

УДК 517.9; 519.6

## Асимптотический анализ уравнений Клейна-Гордона-Фока с чисто кубической нелинейностью \*

Алексеева Е.С.<sup>1</sup>, Рассадин А.Э.<sup>1</sup>

Нижегородское математическое общество<sup>1</sup>

Нелинейные волновые уравнения являются математическими моделями широкого класса физических процессов [1] - [2]. Некоторые из таких уравнений, например, уравнение sin-Гордон:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0$$

интегрируются методом обратной задачи рассеяния (см. [1] - [2] и ссылки там). Однако задача Коши для большинства встречающихся на практике уравнений этого типа не поддаётся аналитическому исследованию, и для построения их решений применяется пенлеве-анализ [2], групповой анализ [3] и т. д.

В представленном докладе найдены асимптотические решения уравнений Клейна-Гордона-Фока с чисто кубической нелинейностью (УКГФ) как без учёта линейного затухания:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 = 0 \quad (1)$$

так и с его учётом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 = 0, \quad (2)$$

где  $0 < \delta \ll 1$  - малый коэффициент линейного затухания.

Для построения асимптотического решения УКГФ без учёта затухания с помощью теории модуляции Уизема [1] сначала надо найти его решение типа бегущей волны.

Подставляя в уравнение (1)  $u(x, t) = U(\vartheta)$ , где

$$\vartheta = \frac{\Omega t - \kappa x}{\sqrt{\Omega^2 - \kappa^2}}$$

- автомодельная переменная ( $\Omega$  и  $\kappa$  - произвольные постоянные, подчиняющиеся условию  $|\Omega| > |\kappa|$ ), получим, что неизвестная функция  $U(\vartheta)$  удовлетворяет вырожденному уравнению Дурффинга:

$$\frac{d^2 U}{d\vartheta^2} + U^3 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет точное решение, выражающееся через эллиптический косинус (см. [4] и ссылки там):

$$U(\vartheta) = A \operatorname{cn} \left[ A \vartheta, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad (4)$$

где  $A$  - амплитуда нелинейных колебаний.

Далее, на основе решения (4) уравнения (3) в рамках подхода, развитого в [5], для плотности энергии модулированной волны  $h(x, t)$  выведено квазилинейное уравнение:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad h(x, 0) = h_0(x), \quad x \in R, \quad (5)$$

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-08-01356-а.

где локальная скорость переноса энергии равна:

$$v(h) = \frac{h^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2 + \sqrt{3}}{h^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2 - \sqrt{3}}, \quad (6)$$

а  $h_0(x)$  - всюду неотрицательное начальное распределение плотности энергии волны.

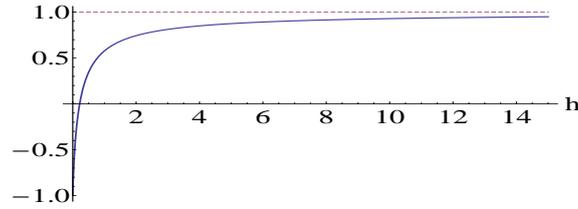


Рис. 1. Локальная скорость переноса энергии

График функции (6) представлен на рис. 1. Из него видно, что  $\lim_{h \rightarrow +\infty} v(h) = 1$ . Это означает, что если  $h_0(x) \gg 1$ , то  $h(x, t) \approx h_0(x - t)$ .

Амплитуда  $A(x, t)$  модулированной волны - асимптотического решения УКГФ (1), профиль которого даётся формулой (4), выражается через решение уравнения (5) согласно:

$$A(x, t) = \sqrt{2} h^{\frac{1}{4}}(x, t). \quad (7)$$

Поведение решения уравнения (5) до наступления градиентной катастрофы может быть исследовано методом характеристик [1], а после наступления градиентной катастрофы - с помощью принципа абсолютного минимума Олейник-Лакса [6].

В докладе приведен ряд точных решений задачи Коши для уравнения (5), например, если

$$h_0(x) = \left[ (2 - \sqrt{3}) \frac{1 + m \exp(-\alpha x^2)}{1 - m \exp(-\alpha x^2)} \right]^{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad (8)$$

где  $0 < m < 1$  и  $\alpha > 0$ , то

$$h(x, t) = \left[ (2 - \sqrt{3}) \frac{1 + m \exp(-\alpha x^2)(1 + S(x, t))}{1 - m \exp(-\alpha x^2)(1 + S(x, t))} \right]^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \quad (9)$$

с функцией

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{\alpha(n+1)} mt)^n}{(n+1)!} H_n(\sqrt{\alpha(n+1)} x) \exp(-n\alpha x^2),$$

выражающейся через полиномы Чебышёва-Эрмита:

$$H_n(\zeta) = (-1)^n \exp(\zeta^2) \frac{d^n}{d\zeta^n} \exp(-\zeta^2).$$

Разумеется, выражение (9) справедливо только до наступления градиентной катастрофы, которая в данном случае происходит в точке  $x_c = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$  в момент времени  $t_c = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{e}{2\alpha}}$ .

На рис. 2 приведены графики, иллюстрирующие временную эволюцию амплитуды (7) модулированной волны при начальной плотности энергии волны (8) с параметрами  $m = 0,8$  и  $\alpha = 1$ . Пунктирная линия на рис. 2 соответствует начальному профилю амплитуды волны в этом случае, а сплошная линия отвечает амплитуде волны непосредственно перед градиентной катастрофой.

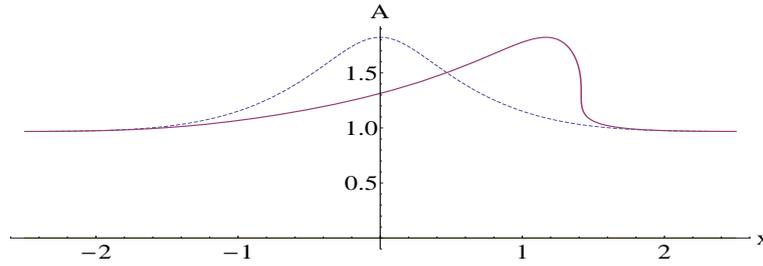


Рис. 2. Эволюция огибающей модулированной волны

Для УКГФ с учётом линейного затухания также ищется его автомодельное решение в виде волны, бегущей со скоростью  $V$ :

$$u(x, t) = \sqrt{1 - \frac{1}{V^2}} W(\tau), \quad \tau = t - \frac{x}{V}, \quad |V| > 1. \quad (10)$$

Подставляя формулы (10) в уравнение (2), найдём, что неизвестная функция  $W(\tau)$  должна удовлетворять вырожденному уравнению Дуффинга с затуханием:

$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} + 2\gamma \frac{dW}{d\tau} + W^3 = 0, \quad \gamma = \frac{\delta V^2}{V^2 - 1}. \quad (11)$$

С другой стороны, ещё П. Пенлеве было известно [7], что уравнение:

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + 2\gamma \frac{dw}{d\tau} + w^3 + \frac{8\gamma^2}{9} w = 0 \quad (12)$$

имеет следующее точное решение [7]:

$$w(\tau) = A_0 \exp\left(-\frac{2\gamma\tau}{3}\right) \operatorname{cn}\left[\theta_0 + \frac{2A_0}{3\gamma} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\gamma\tau}{3}\right)\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad (13)$$

где  $A_0$  и  $\theta_0$  - произвольные постоянные.

Далее, если параметр  $\gamma$  мал:  $\gamma \ll 1$ , то уравнение (12) слабо отличается от уравнения (11), следовательно, можно принять, что:

$$W(\tau) \approx w(\tau). \quad (14)$$

Таким образом, при слабом затухании формулы (10), (13) и (14) дают нам асимптотический вид формы этой волны. Отметим, что в этом случае множество асимптотических решений уравнения (2) задаётся двумя произвольными постоянными  $A_0$  и  $\theta_0$ , а не произвольной функцией  $h_0(x)$  - начальным условием для уравнения (5).

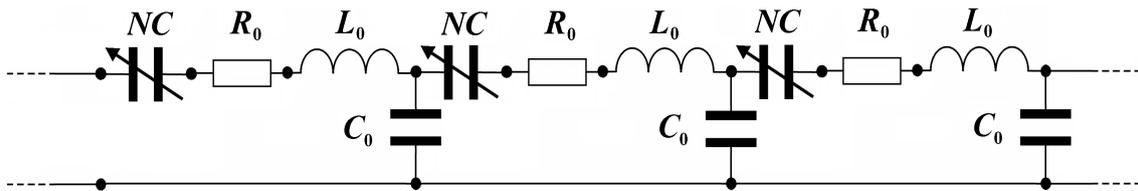


Рис. 3. Электрическая схема однородной цепочки с сегнетоэлектрическими конденсаторами

В докладе приведены графики, демонстрирующие близость асимптотического решения (13) для профиля волны и численного решения уравнения (11) с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Также в докладе дана физическая интерпретация процедуры

построения этого асимптотического решения в рамках теории квазигамильтоновых систем. Удивительным здесь является то обстоятельство, что возможна и обратная процедура, а именно, отталкиваясь от выражения (13) как асимптотического решения уравнения (11), при выяснении точности этого приближения мы легко приходим к уравнению (12) [8].

Уравнения (1) и (2) могут быть применены для описания распространения волн электрического заряда в однородной цепочке с сегнетоэлектрическими конденсаторами, находящейся в термодинамическом равновесии с окружающей средой, температура которой совпадает с температурой Кюри сегнетоэлектрика. Принципиальная схема такой цепочки представлена на рис. 3. В этом случае функцию  $u(x, t)$  можно интерпретировать как безразмерный заряд на нелинейном конденсаторе NC, находящемся в точке  $x$  в момент времени  $t$ , а член с первой производной по времени в УКГФ (2) может рассматриваться как учёт влияния активного сопротивления индуктивностей в элементарных четырёхполюсниках такой цепочки.

## Литература

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
2. Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 360 с.
3. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
4. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Применение равенства Парсевала к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2018. Вып. 20. С. 57-66.
5. Костромина О. С., Потапов А. А., Ракуть И. В., Рассадин А. Э. Колебания в однородной цепочке с сегнетоэлектрическими конденсаторами с отрицательной емкостью // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2017. № 6. С. 1760703-1-6.
6. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. No. 3(75). С. 3 - 73.
7. Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta Mathematica. 1902. V. 25. P. 1-85.
8. Alekseeva E. S., Rassadin A. E. Explicit asymptotic solution of the degenerate Duffing equation // International conference on Dynamical Systems 'Shilnikov WorkShop 2017' (Nizhny Novgorod, Russia, December 15-16, 2017). Book of abstracts. P. 59.

MSC 34A45; 35A35

## Asymptotic analysis of Klein-Gordon-Fock equations with purely cubic nonlinearity

E.S. Alekseeva<sup>1</sup>, A.E. Rassadin<sup>1</sup>  
Nizhny Novgorod Mathematical Society<sup>1</sup>