Z_2(y, \mu) + 1 = 0, \tag{8}$$

с граничными условиями

$$Z_i(\pm 1/2, \mu) = (1 - \alpha) Z_i(\pm 1/2, -\mu), \quad \pm\mu < 0, \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Исходя из статистического смысла функции распределения, отличная от нуля компонента вектора потока тепла определяется выражением [4]:

$$q_z'(y) = \frac{m}{2}\int (v_z - u_z(x', y'))|\mathbf{v} - \mathbf{u}(y)|^2 f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \frac{p_0}{\beta^{1/2}} q_z(x, y),$$

где безразмерная компонента вектора потока тепла:

$$q_z(y) = \pi^{-3/2}\int \exp\left(-C^2\right) C_z \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) d^3\mathbf{C} =$$
$$= -\frac{G_p \gamma Kn}{4\pi^{3/2}}\int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} Z_2(y, \mu) d\varphi. \tag{10}$$

Приведенный поток тепла J_Q в пространстве между двумя параллельными плоскостями определяем, следуя [6] как

$$J_Q = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{1/2} q_z(y) dy. \tag{11}$$

Из (10) следует, что функция $Z_1(y, \mu)$ не вносит вклада в вектор потока тепла. Следовательно, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(y, \mu)$ из уравнения (8) с граничным условием (9). Далее для функции $Z_2(y,\mu)$ нижний индекс будем опускать, т.е $Z(y,\mu) \equiv Z_2(y,\mu)$.

Для решения краевой задачи (8), (9) представим уравнение (8) в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{r}_\perp}\mathbf{C}_\perp \gamma Kn \sin\theta + C_\perp Z(y,\mu) + C_\perp = 0, \tag{12}$$

$$\mathbf{C} = (C_\perp \cos\varphi, C_\perp \sin\varphi, C_z)\,, \quad \mathbf{C}_\perp = (C_\perp \cos\varphi, C_\perp \sin\varphi)\,, \quad C_\perp = C\sin\theta.$$

Здесь $\mathbf{C}_\perp$ – вектор проекции $\mathbf{C}$ на плоскость, перпендикулярную оси z. Применим подход, использованный в [5]. В результате имеем

$$Z(y,\mu) = \frac{\alpha \exp\left(-\dfrac{2y+1}{2\gamma Kn\mu}\right)}{1-(1-\alpha)\exp\left(-\dfrac{1}{\gamma Kn\mu}\right)} - 1, \quad 0 \le \varphi < \pi; \tag{13}$$

$$Z(y,\mu) = \frac{\alpha \exp\left(-\dfrac{2y-1}{2\gamma Kn\mu}\right)}{1-(1-\alpha)\exp\left(\dfrac{1}{\gamma Kn\mu}\right)} - 1, \quad \pi \le \varphi < 2\pi. \tag{14}$$

Подставляя выражения (13) и (14) в (10) с учетом того, что $Z_2(y,\mu) \equiv Z(y,\mu)$, получим формулу для безразмерной z-компоненты вектора потока тепла $q_z(y)$:

$$q_z(y) = \frac{G_p \gamma Kn}{3\sqrt{\pi}} - \frac{\alpha G_p \gamma Kn}{4\pi^{3/2}} \int\limits_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int\limits_0^\pi \frac{\exp\left(-\dfrac{2y+1}{2\gamma Kn\mu}\right)}{1-(1-\alpha)\exp\left(-\dfrac{1}{\gamma Kn\mu}\right)} d\varphi d\theta -$$

$$- \frac{\alpha G_p \gamma Kn}{4\pi^{3/2}} \int\limits_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int\limits_\pi^{2\pi} \frac{\exp\left(-\dfrac{2y-1}{2\gamma Kn\mu}\right)}{1-(1-\alpha)\exp\left(\dfrac{1}{\gamma Kn\mu}\right)} d\varphi d\theta. \tag{15}$$

Таким образом, в представленной работе с использованием зеркально-диффузных граничных условий Максвелла построено аналитическое решение задачи о течении Пуазейля в канале, образованном двумя параллельными плоскостями. Получены выражения для компоненты вектора потока тепла и самого приведенного потока.

Литература

1. Titarev V. A., Utyuzhnikov S. V., Chikitkin A. V. OpenMP + MPI parallel implementation of a numerical method for solving a kinetic equation // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. № 4. pp. 1919–1928.

2. Гермидер О. В., Попов В. Н. Математическое моделирование процесса переноса тепла в прямоугольном канале в задаче о течении Пуазейля // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 1401–1409.

3. Латышев А. В., Юшканов А. А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография. М.: МГОУ, 2004. 271 с.

4. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.

5. Лесскис А. Г., Юшканов А. А., Яламов Ю. И. Магнитное дипольное поглощение инфракрасного излучения мелкой металлической частицей // Поверхность. 1987. Т. 11. С. 115–121.

6. Шарипов Ф. М., Селезнев В. Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. 230 с.

MSC 35F30

Calculation of the heat flux in the Poiseuille flow problem in the space between two parallel planes with a mirror-diffusive Maxwell boundary condition

O.V. Germider [1], B.N. Popov [1]

Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov [1]