УДК 532.5:517.9

Динамическая устойчивость упругих пластин, взаимодействующих со слоистыми течениями *

П.А. Вельмисов [1], У.Д. Мизхер [1], Е.П Семенова [1]

Ульяновский государственный технический университет [1]

Рассмотрим задачу об устойчивости движения деформируемых пластин с учетом взаимодействия с течением вязкой жидкости, мало отличаюшимся от слоистого. Уравнения движения вязкой жидкости имеют вид:

$$\begin{gathered}\rho(u_t + uu_x + vu_y) = -P_x + \mu(u_{xx} + u_{yy}),\\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) = -P_y + \mu(v_{xx} + v_{yy}),\\ u_x + v_y = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Положим в (1)

$$u = U(y,t) + \varepsilon\bar{u}(x,y,t), \quad v = \varepsilon\bar{v}(x,y,t), \quad P = \alpha(t) + \theta(t)x + \varepsilon\bar{P}(x,y,t). \tag{2}$$

где ε - малый параметр, характеризующий порядок возмущения слоистого течения, $\alpha(t), \theta(t)$- заданные функции. Функция $U(y,t)$ является решением неоднородного уравнения теплопроводности

$$\rho U_t = \mu U_{yy} - \theta(t). \tag{3}$$

Оставляя в (1) члены порядка ε, для функций $\bar{u}, \bar{v}, \bar{P}$ получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}\rho(\bar{u}_t + U\bar{u}_x + U_y\bar{v}) = -\bar{P}_x + \mu(\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy}),\\ \rho(\bar{v}_t + U\bar{v}_x) = -\bar{P}_y + \mu(\bar{v}_{xx} + \bar{v}_{yy}),\\ \bar{u}_x + \bar{v}_y = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

В дальнейшем черту над переменными будем опускать. Умножив первое уравнение системы (4) на u, и второе уравнение системы (4) на v, сложив полученные уравнения, с учетом уравнения неразрывности (третье уравнение системы (4)), получим

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\rho(u^2+v^2)_t = -\tfrac{1}{2}\rho U(u^2+v^2)_x - \rho U_y uv - (uP)_x - (vP)_y +\\ +\mu(uu_x + vv_x)_x + \mu(uu_y + vv_y)_y - \mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2).\end{gathered} \tag{5}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$J = \frac{1}{2}\rho \iint\limits_S (u^2+v^2)\,dS, \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

где S - некоторая область. Для производной $\frac{\partial J}{\partial t}$, используя формулу Грина, согласно (5) имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial J}{\partial t} = \oint\limits_L [-\tfrac{1}{2}\rho U(u^2+v^2) - uP + \mu(uu_x + vv_x)]\,dy - \\ -[\mu(uu_y + vv_y) - vP]dx - \iint\limits_S [\mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + \rho U_y uv]\,dS,\end{gathered} \tag{7}$$

где L - граница области S. Рассмотрим движение жидкости в канале с горизонтальными стенками в предположении, что на входе в канал $x = a$ и на выходе из него $x = d$ возмущения слоистого течения отсутствуют ($u = v = 0$), тогда из (7) имеем

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\oint\limits_L [\mu(uu_y + vv_y) - vP]dx - \iint\limits_S [\mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + \rho U_y uv]\,dS. \tag{8}$$

В случае, когда нижняя стенка канала ($y = 0$) неподвижная, а верхняя ($y = h$) движется параллельно оси x по заданному закону $U_0(t)$, при этом задан градиент давления $\partial P/\partial x = \theta$, функция $U(y,t)$ является решением уравнения (3) при следующих граничных условиях

$$U(0,t) = 0, \quad U(h,t) = U_0(t). \tag{9}$$

В этом случае решение задачи (3), (9), используя метод Галеркина, можно построить в виде

$$U(y,t) = U_0(t)\frac{y}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{h}. \tag{10}$$

Если $U = U_0 = const$, $\theta = \theta_0 = const$, то имеем течение установления

$$U(y,t) = \frac{\theta_0}{2\mu}y^2 + (\frac{U_0}{h} - \frac{\theta_0}{2\mu}h)y + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\nu\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n y. \tag{11}$$

где $\nu = \mu/\rho$ - кинематическая вязкость, а коэффициенты C_n определяются из начального условия $U(y,0) = g(y)$.

Пусть стенка $y = 0$ содержит вязкоупругий элемент, динамика которого описывается следующими уравнением и граничными условиями

$$\begin{gathered}L(w(x,t)) = -P(x,0,t), \quad v(x,0,t) = \dot{w}(x,t), \quad u(x,0,t) = 0, \quad x \in (b,c) \\ L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' + \xi\dot{w}'''' - \eta\ddot{w}'' + Nw'' + \gamma\dot{w} + \beta w.\end{gathered} \tag{12}$$

При записи уравнения (12) в выражении для давления опущены члены ($\alpha + \theta x$), не влияющие на исследования устойчивости по начальным данным. Учитывая, что $u = v = 0$ на плоскости $y = h$ и на недеформируемых частях плоскости $y = 0$, и принимая во внимание (12), из (8), получим

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leq -\int\limits_b^c \dot{w}L(w)dx - \iint\limits_S [2\mu\frac{l^2+h^2}{l^2h^2}(u^2+v^2) + \rho U_y(y,t)uv]\,dS, \tag{13}$$

где $l = (d-a)-$длина канала. Из неравнства (13) следует, что условие устойчивости движения пластины имеет вид: $N \leq \frac{2D}{l^2}$. Это условие является условием положительности квадратичной формы, возникающей в результате преобразования подинтегрального выражения $\dot{w}L(w)$. Его необходимо дополнить условием положительности квадратичной формы, входящей под знак двойного интеграла

$$\max_{y,t} U_y^2(y,t) < 16\frac{\nu^2}{h^4}(1+\delta^2)^2, \quad \delta = \frac{h}{l}. \tag{14}$$

В случае стационарного течения сдвига при отсутствии градиента давления $U(y) = U_0 y/h$. Тогда (14) принимает вид $Re < 4(1+\delta^2)$, где $Re = U_0 h/\nu$ - число Рейнольдса. Для достаточно длинного канала $(\delta \ll 1) Re < 4$. В случае возмущения стационарного сдвигового течения с градиентом давления $\theta_0 < 0$ согласно (11), (14) имеем

$$(U_0 - \frac{\theta_0 h^2}{2\mu})^2 < \frac{16\nu^2}{h^2}(1+\delta^2)^2.$$

При $U_0 = 0$, имеем ограничение сверху на значения модуля градиента давления θ_0.

Исследование динамики пластины проводились также для нелинейной модели, учитывающей демпфирование продольного усилия и изгибающего момента упругого элемента

$$mV_{tt}(x,t) - G_x(x,t) - \tau G_{xt}(x,t) + f(x,t,V,W,V_t,W_t) = F_x,$$

$$mW_{tt}(x,t) - [W_x(x,t)(G(x,t) + \tau G_t(x,t))]_x + M_{xx} + \gamma M_{txx}(x,t) + g(x,t,V,W,V_t,W_t) = F_y$$

Здесь V и W- продольная и поперечная деформации упругого элемента; $G(x,t) = EF(V_x + \frac{1}{2}W_x^2)$ - продольное усилие; $M(x,t) = EJ\dfrac{W_{xx}}{\Big[1+2\big(V_x+\frac{1}{2}W_x^2\big)\Big]^{3/2}}$ - изгибающий момент; EF - жесткость на растяжение; EJ - жесткость на изгиб; $f(x,t,V,W,V_t,W_t)$, $g(x,t,V,W,V_t,W_t)$ – функции, описывающие некоторые внешние (напремер, управляющие) воздействия на упругий элемент; τ, γ - коэффициенты депфирования на растяжение и изгиб; F_x, F_y - касательная и нормальная составляющие гидродинамической силы, действующей на пластину. Полагая пригибы малыми, можно положить $M(x,t) = EJ\Big[W_{xx} - 3\big(V_x + \frac{1}{2}W_x^2\big)W_{xx}\Big]$, часто полагают также $M(x,t) = EJW_{xx}$.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
3. Ван–Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 311 с.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
5. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

MSC 76D05 35B40

Dynamic stability of elastic plates interacting with layered currents

P.A. Velmisov [1], U.J. Mizher [1], E.P. Semenova [1]
Ulyanovsk State Technical University [1]