

VIII Международная научная молодежная
школа-семинар «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»
имени Е.В. Воскресенского

МАТЕРИАЛЫ ДОКЛАДОВ



Саранск
2018

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН
СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

VIII Международная научная молодежная
школа-семинар «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»
имени Е.В. Воскресенского

МАТЕРИАЛЫ ДОКЛАДОВ

Саранск
16 – 20 июля 2018 г.

Саранск
2018

УДК 510:004.5
ББК В1
М341

Редакционная коллегия:

Ответственный редактор: член-корр. РАН, д.ф.-м.н. профессор В. Ф. Тишкин (г. Москва),
Зам. ответ. редактора и составитель: к.ф.-м.н. доцент П. А. Шаманаев (г. Саранск),
д.ф.-м.н. профессор И. В. Бойков (г. Пенза),
д.ф.-м.н. профессор П. А. Вельмисов (г. Ульяновск),
д.ф.-м.н. профессор В. З. Гринес (г. Н. Новгород),
д.ф.-м.н. профессор В. К. Горбунов (г. Ульяновск),
д.ф.-м.н. профессор Е. Б. Кузнецов (г. Москва),
д.ф.-м.н. профессор О. В. Починка (г. Н. Новгород),
д.ф.-м.н. профессор И. П. Рязанцева (г. Н. Новгород).

Математическое моделирование, численные методы и
М341 комплексы программ имени Е.В. Воскресенского [Электронный
ресурс]: VIII Международная научная молодежная школа-семинар
(Саранск, 16-20 июля 2018 г.) / редкол.: В.Ф. Тишкин (отв. ред.) [и
др.]. – Саранск: СВМО, 2018. – 156 с. Режим доступа:
<http://conf.svmo.ru/files/2018/ThesesSaransk2018.pdf>

ISBN 978-5901661-45-1

Настоящее издание содержит материалы докладов участников
VIII Международной научной молодежной школы-семинара "Математическое
моделирование, численные методы и комплексы программ" имени
Е.В. Воскресенского, проходившей в Национальном исследовательском Мордовском
государственном университете им. Н. П. Огарева с 16-20 июля 2018 г.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

УДК 510:004.5
ББК В1

Школа-семинар проводилась при финансовой поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований (Проект № 18-31-10024 мол_г) и частичной
поддержке Минобрнауки России (базовая часть государственного задания
1.6958.2017/8.9).

Публикуется на основании Устава Межрегиональной общественной
организации «Средне-Волжское математическое общество» (п. 2.2) и по решению
редакционно-издательского отдела СВМО.

ISBN 978-5901661-45-1

© Коллектив авторов, 2018
© Оформление. СВМО, 2018

Предисловие

Настоящее издание содержит материалы докладов VIII Международной научной молодежной школы-семинара "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" имени Е.В. Воскресенского, которая была проведена с 16 по 20 июля 2018 г. в г. Саранск (Россия). Организаторами школы-семинара выступили Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и Средне-Волжское математическое общество.

Первая молодёжная научная школа-семинар по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ организована в 2003 году. С тех пор школы-семинары стали регулярно проводится один раз в два года (чередуюсь с научными конференциями). Основателем и идейным вдохновителем научных конференций и школ-семинаров являлся талантливый ученый и организатор д.ф.-м.н. профессор Е.В. Воскресенский. Он руководил этими мероприятиями до 2008 года.

Доклады, представленные на школе-семинаре, посвящены исследованиям математических моделей в физике, химии, биологии, экономике и других областях человеческого знания. Диапазон подходов к исследованию моделей, рассмотренных в докладах, достаточно широк и включает как качественные, так и численные методы. Как правило, при использовании численных методов авторы привлекают современные компьютерные технологии, например, параллельные вычисления. Тематика докладов соответствует семинарам школы:

1. Принципы построения математических моделей.
2. Численная реализация алгоритмов математических моделей.
3. Качественные методы анализа математических моделей.
4. Пакеты прикладных программ и высокопроизводительные вычисления.

Все доклады, представленные на школе-семинаре, были предварительно прорецензированы Программным комитетом.

Организаторы благодарны всем участникам школы-семинара за интересные доклады и плодотворную дискуссию.

Программный, организационный и редакционный комитеты
VIII Международной научной молодежной школы-семинара
"Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ" имени Е.В. Воскресенского
Саранск, 16 – 20 июля 2018 года

Председатель организационного комитета –

ректор Национального исследовательского Мордовского государственного университета С. М. Вдовин (г. Саранск)

Председатель программного комитета –

член-корреспондент РАН д.ф.-м.н. профессор В. Ф. Тишкин (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва).

Главный ученый секретарь –

к.ф.-м.н. доцент П. А. Шаманаев (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, г. Саранск).

Программный комитет:

зам. председателя

программного комитета,

д.т.н., профессор

П.В. Сенин,

г. Саранск,

Россия,

д.ф.-м.н., академик РАН

Е.И. Моисеев,

г. Москва,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

А.С. Андреев,

г. Ульяновск,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

И.В. Бойков

г. Пенза,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

П.А. Вельмисов,

г. Ульяновск,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

В.К. Горбунов,

г. Ульяновск,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

В.З. Гринес,

г. Н. Новгород,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

Ю.Н. Дерюгин,

г. Саров,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

А.П. Жабко,

г. С.-Петербург,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

А.М. Камачкин,

г. С.-Петербург,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

Е.Б. Кузнецов,

г. Москва,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

С.И. Мартынов,

г. Ханты-Мансийск

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

Н.Д. Морозкин,

г. Уфа,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

О.В. Починка,

г. Н. Новгород,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

И.П. Рязанцева,

г. Н. Новгород,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

С.И. Спивак,

г. Уфа,

Россия,

д.ф.-м.н., профессор

М.Т. Терехин,

г. Рязань,

Россия,

академик АН Р. Узбекистан,

д.ф.-м.н., профессор

Ш.А. Алимов,

Kuala Lumpur,

Malaysia,

д.ф.-м.н., профессор

Л.И. Каранджулов,

г. София,

Болгария,

д.ф.-м.н., профессор,

П.П. Матус,

г. Люблин,

Польша,

академик АН Р. Узбекистан,

д.ф.-м.н., профессор

М.С. Салахитдинов,

г. Ташкент,

Узбекистан,

PhD in Mathematics,

К.С. Проданова,

г. София,

Болгария,

Dr. rer. nat., HDR

К. Pankrashkin,

Orsay,

France,

к.ф.-м.н., профессор

Д. В. Тураев,

London,

United Kingdom,

д.ф.-м.н., профессор Dr. (Phys.-Math.), Senior Lecture	А.А. Глуцюзь, К. Янгляев	Лyon, Белосток,	France, Польша.
--	-----------------------------	--------------------	--------------------

Организационный комитет:

зам. председателя

организационного комитета,

к.ф.-м.н., доцент	И.И. Чучаев,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	Л.А. Сухарев,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	Р.В. Жалнин,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	Т.Ф. Мамедова,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	С.М. Мурюмин,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	А.Ю. Павлов,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	Д.К. Егорова,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	А.Н. Тында,	г. Пенза,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	Т.А. Горшунова,	г. Москва,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	Е.В. Десяев,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	А.О. Сыромясов,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., доцент	Т.Е. Бадокина,	г. Саранск,	Россия,
к.ф.-м.н., с.н.с.	М.Н. Вишнякова,	г. Саров,	Россия,
к.ф.-м.н., с.н.с.	В.Ф. Масыгин,	г. Саранск,	Россия,
м.н.с.	Е.Е. Пескова,	г. Саранск,	Россия,
преподаватель	О.С. Язовцева,	г. Саранск,	Россия,
аспирант	Ф.В. Жданов,	г. Саранск,	Россия,
аспирант	Д.С. Сидоренко,	г. Саранск,	Россия,
аспирант	М.С. Челышов,	г. Саранск,	Россия,
аспирант	В.Г. Шабанова,	г. Саранск,	Россия,
аспирант	А.В. Бикеев,	г. Саранск,	Россия,
аспирант	Д.В. Галкин,	г. Саранск,	Россия,
программист	В.А. Атряхин,	г. Саранск,	Россия,
магистрант	П.А. Ларькин,	г. Саранск,	Россия.

СОДЕРЖАНИЕ

Тезисы докладов

Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.

Асимптотический анализ уравнений Клейна-Гордона-Фока с чисто кубической нелинейностью..... 12

Андреев А.С.

Синтез нелинейных регуляторов для управляемых механических систем..... 16

Ахуньянова С.А., Симонов П.М.

О р-адическом моделировании динамики индекса РТС..... 20

Бикеев А.В.

Математическая модель вращательно-колебательного движения цилиндрического пористого тела в вязкой жидкости..... 22

Бойков И.В., Бойкова А.И., Баулина О.А.

О непрерывном методе решения некорректных задач..... 24

Бойков И.В., Рязанцев В.А.

Об одной математической модели одновременного восстановления параметров источника магнитной аномалии в обратной задаче магниторазведки..... 26

Вельмисов П.А., Анкилов А.В.

Динамическая устойчивость упругой пластины при струйном обтекании..... 30

Вельмисов П.А., Мизхер У.Д., Семенова Е.П.

Динамическая устойчивость упругих пластин, взаимодействующих со слоистыми течениями..... 33

Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н., Изгородин В.М., Соломатина Е.Ю.

Методика расчета формирования криогенного слоя D-T смеси в сферическом контейнере 36

Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К.

Пакет программ ЛЮГОС. Методика расчета двумерных задач газовой динамики с учетом теплопроводности на подвижных неструктурированных сетках..... 38

Гермидер О.В., Попов В.Н.

Вычисление потока тепла в задаче о течении Пуазейля в пространстве между двумя параллельными плоскостями с зеркально-диффузным граничным условием Максвелла.. 40

Горбунов В.К.

Обратные задачи моделирования экономики..... 44

Гринес В.З.

О топологической классификации потоков на проективно-подобных многообразиях..... 46

Дороговцева Е.В.

Об управлении движением руки антропоморфного робота с упругими шарнирами..... 48

Жалнин Р.В., Масыгин В.Ф., Пескова Е.Е., Тишкин В.Ф.

Априорные оценки точности метода Галеркина с разрывными функциями для двумерных параболических задач 50

Жалнин Р.В., Пескова Е.Е., Стадниченко О.А., Тишкин В.Ф. Моделирование течения многокомпонентной реагирующей газовой смеси с использованием алгоритмов повышенного порядка точности.....	52
Исаенкова Н.В., Жужома Е.В. Дискретные динамические системы с соленоидальными множествами седлового типа.....	55
Исмагилова А.С., Ахметьянова А.И., Зиганшина Ф.Т. Конструирование гомодесмических реакций для циклических химических соединений....	58
Иутин Р.В., Галимова Р.К., Якупов З.Я. Трёхфакторная модель процесса уменьшения шероховатости металлических поверхностей.....	61
Калинов Е.Д. Модели и численный метод в проектировании авиаприборов.....	65
Криксин Ю.А., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Построение точных решений, содержащих разрыв, распространяющийся по неоднородному фону.....	68
Кудашкина И.В., Сутыркина Е.А. О стабилизации установившихся движений мобильного робота.....	70
Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Метод продолжения и наилучшая параметризация.....	72
Кузнецов Е.Б., Яцкий М.А. Численное решение нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.....	73
Куренков Е.Д. О гомотопических свойствах диффеоморфизмов поверхностей с одномерными пространственно расположенными базисными множествами.....	75
Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн.....	76
Павлова А.А., Иутин Р.В., Якупов З.Я. Усреднение показателя шероховатости поверхности за время обработки детали методом наименьших квадратов.....	78
Павлова А.А., Шакиров А.Ш., Галимова Р.К. Оценивание кислотности раствора в процессе получения золей методом наименьших модулей.....	82
Пашуткин Д.В. Непрерывная модель загрузки данных.....	86
Перегудова О.А. О стабилизации положения управляемых механических систем дискретными регуляторами.....	90
Починка О.В. Сценарий пересоединения в короне солнца с простой дискретизацией.....	92

Рязанцева И.П. О непрерывном регуляризованном методе третьего порядка.....	94
Тында А.Н., Сидоров Д.Н., Муфтахов И.Р. Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами.....	96
Хамидуллина З.А., Исмагилова А.С., Спивак С.И. Программная реализация алгоритма выписывания базиса НПФ из графа Вольперта....	99
Храмова Н.А. Влияние поступательно-колебательного движения плоского слоя на течение жидкости....	102
Чебоксаров В.В., Мамедова Т.Ф. Оптимизация доходов экономических агентов.....	107
Шаманаев П.А. О периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением в виде полиномиальной оператор-функции.....	110
Шемякина Т.А. Исследование системы Франкля с секвестрированными коэффициентами.....	112
Язовцева О.С., Шаманаев П.А. Частичная устойчивость математической модели управляемого движения космического аппарата.....	116
Aleksandr N. Tynda Note on approximation of the exact solutions of weakly singular integral equations.....	118
Краткие статьи	
Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Исследование поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении...	120
Белов В.Ф., Буткина А.А., Костров С.О., Шамаев А.В. Разработка алгоритма и программы расчета параметров электромагнитного излучения плоского проводника.....	126
Вельмисов П.А., Анкилов А.В., Покладова Ю.В. Динамическая устойчивость деформируемых элементов аэроупругих конструкций.....	134
Гладун А.В., Вельмисов П.А. Об управлении динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании.....	142
Сыромясов А.О., Шуршина А.С., Галкин Д.В. Модель диффузии лекарственного вещества с учетом его связывания в органической пленке.....	150

CONTENTS

Abstracts

E.S. Alekseeva, A.E. Rassadin Asymptotic analysis of Klein-Gordon-Fock equations with purely cubic nonlinearity.....	12
A.S. Andreev Synthesis of nonlinear regulators for controlled mechanical systems.....	16
S.A. Akhunyanova, P.M. Simonov On p-adic modeling of RTS index dynamics.....	20
A.V. Bikeev The mathematical model of a rotating-oscillatory motion of the porous cylindrical body in the viscous fluid.....	22
I.V. Boykov, A.I. Boykova, O.A. Baulina On a continuous method for solving ill-posed problems.....	24
I.V. Boikov, V.A. Ryazantsev On the mathematical model of simultaneous recovery of parameters of the magnetic anomaly source in the magnetic inversion problem.....	26
P.A. Velmisov, A.V. Ankilov Dynamic stability of an elastic plate in a jet flow.....	30
P.A. Velmisov, U.J. Mizher, E.P. Semenova Dynamic stability of elastic plates interacting with layered currents.....	33
E.A. Veselova, YU.N. Deryugin, V.M. Izgorodin, E.YU. Solomatina Method of calculating the formation of a cryogenic layer of D-T mixture in a spherical container.....	36
E.A. Veselova, YU.N. Deryugin, D.K. Zelenskij LOGOS software package. The method of calculating two-dimensional problems of gas dynamics, taking into account thermal conductivity on moving unstructured grids.....	38
O.V. Germider, B.N. Popov Calculation of the heat flux in the Poiseuille flow problem in the space between two parallel planes with a mirror-diffusive Maxwell boundary condition.....	40
V.K. Gorbunov Inverse problems of economy modeling.....	44
V.Z. Grines On the topological classification of flows on projective-like manifolds.....	46
E.V. Dorogovtseva On the motion control of an anthropomorphic robot with elastic hinges.....	48
R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin A priori estimates of the accuracy of the Galerkin method with discontinuous functions for two-dimensional parabolic problems	50

R.V. Zhalnin, E.E. Peskova, O.A. Stadnidchenko, V.F. Tishkin Modeling the flow of a multicomponent reactive gas mixture using high accuracy algorithms...	52
N. V. Isaenkova, E. V. Zhuzhoma Discrete dynamical systems with solenoid saddle-type sets.....	55
A.S. Ismagilova, A.I. Akhmetyanova, F.T. Ziganshina Design of homodesmic reactions for cyclic chemical compounds.....	58
R.V. Iutin, R.K. Galimova, Z.Ya. Yakupov The three-factor model of the process of roughness reduction of metal surfaces.....	61
E.D. Kalinov Models and numerical method for the design of aircraft sensors.....	65
YU.A. Kriksin, P.A. Kuchugov, M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.F. Tishkin Construction of exact solutions containing a discontinuity spreading over a non-uniform background.....	68
I.V. Kudashkina, E.A. Sutyorkina On the stabilization of the steady motions of a mobile robot.....	70
E.B. Kuznetsov, S.S. Leonov Method of solution continuation and parameterization of problems.....	72
E.B. Kuznetsov, M.A. Yatsky Numerical solution of a nonlinear boundary value problem for a system of ordinary differential equations.....	73
E.D. Kurenkov On the homotopy properties of diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional sparsely-spaced basic sets.....	75
M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.V. Ostapenko, V.F. Tishkin On the accuracy of the discontinuous Galerkin method in the calculation of shock waves.....	76
A.A. Pavlova, R.V. Iutin, Z.Ya. Yakupov Averaging of the surface roughness index during the machining time of the workpiece by the method of the least squares.....	78
A.A. Pavlova, Sh. Shakirov, R.K. Galimova Estimation of the acidity of the solution in the process obtaining sols by the method of the smallest modules.....	82
D.V. Pashutkin Continuous model of data loading.....	86
O.A. Peregudova On the position stabilization of the controlled mechanical systems by sampled-data regulators.....	90
O.V. Pochinka Scenario of reconnection in the solar corona with a simple discretization.....	92

I.P. Ryazantseva On a continuous regularized third-order method.....	94
A.N. Tynda, D.N. Sidorov, I.R. Muftahov Numerical method for systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels.....	96
Z.A. Khamidullina, A.S. Ismagilova, S.I. Spivak Software of algorithm for writing out nonlinear parametric function basis from Volppter's graph.....	99
N.A. Khramova The effect of the translational-oscillatory motion of a plane layer on the fluid flow.....	102
V.V. Cheboksarov, T.F. Mamedova Optimization of incomes of economic agents.....	107
P.A. Shamanaev On periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with small perturbation in the form of a polynomial operator function.....	110
T.A. Shemyakina A study of the Frankl system with sequestered coefficients.....	112
O.S. Yazovtseva, P.A. Shamanaev Partial stability of the mathematical model of the controlled motion of a spacecraft.....	116
Aleksandr N. Tynda Note on approximation of the exact solutions of weakly singular integral equations.....	118
Short paper	
V.N. Anisimov, V.L. Litvinov Investigation of transverse oscillations of a rope moving in longitudinal direction.....	120
V.F. Belov, A.A. Butkina, S.O. Kostrov, A.V. Shamaev Development of an algorithm and a program for calculating the parameters of the electromagnetic emission of a flat conductor.....	126
P.A. Velmisov, A.V. Ankilov, Yu.V. Pokladova Dynamic stability of deformable elements of aeroelastic structures	134
A.V. Gladun, P.A. Velmisov On control of dynamics of a deformable structural element in supersonic flow.....	142
A.O. Syromyasov, A.S. Shurshina, D.V. Galkin Model of diffusion of medicine that is bonded inside an organic film.....	150

УДК 517.9; 519.6

Асимптотический анализ уравнений Клейна-Гордона-Фока с чисто кубической нелинейностью *

Алексеева Е.С.¹, Рассадин А.Э.¹

Нижегородское математическое общество¹

Нелинейные волновые уравнения являются математическими моделями широкого класса физических процессов [1] - [2]. Некоторые из таких уравнений, например, уравнение sin-Гордон:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0$$

интегрируются методом обратной задачи рассеяния (см. [1] - [2] и ссылки там). Однако задача Коши для большинства встречающихся на практике уравнений этого типа не поддаётся аналитическому исследованию, и для построения их решений применяется пенлеве-анализ [2], групповой анализ [3] и т. д.

В представленном докладе найдены асимптотические решения уравнений Клейна-Гордона-Фока с чисто кубической нелинейностью (УКГФ) как без учёта линейного затухания:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 = 0 \quad (1)$$

так и с его учётом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 = 0, \quad (2)$$

где $0 < \delta \ll 1$ - малый коэффициент линейного затухания.

Для построения асимптотического решения УКГФ без учёта затухания с помощью теории модуляции Уизема [1] сначала надо найти его решение типа бегущей волны.

Подставляя в уравнение (1) $u(x, t) = U(\vartheta)$, где

$$\vartheta = \frac{\Omega t - \kappa x}{\sqrt{\Omega^2 - \kappa^2}}$$

- автомодельная переменная (Ω и κ - произвольные постоянные, подчиняющиеся условию $|\Omega| > |\kappa|$), получим, что неизвестная функция $U(\vartheta)$ удовлетворяет вырожденному уравнению Дуффинга:

$$\frac{d^2 U}{d\vartheta^2} + U^3 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет точное решение, выражающееся через эллиптический косинус (см. [4] и ссылки там):

$$U(\vartheta) = A \operatorname{cn} \left[A \vartheta, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad (4)$$

где A - амплитуда нелинейных колебаний.

Далее, на основе решения (4) уравнения (3) в рамках подхода, развитого в [5], для плотности энергии модулированной волны $h(x, t)$ выведено квазилинейное уравнение:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad h(x, 0) = h_0(x), \quad x \in R, \quad (5)$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-08-01356-а.

где локальная скорость переноса энергии равна:

$$v(h) = \frac{h^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2 + \sqrt{3}}{h^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2 - \sqrt{3}}, \quad (6)$$

а $h_0(x)$ - всюду неотрицательное начальное распределение плотности энергии волны.

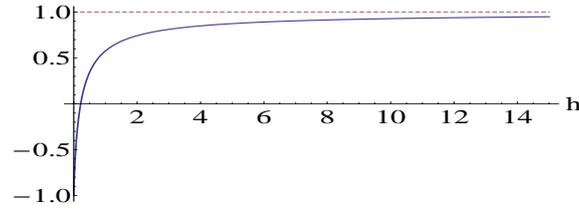


Рис. 1. Локальная скорость переноса энергии

График функции (6) представлен на рис. 1. Из него видно, что $\lim_{h \rightarrow +\infty} v(h) = 1$. Это означает, что если $h_0(x) \gg 1$, то $h(x, t) \approx h_0(x - t)$.

Амплитуда $A(x, t)$ модулированной волны - асимптотического решения УКГФ (1), профиль которого даётся формулой (4), выражается через решение уравнения (5) согласно:

$$A(x, t) = \sqrt{2} h^{\frac{1}{4}}(x, t). \quad (7)$$

Поведение решения уравнения (5) до наступления градиентной катастрофы может быть исследовано методом характеристик [1], а после наступления градиентной катастрофы - с помощью принципа абсолютного минимума Олейник-Лакса [6].

В докладе приведен ряд точных решений задачи Коши для уравнения (5), например, если

$$h_0(x) = \left[(2 - \sqrt{3}) \frac{1 + m \exp(-\alpha x^2)}{1 - m \exp(-\alpha x^2)} \right]^{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad (8)$$

где $0 < m < 1$ и $\alpha > 0$, то

$$h(x, t) = \left[(2 - \sqrt{3}) \frac{1 + m \exp(-\alpha x^2)(1 + S(x, t))}{1 - m \exp(-\alpha x^2)(1 + S(x, t))} \right]^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \quad (9)$$

с функцией

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{\alpha(n+1)} mt)^n}{(n+1)!} H_n(\sqrt{\alpha(n+1)} x) \exp(-n\alpha x^2),$$

выражающейся через полиномы Чебышёва-Эрмита:

$$H_n(\zeta) = (-1)^n \exp(\zeta^2) \frac{d^n}{d\zeta^n} \exp(-\zeta^2).$$

Разумеется, выражение (9) справедливо только до наступления градиентной катастрофы, которая в данном случае происходит в точке $x_c = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$ в момент времени $t_c = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{c}{2\alpha}}$.

На рис. 2 приведены графики, иллюстрирующие временную эволюцию амплитуды (7) модулированной волны при начальной плотности энергии волны (8) с параметрами $m = 0,8$ и $\alpha = 1$. Пунктирная линия на рис. 2 соответствует начальному профилю амплитуды волны в этом случае, а сплошная линия отвечает амплитуде волны непосредственно перед градиентной катастрофой.

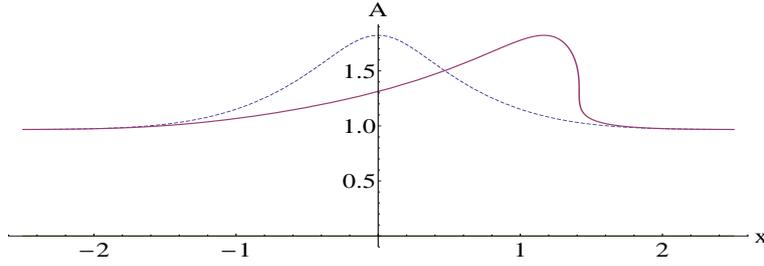


Рис. 2. Эволюция огибающей модулированной волны

Для УКГФ с учётом линейного затухания также ищется его автомодельное решение в виде волны, бегущей со скоростью V :

$$u(x, t) = \sqrt{1 - \frac{1}{V^2}} W(\tau), \quad \tau = t - \frac{x}{V}, \quad |V| > 1. \quad (10)$$

Подставляя формулы (10) в уравнение (2), найдём, что неизвестная функция $W(\tau)$ должна удовлетворять вырожденному уравнению Дуффинга с затуханием:

$$\frac{d^2W}{d\tau^2} + 2\gamma \frac{dW}{d\tau} + W^3 = 0, \quad \gamma = \frac{\delta V^2}{V^2 - 1}. \quad (11)$$

С другой стороны, ещё П. Пенлеве было известно [7], что уравнение:

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} + 2\gamma \frac{dw}{d\tau} + w^3 + \frac{8\gamma^2}{9} w = 0 \quad (12)$$

имеет следующее точное решение [7]:

$$w(\tau) = A_0 \exp\left(-\frac{2\gamma\tau}{3}\right) \operatorname{cn}\left[\theta_0 + \frac{2A_0}{3\gamma} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\gamma\tau}{3}\right)\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad (13)$$

где A_0 и θ_0 - произвольные постоянные.

Далее, если параметр γ мал: $\gamma \ll 1$, то уравнение (12) слабо отличается от уравнения (11), следовательно, можно принять, что:

$$W(\tau) \approx w(\tau). \quad (14)$$

Таким образом, при слабом затухании формулы (10), (13) и (14) дают нам асимптотический вид формы этой волны. Отметим, что в этом случае множество асимптотических решений уравнения (2) задаётся двумя произвольными постоянными A_0 и θ_0 , а не произвольной функцией $h_0(x)$ - начальным условием для уравнения (5).

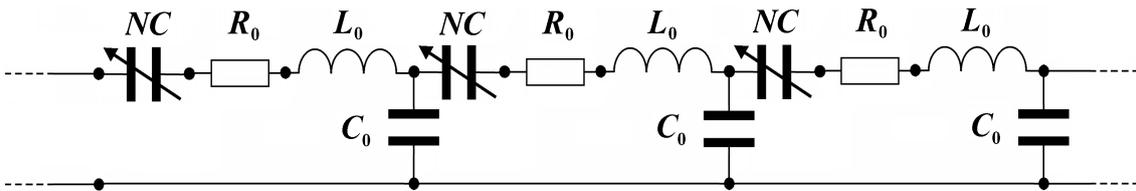


Рис. 3. Электрическая схема однородной цепочки с сегнетоэлектрическими конденсаторами

В докладе приведены графики, демонстрирующие близость асимптотического решения (13) для профиля волны и численного решения уравнения (11) с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Также в докладе дана физическая интерпретация процедуры

построения этого асимптотического решения в рамках теории квазигамильтоновых систем. Удивительным здесь является то обстоятельство, что возможна и обратная процедура, а именно, отталкиваясь от выражения (13) как асимптотического решения уравнения (11), при выяснении точности этого приближения мы легко приходим к уравнению (12) [8].

Уравнения (1) и (2) могут быть применены для описания распространения волн электрического заряда в однородной цепочке с сегнетоэлектрическими конденсаторами, находящейся в термодинамическом равновесии с окружающей средой, температура которой совпадает с температурой Кюри сегнетоэлектрика. Принципиальная схема такой цепочки представлена на рис. 3. В этом случае функцию $u(x, t)$ можно интерпретировать как безразмерный заряд на нелинейном конденсаторе NC, находящемся в точке x в момент времени t , а член с первой производной по времени в УКГФ (2) может рассматриваться как учёт влияния активного сопротивления индуктивностей в элементарных четырёхполюсниках такой цепочки.

Литература

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
2. Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 360 с.
3. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
4. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Применение равенства Парсевала к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2018. Вып. 20. С. 57-66.
5. Костромина О. С., Потапов А. А., Ракуть И. В., Рассадин А. Э. Колебания в однородной цепочке с сегнетоэлектрическими конденсаторами с отрицательной емкостью // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2017. № 6. С. 1760703-1-6.
6. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. No. 3(75). С. 3 - 73.
7. Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta Mathematica. 1902. V. 25. P. 1-85.
8. Alekseeva E. S., Rassadin A. E. Explicit asymptotic solution of the degenerate Duffing equation // International conference on Dynamical Systems 'Shilnikov WorkShop 2017' (Nizhny Novgorod, Russia, December 15-16, 2017). Book of abstracts. P. 59.

MSC 34A45; 35A35

Asymptotic analysis of Klein-Gordon-Fock equations with purely cubic nonlinearity

E.S. Alekseeva¹, A.E. Rassadin¹
Nizhny Novgorod Mathematical Society¹

УДК 531.36

Синтез нелинейных регуляторов для управляемых механических систем *

А.С. Андреев ¹

Ульяновский государственный университет¹

Проблема применения ПИД-регуляторов в управлении механическими системами исследована во многих работах [1] – [30]. Значительно меньше исследованы применение ПИ-регуляторов и задача о стабилизации движений без измерения скоростей [31] – [35]. В докладе дается обзор известных результатов по решению задач о стабилизации движений механических систем посредством управлений типа ПИ- и ПИД-регуляторов. Излагаются новые результаты в этой области на основе развития метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра [36] – [46].

Литература

1. Astrom K., Hagglund T. *Advanced PID control*. 2006.
2. Aidan O'Dwyer. *Handbook of PI and PID controller tuning rules*, 3th Edition. London: Imperial College Press, 2009.
3. Александров А.Г., Паленов М.В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // *Автоматика и телемеханика*. 2014. № 2. С. 16-20.
4. Arimoto S., Miyazaki F. Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability. In M. Brady and R.P. Paul (Ed.), *Robotics Researches: First International Symposium* MIT press, Cambridge, MA, 1984. P. 783-799.
5. Arimoto S., Naniwa T., Suzuki H. Asymptotic stability and robustness of PID local feedback for position control of robot manipulators // *Proc. ICARCV*. Singapore. 1990. P. 382-386.
6. Wen J. T., Murphy S. *PID control for robot manipulators*. CIRSSE Document 54, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY. 1990.
7. Qu Z., Dorsey J. Robust PID control of robots // *Int. Journal of Robotics and Automation*. 1991. V. 6. № 4. P. 228-235.
8. Arimoto S. A class of quasi-natural potentials and hyper-stable PID servo-loops for nonlinear robotic systems // *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*. 1994. V. 30. № 9. P. 1005-1012.
9. Kelly R. A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators // *Robotica*. 1995. V. 13. № 2. P. 141-148.
10. Ortega R., Loria A., Kelly R. A semiglobally stable output feedback PI2D regulator for robot manipulators // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1995. V. 40 (8). P. 1432-1436.

*Работа выполнена в рамках государственного задания по НИР № 9.5994.2017/БЧ Минобрнауки России.

11. Arimoto S. Fundamental problems of robot control: Part I, Innovation in the realm of robot servo-loops // *Robotica*. 1995. V. 13. P. 19-27.
12. Arimoto S. *Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems: A Passivity-Based and Circuit-Theoretic Approach*. Oxford, U.K.: Clarendon Press, 1996.
13. Rocco P. Stability of PID control for industrial robot arms // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1996. V. 12. № 4. P. 606-614.
14. Kelly R. Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1998. V. 43. № 4. P. 934-937.
15. Santibanez V., Kelly R. A class of nonlinear PID global regulators for robot manipulators // *Proceedings of the IEEE international conference on robotics and automation*. Leuven, Belgium. 1998. P. 3601-3606.
16. Gorez R. Globally stable PID-like control of mechanical systems // *Systems and Control Letters*. 1999. V. 38. P. 61-72.
17. Alvarez J., Cervantes I., Kelly R. PID regulation of robot manipulators: stability and performance // *Systems and Control Letters*. 2000. V. 41. P. 73-83.
18. Cervantes I., Alvarez-Ramirez J. On the PID tracking control of robot manipulators // *Systems and Control Letters*. 2001. V. 42. P. 37-46.
19. Alvarez J., Kelly R., Cervantes I. Semiglobal stability of saturated linear PID control for robot manipulators // *Automatica*. 2003. V. 39. P. 989-995.
20. Jafarov E. M., Parlakci M. N. A., Istefanopulos Y. A new variable structure PID-controller design for robot manipulators // *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 2005. V. 13. № 1. P. 122-130.
21. Kelly R., Santibanez V., Loria A. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
22. Meza J.I., Santibanez V., Hernandez V. Saturated nonlinear PID global regulator for robot manipulators: Passivity based analysis // *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic. 2005.
23. Meza J.L., Santibanez V., Campa R. An Estimate of the Domain of Attraction for the PID Regulator of Manipulators // *International Journal of Robotics and Automation*. 2007. V. 22. № 3. P. 187-195.
24. Alvarez J., Santibanez V. and Campa R. Stability of robot manipulators under saturated PID compensation // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2008. V. 16. № 6. P. 1333-1341.
25. Santibanez V., Kelly R., Zavala-Rio A., Parada P. A new saturated nonlinear PID global regulator for robot manipulators // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea. 2008.
26. Sun D., Hu S., Shao X., Liu C. Global stability of a saturated nonlinear PID controller for robot manipulators // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2009. V. 17. № 4. P. 892-899.
27. Orrante J., Santibanez V., Campa R. *On Saturated PID Controllers for Industrial Robots: the PA10 Robot Arm as Case of Study, Advanced Strategies for Robot Manipulators*, S. Ehsan Shafiei (Ed.), 2010. ISBN: 978-953-307-099-5, InTech.

28. Santibanez V., Camarillo K., Moreno-Valenzuela J., Campa R. A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators // *International Journal of Control, Automation and Systems*. 2010. V. 8. № 3. P. 544-555.
29. Meza J.L., Santibanez V., Soto R., Perez J. and Perez J. Analysis via passivity theory of a class of nonlinear PID global regulators for robot manipulators // *Advances in PID Control*. Chapter 3. Edited by Valery D. Yurkevich, InTech, 2011. P. 45-64. ISBN 978-953-307-267-8
30. Loria A., Lefeber E., Nijmeijer H. Global asymptotic stability of robot manipulators with linear PID and PI2D control // *Stability Control: Theory Appl*. 2000. V. 3. No. 2. P. 138-149.
31. Berghuis H., Nijmeijer H. Global regulation of robots using only position measurements // *Systems Contr. Lett*. 1993. V. 21. No. 4. P. 289-293.
32. Berghuis H., Nijmeijer H. A passivity approach to controller-observer design for robots // *IEEE Trans. Robotics Autom*. 1993. V. 9. No. 6. P. 740-754.
33. Бурков И.В. Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом // *ПММ*. 1998. Т.62. Вып. 6. С. 923-933.
34. Burkov I.V. Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements // *3-rd IEEE Multi-conf. Systems Control*. St Petersburg. 2009. P. 400-405.
35. Andreev A.S., Peregudova O.A., Makarov D.S. Motion control of multilink manipulators without velocity measurement // *Proc. 2016 Intern. Conf. Stability Oscill. Nonlin. Control Syst. (Pyatnitskiy's Conf.)*. 2016.
36. Андреев А.С., Перегудова О.А., Раков С.Ю. Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2016. № 3(18). С. 8–18.
37. Перегудова О.А., Макаров Д.С. Стабилизация программного движения манипуляционных роботов на основе измерения координат звеньев // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2016. № 4(18). С. 46–51.
38. Андреев А.С., Макаров Д.С. О стабилизации стационарных программных движений управляемой механической системы // *Ученые записки Ульяновского государственного университета. Серия Математика и информационные технологии*. 2016. Вып. 1(8). С. 10–14.
39. Андреев А.С., Раков С.Ю., Дороговцева Е.В. Об управлении трехзвенным манипулятором-роботом на основе нелинейного интегрального регулятора // *Ученые записки Ульяновского государственного университета. Серия Математика и информационные технологии*. 2016. Вып. 1(8). С. 15–17.
40. Макаров Д.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных позиций голономной механической системы без измерения скоростей // *Ученые записки Ульяновского государственного университета. Серия Математика и информационные технологии*. 2016. Вып. 1(8). С. 64–71.
41. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. Вып. 2. С.137–153.

42. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // Systems Science and Control Engineering. 2018. V. 6. No. 1. P. 12-19.
43. Andreev A.S., Bezglasnyi S.P., Peregudova O.A. On Stabilization of Stationary Program Motions of a Controlled Mechanical System // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017. P. 777-781.
44. Андреев А.С., Перегудова О.А. Нелинейные регуляторы в задачах управления механическими системами // Автоматизация процессов управления. 2017. Т. 50. № 4. С. 42-47.
45. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI and PID regulators in mechanical system control // PHYSCON 2017, Florence, Italy, 17–19 July, 2017.
46. Андреев А.С., Перегудова О.А. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 156-176.

MSC 93C10

Synthesis of nonlinear regulators for controlled mechanical systems

A.S. Andreev ¹

Ulyanovsk state university ¹

УДК 51-77

О p -адическом моделировании динамики индекса РТС

С.А. Ахуньянова¹, П.М. Симонов¹

Пермский государственный национальный исследовательский университет¹

Главной предпосылкой изучения ценовых колебаний, происходящих на финансовых рынках, с помощью методов эконофизики является схожесть физических и экономических процессов. В качестве метода моделирования финансовых процессов выбирается один из методов эконофизики — p -адический анализ [1], который наиболее детально разработан и изучен В. М. Жарковым и Н. Н. Павловой [2], В. М. Жарковым [3]. Целью исследования является применение методики p -адического моделирования и прогнозирования для колебаний цен на финансовых рынках, предметом — динамика индекса РТС.

Приведено математическое описание p -адического анализа — определение p -адических чисел и их представление в поле чисел \mathbb{Q}_p . Оно является полным метрическим (порожденным p -адической неархимедовой нормой) полем чисел, что позволяет применять p -адические числа для моделирования стохастических явлений. Элементами поля \mathbb{Q}_p являются классы эквивалентных последовательностей Коши рациональных чисел относительно p -адической нормы [1].

Построены модели основных элементарных фигур динамики цен на финансовых рынках, таких как линейная функция, ступенчатая функция и волновая модель Р. Н. Эллиотта. Сделана попытка создания методики по построению p -адических моделей и прогнозов, в соответствии с которой произведен анализ динамики индекса РТС [4], [5].

Для динамики индекса РТС построены четыре модели — по месяцам, неделям, дням и часам. Определены основные типы прогнозов, полученных на основе p -адических моделей, — оптимистичный, пессимистичный, усредненный и прогноз продолжающегося развития. Сделаны выводы о точности как p -адических моделей в зависимости от таймфреймов, так и их прогнозов в зависимости от выявленных типов [4], [5].

Найдены преимущества и недостатки p -адического анализа. Результаты исследований могут быть использованы для дальнейшего изучения волновых паттернов p -адическим отображением, применяемых не только к ценовым колебаниям, но и к другим экономическим процессам [4], [5]. Кроме того, p -адические модели могут выступать в качестве инструмента технического анализа.

Литература

1. Каток С. Б. P -адический анализ с сравнением с вещественным / Пер. с англ. П. А. Колгушкина. М.: МЦНМО, 2004. 108 с.
2. Жарков В. М., Павлова Н. Н. P -адическая аппроксимация ценовых рядов // Вестник Пермского университета. Сер. "Информационные системы и технологии". 2009. № 9(35). С. 25-29.
3. Zharkov V. Adelic theory of stock market // Market Risk and Financial Markets Modeling. Perm Winter School / Editors D. Sornette, S. Ivliev, H. Woodard. Berlin, Heidelberg e.a.: Springer-Verlag, 2012. P. 255-267.

4. Симонов П. М., Филимонова С. А. p -адическое моделирование динамики индекса РТС в зависимости от таймфреймов // Вестник Пермского университета. Сер. "Экономика-Perm University Herald. Economy. 2016. № 4(31). С. 74-85.
5. Симонов П. М., Филимонова С. А. Моделирование и прогнозирование на финансовых рынках с помощью эконометрики и эконофизики [Электронный ресурс]: монография / С. А. Ахуньянова, П. М. Симонов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Электрон. дан. Пермь, 2017. 5 Мб. Режим доступа: <https://elis.psu.ru/node/> (дата посещения: 01.04.2018).

MSC 62N02, 62N03

On p -adic modeling of RTS index dynamics

S.A. Akhunyanova¹, P.M. Simonov¹
Perm State National Research University¹

УДК 532.5

Математическая модель вращательно-колебательного движения цилиндрического пористого тела в вязкой жидкости

А.В. Бикеев¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
им. Н.П. Огарёва¹

Изучение движения твердых тел, как сплошных, так и пористых в вязкой жидкости имеет как самостоятельный научный интерес, так и в связи с разнообразными приложениями в технологических процессах, а также при изучении природных явлений.

В работе построена математическая модель влияния вращательно-колебательного движения пористого цилиндра, погруженного в вязкую жидкость, на течение этой жидкости, неподвижной на бесконечности. Пористая среда цилиндра предполагается недеформируемой, однородной и изотропной. Предполагается также, что пористая среда имеет достаточно большую пористость и высокую проницаемость. При таких свойствах пористой среды в ней могут возникать колебательные движения жидкости, в которых скорость жидкости будет заметно отличаться от скорости пористой среды.

Для описания движения жидкости в пористой среде используется уравнение Бринкмана, в котором добавлено слагаемое, учитывающее движение пористой среды. Для описания движения жидкости вне цилиндра используется уравнение Навье-Стокса. Задача решается в цилиндрической системе координат, ось которой направлена по оси пористого цилиндра. Частицы жидкости внутри и вне цилиндра будут двигаться по окружностям с центрами на оси вращения, совпадающей с осью цилиндра. Вследствие осевой симметрии относительно оси вращения градиент давления в касательном к этим окружностям направлении будет равен нулю.

На поверхности цилиндра записываются два граничных условия: условие непрерывности скорости и условие для скачка напряжений.

Уравнения движения внутри и вне цилиндра и граничные условия записываются в безразмерном виде. Уравнения в частных производных после некоторых преобразований приводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений Бесселя. Решения этих уравнений выражаются через функции Бесселя 1-го и 2-го рода.

Эти решения позволяют определить поля скоростей жидкости внутри и вне пористого цилиндра.

В частном случае, когда проницаемость пористой среды стремится к нулю, из полученного в данной работе решения получается решение, приведенное в известной монографии: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц «Гидродинамика».

В работе получены и приведены на графиках зависимости внутренней и внешней скоростей жидкости от радиальной цилиндрической координаты в данный момент времени (вследствие нестационарности движения жидкости поле скоростей изменяется со временем).

Показано, что в общем случае как внутри пористого цилиндра, так и вне него имеются слои со встречными направлениями скоростей. На поверхностях раздела этих слоев скорость жидкости обращается в нуль.

Полученные поля скоростей жидкости показывают существование внутренних поперечных волн внутри и вне цилиндра. В таких волнах скорость жидкости перпендикулярна направлению распределения волны. Вне цилиндра такие волны являются затухающими: их

амплитуда уменьшается по мере удаления от создающей их поверхности цилиндра.

Автор благодарит профессора Н. Г. Тактарова за постановку задачи и руководство работой.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.

MSC 76S99

The mathematical model of a rotating-oscillatory motion of the porous cylindrical body in the viscous fluid

A.V. Bikeev ¹

National Research Ogarev Mordovia State University ¹

УДК 519.6

О непрерывном методе решения некорректных задач

И.В. Бойков¹, А.И. Бойкова¹, О.А. Баулина¹

Пензенский государственный университет¹

Известно [1], что многие задачи физики и техники моделируются уравнениями, решение которых является некорректной задачей. В частности, к таковым относятся многие задачи геофизики, так называемые обратные задачи [2]. Для их решения разработаны различные методы регуляризации [3], в большинстве своем посвященные линейным задачам.

Значительно меньше исследованы методы решения нелинейных некорректных задач.

При решении нелинейных некорректных задач возникает задача аппроксимации неограниченного обратного оператора.

Рассмотрим в банаховом пространстве B нелинейное операторное уравнение $K(x) = 0$.

Наиболее общими методами решения нелинейных уравнений являются методы Ньютона-Канторовича: основной

$$x_{n+1} = x_n + [K'(x_n)]^{-1}K(x_n), n = 0, 1, \dots$$

и модифицированный

$$x_{n+1} = x_n + [K'(x_0)]^{-1}K(x_n), n = 0, 1, \dots$$

которые для своей реализации требуют существования линейного обратного оператора $[K'(x)]^{-1}$ в некоторой окрестности решения x^* уравнения $K(x) = 0$.

При нарушении этого условия задача становится некорректной и требует разработки методов регуляризации, которые, как правило, заключаются в аппроксимации неограниченных необратимых операторов ограниченными линейными операторами.

В работе [4] предложен и обоснован непрерывный метод решения операторных уравнений, который, при применении к нелинейным операторным уравнениям, не требует существования производных Фреше или Гато оператора $K(x)$.

Данная работа посвящена применению нелинейного операторного метода к решению некорректных задач, в частности, обратных задач геофизики.

Работа поддержана РФФИ. Грант 16-01-00594.

Литература

1. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 224 с.
2. Zhdanov M. S. Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems / M. S. Zhdanov. – N. Y. : Elsevier 2002. – 610 p.
3. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии / В. И. Старостенко. – Киев : Наукова думка, 1978. – 226 с.
4. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308 - 1314.

MSC 65N20

On a continuous method for solving ill-posed problems

I.V. Boykov ¹, A.I. Boykova ¹, O.A. Baulina¹
Penza State University¹

УДК 517.968

Об одной математической модели одновременного восстановления параметров источника магнитной аномалии в обратной задаче магниторазведки*

И.В. Бойков¹, В.А. Рязанцев¹

Пензенский государственный университет¹

Магниторазведка представляет собой совокупность методов исследования земных недр, а также поиска и изучения залежей полезных ископаемых [1]. Наряду с гравиразведкой, сейсморазведкой и электроразведкой, магниторазведка составляет основу современной промышленной геофизики. Магниторазведка базируется на поиске и интерпретации магнитных аномалий земной коры, обусловленных аномальным распределением намагничивания внутри неё и существенными различиями в магнитных свойствах горных пород.

Источники магнитного поля характеризуются вектором намагниченности \mathbf{I} , связанным с величиной напряжённости магнитного поля \mathbf{H} формулой

$$\mathbf{I} = \chi \mathbf{H},$$

где χ обозначает магнитную восприимчивость. Поскольку величина магнитной восприимчивости определяется свойствами конкретного источника аномалии, то вычисление восприимчивости позволяет судить о свойствах исследуемых магнитных материалов.

Введём в трёхмерном пространстве декартову систему координат с осью Oz , направленной вниз. Известно [1], что внешнее по отношению к источнику магнитное поле описывается формулой

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \left\{ \iiint_{\Omega} \frac{1}{\chi(\mathbf{r}')} \mathbf{I}(\mathbf{r}') \nabla' \left[\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right] \right\} d\mathbf{r}', \quad (1)$$

где Ω — объём, занимаемый источником аномалии, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $\mathbf{r}' = (\xi, \eta, \zeta)$ — радиус-векторы точек (x, y, z) и (ξ, η, ζ) , ∇ и ∇' — операторы Гамильтона. Здесь предполагается, что магнитная восприимчивость тела отлична от нуля.

Обозначим $\mathbf{I} = (I_x, I_y, I_z)$, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$. Тогда (1) можно переписать в следующей координатной форме:

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) = & \iiint_{\Omega} \left[\frac{3I_x(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)^2}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} + \right. \\ & + \frac{3I_y(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)(\eta - y)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} + \frac{3I_z(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)(\zeta - z)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} - \\ & \left. - \frac{I_x(\xi, \eta, \zeta)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta \right] \end{aligned} \quad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

$$H_y(x, y, z) = \iiint_{\Omega} \left[\frac{3I_x(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)(\eta - y)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} + \frac{3I_y(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y)^2}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} + \frac{3I_z(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y)(\zeta - z)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} - \frac{I_y(\xi, \eta, \zeta)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}} \right] d\xi d\eta d\zeta \quad (3)$$

$$H_z(x, y, z) = \iiint_{\Omega} \left[\frac{3I_x(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)(\zeta - z)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} + \frac{3I_y(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y)(\zeta - z)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} + \frac{3I_z(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)^2}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{5/2}} - \frac{I_z(\xi, \eta, \zeta)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}} \right] d\xi d\eta d\zeta \quad (4)$$

Пусть тело, создающее аномалию магнитного поля, залегает на глубине $z = T$ ниже поверхности Земли и расположено между поверхностями $z = T - \varphi(\xi, \eta)$ и $z = T$, где неизвестная функция $\varphi(\xi, \eta)$ при всех ξ, η удовлетворяют условию $\max_{(\xi, \eta) \in S} \varphi(\xi, \eta) < T$. Предположим дополнительно, что вектор намагниченности не зависит от переменной ζ , так что $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\xi, \eta)$. Тогда проинтегрировав (4) по переменной ζ в пределах от $T - \varphi(\xi, \eta)$ до T , получаем:

$$H_z(x, y, z) = \iint_S \frac{1}{\chi(\xi, \eta)} \left(\frac{I_x(\xi, \eta)(x - \eta) + I_y(\xi, \eta)(y - \eta) + I_z(\xi, \eta)(z - \zeta)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}} \right) \Big|_{T-\varphi(\xi, \eta)}^T d\xi d\eta + 2 \iint_S \frac{1}{\chi(\xi, \eta)} \left(I_z(\xi, \eta) \frac{\frac{z-\zeta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{1/2}} \right) \Big|_{T-\varphi(\xi, \eta)}^T d\xi d\eta. \quad (5)$$

Рассуждая аналогичным образом для $H_x(x, y, z)$, $H_y(x, y, z)$, получим:

$$H_x(x, y, z) = \iint_S \xi I(\xi, \eta) \frac{1}{\chi(\xi, \eta)} \left(\frac{2 \frac{z-\zeta}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)^2}}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{1/2}} + \frac{\frac{z-\zeta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}} \right) \Big|_{T-\varphi(\xi, \eta)}^T d\xi d\eta + \iint_S \frac{1}{\chi(\xi, \eta)} \left(\frac{I_z(\xi, \eta)(x - \xi)}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}} \right) \Big|_{T-\varphi(\xi, \eta)}^T d\xi d\eta + \iint_S \frac{1}{\chi(\xi, \eta)} \left(I_x(\xi, \eta) \frac{\frac{z-\zeta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)^{1/2}} \right) \Big|_{T-\varphi(\xi, \eta)}^T d\xi d\eta, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
H_y(x, y, z) = & \iint_S \eta I(\xi, \eta) \frac{1}{\chi(\xi, \eta)} \left(\frac{2 \frac{z-\zeta}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)^2}}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2)^{1/2}} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{z-\zeta}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)^2}}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} \right) \Bigg|_{T-\varphi(\xi, \eta)}^T d\xi d\eta + \\
& + \iint_S \frac{1}{\chi(\xi, \eta)} \left(\frac{I_z(\xi, \eta)(y-\eta)}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} \right) \Bigg|_{T-\varphi(\xi, \eta)}^T d\xi d\eta + \\
& + \iint_S \frac{1}{\chi(\xi, \eta)} \left(I_y(\xi, \eta) \frac{\frac{z-\zeta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2)^{1/2}} \right) \Bigg|_{T-\varphi(\xi, \eta)}^T d\xi d\eta. \quad (7)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\xi I &= [I_x(\xi, \eta)(\xi-x)^2 + I_y(\xi, \eta)(\xi-x)(\eta-y)], \\
\eta I &= [I_x(\xi, \eta)(\xi-x)(\eta-y) + I_y(\xi, \eta)(\eta-y)^2].
\end{aligned}$$

Уравнения (5)-(7) является основой для построения математических моделей, описывающих одновременное восстановление параметров источника магнитной аномалии.

Для восстановления магнитного поля необходимо определить его пять характеристик: T , $z(\xi, \eta)$, $\mathbf{I} = (I_x, I_y, I_z)$.

Поэтому, наряду с данными $H_z(x, y)$, $H_x(x, y)$, $H_y(x, y)$ необходимо располагать данными о магнитном поле на некоторой поверхности $z = -H$.

В работе исследуются аналитические и численные методы решения системы уравнений (5)-(7) при различных условиях.

Рассматриваются модификации системы уравнений (5)-(7).

Рассматриваются модели, объединяющие уравнения ньютоновского потенциала и уравнения магниторазведки.

Приведены модельные примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-005594.

Литература

1. Бойков И. В., Бойкова А. И. Приближённые методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. Пенза: изд-во Пенз. гос. ун-та, 2013. 515 с.
2. Жданов М. С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 712 с.
3. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Приближённые методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в обратной задаче теории потенциала // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 3. С. 21-31.
4. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Численный метод решения двухмерной обратной задачи гравиразведки в конечных областях // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-тех. конф. Пенза, 2014. С. 65-71.

MSC 45Q05

On the mathematical model of simultaneous recovery of parameters of the magnetic anomaly source in the magnetic inversion problem

I.V. Boikov¹, V.A. Ryazantsev¹
Penza State University ¹

УДК 517.9

Динамическая устойчивость упругой пластины при струйном обтекании*

П. А. Вельмисов¹, А. В. Анкилов¹

Ульяновский государственный технический университет¹

При проектировании конструкций, приборов, устройств, аппаратов, систем и т. д. различного назначения, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В настоящее время механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа и аэрогидроупругость представляют собой хорошо развитые разделы механики сплошной среды.

Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [1]– [4], так и зарубежные [5]– [7] исследования). Большинство работ посвящено исследованию флаттера пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке, и только небольшая часть работ посвящена обтеканию пластин и оболочек дозвуковым потоком, что указывает на сложность исследования динамики упругих тел при указанном режиме обтекания и требует более пристального и глубокого внимания к этим задачам.

В работе исследуется динамическая устойчивость упругой пластины при одностороннем обтекании ее дозвуковым потоком газа (жидкости) в модели идеальной несжимаемой среды с отрывом струи по схеме Кирхгофа. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Поведение упругого материала в работе описывается нелинейной моделью. Для решения связанной задачи аэрогидроупругости используется подход, основанный на построении решения аэродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, при этом аэродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные деформации пластины [8]. При подстановке выражения для давления в уравнения колебаний пластин решение задачи сводится к исследованию системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций деформаций. На основе построения функционала, соответствующего этой системе уравнений, получены достаточные условия устойчивости решений системы.

Подобные задачи по исследованию динамической устойчивости при дозвуковом режиме обтекания рассматривались в [8] – [17]. Кроме того, отличием от ранее полученных результатов [9] является то, что в данной работе рассмотрена нелинейная математическая модель упругого тела, учитывающая и продольные и поперечные колебания упругой пластины.

На основе предложенной нелинейной математической модели колебаний упругой пластины при одностороннем обтекании ее дозвуковым потоком идеальной несжимаемой среды с отрывом струи проведено исследование устойчивости этой пластины. Модель описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными для неизвестных функций деформации пластины и потенциала скорости газа. На основе методов теории функций комплексного переменного получена связанная система интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, содержащая только неизвестные функции деформации пластины. С помощью построенного функционала получены достаточные условия устойчивости нулевого решения этой системы уравнений. Полученные условия устойчивости накла-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

дывают ограничения на погонную массу пластины, изгибную жесткость пластины, сжимающее (растягивающее) пластину усилие, скорость невозмущенного однородного потока, а также на коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, коэффициент жесткости слоя обжатия. Эти условия явно содержат основные параметры механической системы, и в таком виде они наиболее приспособлены для решения задач оптимизации, автоматического управления, автоматизированного проектирования.

Литература

1. Mogilevich L. I., Popov V. S., Rabinsky L. N., Kuznetsova E. L. Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer // Applied Mathematical Sciences, 2016. – V.10, № 23. pp. 1101-1109.
2. Vedenev V. V. Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds // Journal of Fluids and Structures, 2013. V. 40. pp. 366-372.
3. Курзин В. Б. Продольные колебания пластины, обтекаемой вязкой жидкостью в канале, обусловленные вынужденными поперечными колебаниями пластины // Прикладная механика и техническая физика, 2011. Т. 52, № 3. С. 153-157.
4. Соколов В. Г., Разов И. О. Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке // Вестник гражданских инженеров, 2014. – Т. 43, № 2. – С. 65-68.
5. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E. Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 7. 2014. № 6. pp. 1133-1148.
6. Kounadis A. N. Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping // Internat. J. Non-Linear Mech., 2007. V. 42, № 1. pp. 24-35.
7. Willems S., Gulhan A., Esser B. Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow // Progress in Flight Physics, 2013. № 5. pp. 285-308.
8. Вельмисов П. А., Решетников Ю. А. Устойчивость вязкоупругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. – Саратов : изд-во СГУ, 1994. – 176 с.
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – 220 с.
10. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск : УлГТУ, 2013. – 322 с.
11. Анкилов А. В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. – Ульяновск : УлГТУ, 2015. – 146 с.
12. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. – Ульяновск : УлГТУ, 2000. – 115 с.
13. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem // Journal of Mathematical Sciences, 2016. V. 219, № 1. pp. 14-26.

14. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Устойчивость решений начально-краевой задачи аэрогидроупругости // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2016. – № 59. – С. 35-52.
15. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала // Журнал Средневолжского математического общества, 2016. – Т. 18, № 1. – С. 94-107.
16. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Устойчивость вязкоупругих элементов несущей поверхности в дозвуковом потоке // Журнал Средневолжского математического общества, 2007. – Т. 9, № 1. – С. 69-81.
17. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П. Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала. – Вестник Саратовского государственного технического университета. – Саратов, 2009. – №2(38), Вып. 1. – С. 7-17.

MSC 76D05, 35B40

Dynamic stability of an elastic plate in a jet flow

P.A. Velmisov¹, A.V. Ankilov¹

Ulyanovsk State Technical University ¹

УДК 532.5:517.9

Динамическая устойчивость упругих пластин, взаимодействующих со слоистыми течениями *

П.А. Вельмисов ¹, У.Д. Мизхер ¹, Е.П. Семенова ¹
 Ульяновский государственный технический университет ¹

Рассмотрим задачу об устойчивости движения деформируемых пластин с учетом взаимодействия с течением вязкой жидкости, мало отличающимся от слоистого. Уравнения движения вязкой жидкости имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + vv_y) &= -P_x + \mu(u_{xx} + u_{yy}), \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) &= -P_y + \mu(v_{xx} + v_{yy}), \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Положим в (1)

$$u = U(y, t) + \varepsilon \bar{u}(x, y, t), \quad v = \varepsilon \bar{v}(x, y, t), \quad P = \alpha(t) + \theta(t)x + \varepsilon \bar{P}(x, y, t). \tag{2}$$

где ε - малый параметр, характеризующий порядок возмущения слоистого течения, $\alpha(t), \theta(t)$ - заданные функции. Функция $U(y, t)$ является решением неоднородного уравнения теплопроводности

$$\rho U_t = \mu U_{yy} - \theta(t). \tag{3}$$

Оставляя в (1) члены порядка ε , для функций $\bar{u}, \bar{v}, \bar{P}$ получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \rho(\bar{u}_t + U\bar{u}_x + U_y\bar{v}) &= -\bar{P}_x + \mu(\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy}), \\ \rho(\bar{v}_t + U\bar{v}_x) &= -\bar{P}_y + \mu(\bar{v}_{xx} + \bar{v}_{yy}), \\ \bar{u}_x + \bar{v}_y &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

В дальнейшем черту над переменными будем опускать. Умножив первое уравнение системы (4) на u , и второе уравнение системы (4) на v , сложив полученные уравнения, с учетом уравнения неразрывности (третье уравнение системы (4)), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)_t &= -\frac{1}{2}\rho U(u^2 + v^2)_x - \rho U_y uv - (uP)_x - (vP)_y + \\ &+ \mu(uu_x + vv_x)_x + \mu(uu_y + vv_y)_y - \mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2). \end{aligned} \tag{5}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$J = \frac{1}{2}\rho \iint_S (u^2 + v^2) dS, \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

где S - некоторая область. Для производной $\frac{\partial J}{\partial t}$, используя формулу Грина, согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} = & \oint_L [-\frac{1}{2}\rho U(u^2 + v^2) - uP + \mu(uu_x + vv_x)] dy - \\ & - [\mu(uu_y + vv_y) - vP] dx - \iint_S [\mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + \rho U_y uv] dS, \end{aligned} \quad (7)$$

где L - граница области S . Рассмотрим движение жидкости в канале с горизонтальными стенками в предположении, что на входе в канал $x = a$ и на выходе из него $x = d$ возмущения слоистого течения отсутствуют ($u = v = 0$), тогда из (7) имеем

$$\frac{\partial J}{\partial t} = - \oint_L [\mu(uu_y + vv_y) - vP] dx - \iint_S [\mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + \rho U_y uv] dS. \quad (8)$$

В случае, когда нижняя стенка канала ($y = 0$) неподвижная, а верхняя ($y = h$) движется параллельно оси x по заданному закону $U_0(t)$, при этом задан градиент давления $\partial P / \partial x = \theta$, функция $U(y, t)$ является решением уравнения (3) при следующих граничных условиях

$$U(0, t) = 0, \quad U(h, t) = U_0(t). \quad (9)$$

В этом случае решение задачи (3), (9), используя метод Галеркина, можно построить в виде

$$U(y, t) = U_0(t) \frac{y}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{h}. \quad (10)$$

Если $U = U_0 = const$, $\theta = \theta_0 = const$, то имеем течение установления

$$U(y, t) = \frac{\theta_0}{2\mu} y^2 + (\frac{U_0}{h} - \frac{\theta_0}{2\mu} h) y + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\nu \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n y. \quad (11)$$

где $\nu = \mu / \rho$ - кинематическая вязкость, а коэффициенты C_n определяются из начального условия $U(y, 0) = g(y)$.

Пусть стенка $y = 0$ содержит вязкоупругий элемент, динамика которого описывается следующими уравнением и граничными условиями

$$\begin{aligned} L(w(x, t)) = & -P(x, 0, t), \quad v(x, 0, t) = \dot{w}(x, t), \quad u(x, 0, t) = 0, \quad x \in (b, c) \\ L(w) \equiv & M\ddot{w} + Dw'''' + \xi \dot{w}'''' - \eta \ddot{w}'' + Nw'' + \gamma \dot{w} + \beta w. \end{aligned} \quad (12)$$

При записи уравнения (12) в выражении для давления опущены члены $(\alpha + \theta x)$, не влияющие на исследования устойчивости по начальным данным. Учитывая, что $u = v = 0$ на плоскости $y = h$ и на недеформируемых частях плоскости $y = 0$, и принимая во внимание (12), из (8), получим

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leq - \int_b^c \dot{w} L(w) dx - \iint_S [2\mu \frac{l^2 + h^2}{l^2 h^2} (u^2 + v^2) + \rho U_y(y, t) uv] dS, \quad (13)$$

где $l = (d - a)$ - длина канала. Из неравенства (13) следует, что условие устойчивости движения пластины имеет вид: $N \leq \frac{2D}{l^2}$. Это условие является условием положительности квадратичной формы, возникающей в результате преобразования подинтегрального выражения $\dot{w} L(w)$. Его необходимо дополнить условием положительности квадратичной формы, входящей под знак двойного интеграла

$$\max_{y, t} U_y^2(y, t) < 16 \frac{\nu^2}{h^4} (1 + \delta^2)^2, \quad \delta = \frac{h}{l}. \quad (14)$$

В случае стационарного течения сдвига при отсутствии градиента давления $U(y) = U_0 y/h$. Тогда (14) принимает вид $Re < 4(1 + \delta^2)$, где $Re = U_0 h/\nu$ - число Рейнольдса. Для достаточно длинного канала ($\delta \ll 1$) $Re < 4$. В случае возмущения стационарного сдвигового течения с градиентом давления $\theta_0 < 0$ согласно (11), (14) имеем

$$\left(U_0 - \frac{\theta_0 h^2}{2\mu}\right)^2 < \frac{16\nu^2}{h^2}(1 + \delta^2)^2.$$

При $U_0 = 0$, имеем ограничение сверху на значения модуля градиента давления θ_0 .

Исследование динамики пластины проводилось также для нелинейной модели, учитывающей демпфирование продольного усилия и изгибающего момента упругого элемента

$$mV_{tt}(x, t) - G_x(x, t) - \tau G_{xt}(x, t) + f(x, t, V, W, V_t, W_t) = F_x,$$

$$mW_{tt}(x, t) - [W_x(x, t)(G(x, t) + \tau G_t(x, t))]_x + M_{xx} + \gamma M_{txx}(x, t) + g(x, t, V, W, V_t, W_t) = F_y$$

Здесь V и W - продольная и поперечная деформации упругого элемента; $G(x, t) = EF(V_x + \frac{1}{2}W_x^2)$ - продольное усилие; $M(x, t) = EJ \frac{W_{xx}}{[1 + 2(V_x + \frac{1}{2}W_x^2)]^{3/2}}$ - изгибающий момент; EF - жесткость на растяжение; EJ - жесткость на изгиб; $f(x, t, V, W, V_t, W_t)$, $g(x, t, V, W, V_t, W_t)$ - функции, описывающие некоторые внешние (например, управляющие) воздействия на упругий элемент; τ, γ - коэффициенты демпфирования на растяжение и изгиб; F_x, F_y - касательная и нормальная составляющие гидродинамической силы, действующей на пластину. Полагая пригибы малыми, можно положить $M(x, t) = EJ[W_{xx} - 3(V_x + \frac{1}{2}W_x^2)W_{xx}]$, часто полагают также $M(x, t) = EJW_{xx}$.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 311 с.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
5. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

MSC 76D05 35B40

Dynamic stability of elastic plates interacting with layered currents

P.A. Velmisov¹, U.J. Mizher¹, E.P. Semenova¹
Ulyanovsk State Technical University¹

УДК 519.6

Методика расчета формирования криогенного слоя D-T смеси в сферическом контейнере

Е.А. Веселова¹, Ю.Н. Дерюгин¹, В.М. Изгородин¹, Е.Ю. Соломатина¹

Всероссийский Научно Исследовательский Институт
Экспериментальной Физики¹

Для разработки технологии получения криогенных мишеней для ЛТС и их сохранения требуется знание влияния температуры окружающих деталей камеры и остаточного газа на температурный режим самой мишени, толщину криогенного слоя и его распределения по внутренней поверхности микросферы.

В работе [1] была создана одномерная расчетная модель процесса симметричного замораживания газонаполненной микросферы. Данная модель представляет собой задачу Стефана с двумя фазовыми переходами с учетом потенциального движения замораживаемого газа. С использованием созданной методики вычислены пространственно-временные распределения температуры внутри и вне сферы, скорость движения газа внутри сферы и время замораживания в широких пределах размеров микросфер, количества содержащегося в них газа и скорости охлаждения.

При замораживании газонаполненной микросферы, которая подвешивается на нити в контейнере, в результате влияния силы тяжести происходит не симметричное охлаждение мишени. В работах [2,3] отмечается, что в следствии энерговыделения при распаде трития в D-T смеси происходит симметризация твердой фазы D-T смеси в мишени.

Целью данной работы является разработка экономичной методики расчета формирования криогенного слоя D-T смеси в микросфере на основе двумерного подхода и уравнений движения газовой фазы в приближении Буссинеска. Тепловая задача представляет собой задачу Стефана с фазовым переходом газ-твердое тело с выделением фронта фазового перехода на подвижной эйлеровой сетке. Расчетная методика построена на структурированных подвижных сетках. Расчетный шаг расщепляется на два этапа. На первом этапе решаются уравнения движения газовой фазы, которые аппроксимируются неявной разностной схемой. На втором этапе решается внутренняя задача Стефана. Здесь используется алгоритм с выпрямлением фазового фронта. Уравнение теплопереноса аппроксимируется неявной разностной схемой, которая записывается в дельта- форме, относительно приращения температуры. Системы разностных уравнений расщепляются по направлениям на одномерные системы, которые решаются методом прогонки. Методика реализована в рамках пакета программ ЛОГОС [4]. Приводятся результаты расчетов формирования криогенного слоя для различных значений температур, размеров и материалов оболочки.

Литература

1. Deryugin Yu. N., Izgorodin V.M., Solomatina E. Yu. / Numerical simulation of the freezing process of hydrogen isotopes in a spherical container. J. Moscow Phys. Soc. 9. 1999. pp. 165-172.
2. Investigation of the effect of a plastic ring on the uniformity of ice layers in cryogenic inertial confinement fusion targets. LLE Review. 2002. Vol. 81. pp.14.
3. Modeling the Temperature and Ice-Thickness Profiles Within OMEGA Cryogenic Targets. LLE Review, Vol. 8.
4. Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Глазунов В.А., Голубев А.А., Денисова О.В., Лашкин С.В., Жучков Р.Н., Тарасова Н.В., Сизова М.А. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС для расчета задач гидродинамики и тепломассопереноса на многопроцессорных ЭВМ: базовые технологии и алгоритмы. // Супервычисления и математическое моделирование: Труды XII международного семинара. Саров, 11-15 октября 2010. С. 215-230.

MSC 34G10 58D25

Method of calculating the formation of a cryogenic layer of D-T mixture in a spherical container

E.A. Veselova¹, YU.N. Deryugin¹, V.M. Izgorodin¹, E.YU. Solomatina¹

All-russian Research Institute of Experimental Physics

УДК 519.63

Пакет программ ЛОГОС. Методика расчета двумерных задач газовой динамики с учетом теплопроводности на подвижных неструктурированных сетках

Е.А. Веселова¹, Ю.Н. Дерюгин¹, Д.К. Зеленский¹

Всероссийский Научно Исследовательский Институт
Экспериментальной Физики¹

В ряде практических приложениях необходимо достаточно точно моделировать распространение ударной волны в различных средах. Использование здесь методов сквозного счета приводит к существенной погрешности в определении скорости и положения ударной волны. Для решения такого класса задач в [1] развиты методы на структурированных подвижных эйлеровых сетках с выделением основных особенностей решения. Основная трудность в проведении расчетов по этим методам состоит в поддержании качественной сетки, особенно в центральной части, где в следствии вырождения ячеек на оси симметрии, происходит сильное ограничение счетного шага.

В данной работе проводится разработка методики расчета двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью на подвижных неструктурированных сетках. Математическая модель, используемая для описания процессов распространения ударных волн, основана на уравнениях многокомпонентной газовой динамики и уравнении переноса излучения в диффузионном приближении. Расчетная методика построена на основе использования неструктурированных подвижных сеток, методе расщепления по физическим процессам, явного метода интегрирования уравнений Эйлера и неявного метода решения уравнения теплопереноса. Расчетный шаг расщепляется на три этапа. На первом этапе определяется новое положение сетки. Движение сетки связывается с движением выделенных разрывов, таких как ударная волна, контактные разрывы, фронт пламени. Граничные условия на выделенных разрывах разрешаются методом распада разрыва, из решения которого определяется скорость смещения граней. По изменению положения выделенных разрывов производится перестройка сетки. На втором этапе интегрируются уравнения Эйлера на подвижной сетке. Разностные уравнения получены дискретизацией исходных уравнений в интегральной форме квадратурными формулами прямоугольников. Численно конвективные потоки определяются на основе решения задачи о распаде разрыва. Для повышения точности моделирования предраспадные параметры потока определяются с использованием линейной реконструкции решения. В задачах со сферической симметрией с целью уменьшения немонотонности численного решения применяется алгоритм доворота вектора скорости у предраспадных параметров потока [2]. На третьем заключительном этапе решаются уравнения теплопроводности, на неподвижной неструктурированной сетке. Расчетные формулы получены путем интегрирования уравнений теплопроводности по контрольному объему ячейки. Тепловые потоки на гранях аппроксимируются по верхнему временному слою центральными разностями. Разностные уравнения решаются итерациями по нелинейности и методе отложенной коррекции учитывающей не ортогональность сетки. Получающаяся в результате аппроксимации система линейных алгебраических уравнений решается с использованием параллельных решателей из библиотеки PMLP [3]. Методики реализованы в рамках параллельного пакета программ ЛОГОС [4].

Приводятся результаты расчета тестовых и модельных задач, характеризующие возможности методики.

Литература

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
2. Матяш С.В. Новый метод использования принципа минимальных приращений в численных схемах второго порядка аппроксимации. // Ученые записки ЦАГИ. 2005. Т.36, № 3-4. С.42-50.
3. Реализованные методы решения разреженных линейных систем в библиотеке линейной алгебры. Артемьев А. Ю., Бартенев Ю. Г., Басалов В.Г., Бондаренко Ю. А., Варгин А.М., Голубев А. А., Ерзунов В. А., Ломтев А.В., Максимов А. С., Панов А. И., Прокофьев А.И., Романова М. Д., Фролова Н. В.,Щаникова Е. Б. ВАНТ, сер Математическое моделирование физических процессов – 2002 – вып. 2.
4. Дерюгин Ю.Н., Козелков А.С., Спиридонов В.Ф., Циберев К.В., Шагалиев Р.М. Многофункциональный высокопараллельный пакет программ ЛОГОС для решения задач тепломассопереноса и прочности, Сборник тезисов докладов Санкт-Петербургского научного форума “Наука и общество”, 2012. С. 102.

MSC 34G10 58D25

LOGOS software package. The method of calculating two-dimensional problems of gas dynamics, taking into account thermal conductivity on moving unstructured grids

Е.А. Veselova¹, YU.N. Deryugin¹, D.K. Zelenskij¹

All-russian Research Institute of Experimental Physics

УДК 517.9

Вычисление потока тепла в задаче о течении Пуазейля в пространстве между двумя параллельными плоскостями с зеркально-диффузным граничным условием Максвелла *

О.В. Гермидер ¹, В.Н. Попов ¹Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова¹

Развитие новых нанотехнологий требует разработки методов математического моделирования пространственных течений разреженного газа [1]. В представленной работе рассматриваются установившееся течение газа в канале, образованном между двумя параллельными бесконечными пластинами, расположенными в плоскостях $y' = \pm b'/2$ декартовой системы координат, где b' – расстояние между ними. Движение газа обусловлено действием постоянного малого по абсолютной величине градиента давления, параллельного стенкам канала. Направление Oz' совпадает градиентом давления. Изменение состояния газа будем описывать уравнением Вильямса, которое для стационарного режима течения газа в выбранной системе координат имеет вид [2]:

$$v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f), \quad (1)$$

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right). \quad (2)$$

где $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, \mathbf{v} – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, \mathbf{r}' – размерный радиус-вектор, l_g – средняя длина свободного пробега молекул газа, $\gamma = 5\sqrt{\pi}/4$, T_0 – температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат, m – масса молекул газа, k_B – постоянная Больцмана. Параметры n_* , T_* и \mathbf{u}_* в функции (2) выбираем из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворял законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [3].

В качестве граничного условия на стенках канала используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла [4]:

$$f^+(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = (1 - \alpha) f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})) + \alpha f_M(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}\mathbf{n} > 0,$$

$$f_M(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = n(\mathbf{r}'_\Gamma) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{r}'_\Gamma)} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T(\mathbf{r}'_\Gamma)} \mathbf{v}^2 \right), \quad (3)$$

где α – коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа, $f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v})$ – функция распределения падающих молекул газа на обтекаемую поверхность Γ , \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности Γ , направленный в сторону газа, \mathbf{r}' и \mathbf{v} – радиус-вектор и скорость молекул газа, m – масса молекул газа, k_B – постоянная Больцмана, $T_\Gamma = T(\mathbf{r}'_\Gamma)$, $n_\Gamma = n(\mathbf{r}'_\Gamma)$ – температура и концентрация газа на обтекаемой поверхности.

Линеаризуем локально-равновесную функцию распределения (3) с параметрами, заданными на стенках канала, относительно абсолютного максвеллиана. Здесь $\beta = m/(2k_B T_0)$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по научному проекту 16-29-15116 офи_м.

$\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа. В качестве размерного масштаба длины выбираем при этом b' . Предполагаем, что температура, которая поддерживается в канале, является постоянной. Учитывая при этом, что $|G_p| \ll 1$ (G_p – безразмерный градиент давления) и $p(z) = n(z)k_B T$, приходим к следующим выражениям

$$f_M(z, \mathbf{C}) = f_0(C) (1 + G_p z), \quad (4)$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C) (1 + G_p z + h(y, \mathbf{C})). \quad (5)$$

Представляя функцию $h(y, \mathbf{C})$ в виде:

$$h(y, \mathbf{C}) = \gamma K n G_p C_z Z_0(y, C_y), \quad (6)$$

раскладываем $Z_0(y, C_y)$ по ортогональным функциям $e_1 = 1$, $e_2 = 1/C - 3\sqrt{\pi}/8$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю интеграла $(f_1, f_2) = \int_0^{+\infty} g(C) f_1(C) f_2(C) dC$):

$$Z_0(y, C_y) = Z_1(y, \mu) + \left(\frac{1}{C} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) Z_2(y, \mu),$$

где $\mu = \sin \varphi \sin \theta$, а углы φ и θ отсчитываются от положительных направлений осей C_x и C_z в пространстве скоростей, соответственно.

Подставляя (6) в (1), в силу ортогональности функций e_1 , e_2 приходим к системе двух незацепленных уравнений

$$\frac{\partial Z_1}{\partial y} \mu \gamma K n + Z_1(y, \mu) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} Z_1(y, \mu) d\varphi', \quad (7)$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial y} \mu \gamma K n + Z_2(y, \mu) + 1 = 0, \quad (8)$$

с граничными условиями

$$Z_i(\pm 1/2, \mu) = (1 - \alpha) Z_i(\pm 1/2, -\mu), \quad \pm \mu < 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Исходя из статистического смысла функции распределения, отличная от нуля компонента вектора потока тепла определяется выражением [4]:

$$q'_z(y) = \frac{m}{2} \int (v_z - u_z(x', y')) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(y)|^2 f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = \frac{p_0}{\beta^{1/2}} q_z(x, y),$$

где безразмерная компонента вектора потока тепла:

$$\begin{aligned} q_z(y) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) d^3 \mathbf{C} = \\ &= -\frac{G_p \gamma K n}{4\pi^{3/2}} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Z_2(y, \mu) d\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Приведенный поток тепла J_Q в пространстве между двумя параллельными плоскостями определяем, следуя [6] как

$$J_Q = \frac{4}{\pi} \int_0^{1/2} q_z(y) dy. \quad (11)$$

Из (10) следует, что функция $Z_1(y, \mu)$ не вносит вклада в вектор потока тепла. Следовательно, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(y, \mu)$ из уравнения (8) с

граничным условием (9). Далее для функции $Z_2(y, \mu)$ нижний индекс будем опускать, т.е. $Z(y, \mu) \equiv Z_2(y, \mu)$.

Для решения краевой задачи (8), (9) представим уравнение (8) в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{r}_\perp} \mathbf{C}_\perp \gamma K n \sin \theta + C_\perp Z(y, \mu) + C_\perp = 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{C} = (C_\perp \cos \varphi, C_\perp \sin \varphi, C_z), \quad \mathbf{C}_\perp = (C_\perp \cos \varphi, C_\perp \sin \varphi), \quad C_\perp = C \sin \theta.$$

Здесь \mathbf{C}_\perp – вектор проекции \mathbf{C} на плоскость, перпендикулярную оси z . Применим подход, использованный в [5]. В результате имеем

$$Z(y, \mu) = \frac{\alpha \exp\left(-\frac{2y+1}{2\gamma K n \mu}\right)}{1 - (1-\alpha) \exp\left(-\frac{1}{\gamma K n \mu}\right)} - 1, \quad 0 \leq \varphi < \pi; \quad (13)$$

$$Z(y, \mu) = \frac{\alpha \exp\left(-\frac{2y-1}{2\gamma K n \mu}\right)}{1 - (1-\alpha) \exp\left(\frac{1}{\gamma K n \mu}\right)} - 1, \quad \pi \leq \varphi < 2\pi. \quad (14)$$

Подставляя выражения (13) и (14) в (10) с учетом того, что $Z_2(y, \mu) \equiv Z(y, \mu)$, получим формулу для безразмерной z -компоненты вектора потока тепла $q_z(y)$:

$$q_z(y) = \frac{G_p \gamma K n}{3\sqrt{\pi}} - \frac{\alpha G_p \gamma K n}{4\pi^{3/2}} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^\pi \frac{\exp\left(-\frac{2y+1}{2\gamma K n \mu}\right)}{1 - (1-\alpha) \exp\left(-\frac{1}{\gamma K n \mu}\right)} d\varphi d\theta - \\ - \frac{\alpha G_p \gamma K n}{4\pi^{3/2}} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_\pi^{2\pi} \frac{\exp\left(-\frac{2y-1}{2\gamma K n \mu}\right)}{1 - (1-\alpha) \exp\left(\frac{1}{\gamma K n \mu}\right)} d\varphi d\theta. \quad (15)$$

Таким образом, в представленной работе с использованием зеркально-диффузных граничных условий Максвелла построено аналитическое решение задачи о течении Пуазейля в канале, образованном двумя параллельными плоскостями. Получены выражения для компоненты вектора потока тепла и самого приведенного потока.

Литература

1. Titarev V. A., Utyuzhnikov S. V., Chikitkin A. V. OpenMP + MPI parallel implementation of a numerical method for solving a kinetic equation // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. № 4. pp. 1919–1928.
2. Гермидер О. В., Попов В. Н. Математическое моделирование процесса переноса тепла в прямоугольном канале в задаче о течении Пуазейля // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 1401–1409.
3. Латышев А. В., Юшканов А. А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография. М.: МГОУ, 2004. 271 с.
4. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.

5. Лескис А. Г., Юшканов А. А., Яламов Ю. И. Магнитное дипольное поглощение инфракрасного излучения мелкой металлической частицей // Поверхность. 1987. Т. 11. С. 115–121.
6. Шарипов Ф. М., Селезнев В. Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. 230 с.

MSC 35F30

Calculation of the heat flux in the Poiseuille flow problem in the space between two parallel planes with a mirror-diffusive Maxwell boundary condition

O.V. Germider ¹, B.N. Popov ¹

Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov ¹

УДК 519.86; 330.4

Обратные задачи моделирования экономики

В.К. Горбунов¹

Ульяновский государственный университет¹

Доклад посвящен обратным задачам математического моделирования (идентификации моделей) базовых экономических объектов – многопродуктового рыночного спроса и крупных экономических систем, моделируемых макроэкономическими производственными функциями (ПФ).

Теория рыночного спроса до настоящего времени отсутствует в неоклассической экономической теории, построенной в рамках методологического индивидуализма, отрицающего эмерджентность социально-экономических процессов. Макроэкономические ПФ в зарубежной литературе мейнстрима объявлены экономически нелегитимными по этой же причине. В наших работах последних лет обоснован холистический (системный) подход к исследованию потребительских рынков и построению макроэкономических ПФ с одновременной оценкой эффективных фондов объекта [1] - [2].

Обратные задачи теории рыночного спроса и построения ПФ, при использовании нетривиальных функций (полезности и производственных, сложнее функции Кобба-Дугласа) плохо обусловлены и требуют регуляризации на основе дополнительной информации. В известных методах регуляризации некорректных задач естествознания (А.Н. Тихонов, В.К. Иванов, М.М. Лаврентьев) большое значение имеет информация об уровнях погрешностей исходных данных. Такая информация обычно отсутствует в экономической статистике. Временные ряды данных о многопродуктовых рынках и производстве, представляемых стационарными теориями (динамические теории ещё сложнее для верификации) не могут быть длинными, и это, наряду с отсутствием статистических характеристик данных, затрудняет применение эконометрических методов.

В докладе будут представлены авторские модели рыночного спроса и построения ПФ с оценкой эффективных фондов, а также методы регуляризации, использующие качественные свойства моделируемых объектов, вытекающие из соответствующих теорий, и экспертную информацию.

Литература

1. Горбунов В.К. Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ, 2015. 264 с. (РФФИ № 15-06-07018).
2. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и матем. методы. 2012. В. 2. С. 95-107.

MSC 91B64

Inverse problems of economy modeling

V. K. Gorbunov¹

Ulyanovsk State University¹

УДК 517.938

О топологической классификации потоков на проективно-подобных многообразиях

В.З. Гринес¹

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»¹

В работах Е.В. Жужомы и В.С. Медведева [1], [2] было показано, что если на замкнутом многообразии M^n существует структурно устойчивый поток, неблуждающее множество которого состоит в точности из трех точек, тогда многообразие M^n является проективно-подобным. Это означает, что

1. $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;
2. M^n есть объединение не пересекающихся между собой $\frac{n}{2}$ -мерной сферы $S^{\frac{n}{2}}$, локально плоско вложенной в M^n , и открытого n -мерного шара B^n , ($M^n = S^{\frac{n}{2}} \cup B^n$, $S^{\frac{n}{2}} \cap B^n = \emptyset$.)

В каждой из размерностей 2 и 4 проективно-подобное многообразие является единственным (с точностью до гомеоморфизма) и любые структурно устойчивые потоки с неблуждающим множеством, состоящим из трех точек, являются топологически эквивалентными. В каждой из размерностей 8 и 16 существуют не гомеоморфные проективно-подобные многообразия и, как следствие, имеются не топологически эквивалентные структурно устойчивые потоки с неблуждающим множеством, состоящим в точности из трех точек.

В работах С.Ю. Пилюгина [3] были найдены условия топологической эквивалентности потоков Морса-Смейла на n -мерной сфере, $n \geq 3$, в предположении отсутствия замкнутых траекторий и пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий различных седловых состояний равновесия.

Настоящий доклад посвящен нахождению необходимых и достаточных условий топологической эквивалентности потоков Морса-Смейла, заданных на проективно-подобных многообразиях размерности большей 3 в предположении отсутствия замкнутых траекторий, пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий различных седловых состояний равновесия и при наличии в точности одного седлового состояния равновесия индекса отличного от 1 и $n - 1$. Результаты анонсируемые в докладе были получены совместно с Е.Я. Гуревич.

Доклад подготовлен при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01041) и в рамках выполнения программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году (проект Т-95).

Литература

1. Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S. Morse-Smale systems with few non-wandering points // Topology and its Applications. 2013. V. 160, No. 3. pp. 498–507.
2. Жужома Е. В., Медведев В. С. Непрерывные потоки Морса-Смейла с тремя состояниями равновесия // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 5. С. 69-92
3. Пилюгин С. Ю. Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах // Дифф. Уравн. 1978. Т. 15, № 2. С. 245-254 .

MSC 37B25, 37D15, 57M30

On the topological classification of flows on projective-like manifolds

V.Z. Grines¹

National Research University — Higher School of Economics¹

УДК 517.9

Об управлении движением руки антропоморфного робота с упругими шарнирами

Е.В. Дороговцева¹

Ульяновский государственный университет¹

В докладе представлены результаты исследования задачи о стабилизации плоских движений руки антропоморфного робота.

В качестве модельных уравнений движения выбраны электромеханические уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = K(\varphi - \theta)$$
$$I \frac{d\varphi}{dt} = K(\theta - \varphi) + U$$

где T — кинетическая энергия системы.

$$T = \frac{1}{2}(J_{c1} + m_1 \frac{l_1^2}{4})\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}J_{c2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}m_3(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{l_3^2}{4}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) +$$
$$+ 2l_1l_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_3 + \theta_2) + l_2l_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_3)) + \frac{1}{2}J_{c3}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2.$$

θ — углы поворотов звеньев, φ — углы поворотов приводов, J_{ck} , m , l — параметры звеньев, I — тензор инерции активаторов, K — матрица взаимодействия.

Пусть

$$\dot{\varphi}_k = 0, \varphi_k = \varphi_k^0, \dot{\theta}_k = 0, \quad \theta_k = \theta_k^0 = const \quad k = 1, 2, 3$$

есть заданное положение системы.

В соответствии с методами, предложенными в работах [1], [2], задача о стабилизации этого положения решается управляющими напряжениями, представляющими собой нелинейные ПД-, ПИ- и ПИД-регуляторы вида

$$U_k = -\mu_k(\varphi_k(t) - \varphi_k^0) + p_k \int_0^t e^{s_k^0(\tau-t)} \varphi_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, 3$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания по НИР (Проект № 9.5994.2017/БЧ).

Литература

1. Андреев А. С., Перегудова О. А., Раков С. Ю. Уравнение Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора // Журнал СВМО. 2016. Т. 18. № 3. С. 8–18.
2. Андреев А. С., Перегудова О. А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // ПММ. 2017. Т. 81. № 2. С. 137–153.

MSC 34K35 58E25 93B05

On the motion control of an anthropomorphic robot with elastic hinges

E.V. Dorogvtseva¹
Ulyanovsk State University¹

УДК 519.63

Априорные оценки точности метода Галеркина с разрывными функциями для двумерных параболических задач

Р. В. Жалнин¹, В. Ф. Масыгин¹, Е. Е. Пескова¹, В. Ф. Тишкин²
ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва"¹, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН²

В настоящее время для решения уравнений диффузионного типа широко применяется метод Галеркина с разрывными базисными функциями или Discontinuous Galerkin Method (DGM) [1], который характеризуется высоким порядком точности получаемого решения [2,3]. Данная работа посвящена решению уравнений диффузионного типа на неструктурированных треугольных разнесенных сетках методом Галеркина с разрывными базисными функциями, в котором аппроксимация решения в пределах ячейки сетки находится в виде полиномов степени s с зависящими от времени коэффициентами [4,5].

В работе исследуется предложенная авторами новая проекционная сеточная схема на основе LDG на неструктурированных разнесенных сетках [7,8]. Для нахождения потоков через грани ячеек используются стабилизирующие добавки [9]. В применении к решению двумерных параболических задач метод DGM исследован в работах Pany and Yadav [10], Song and Zhang [11]. Данная работа является развитием и обобщением работы [12] для двумерного случая. Приводятся априорные оценки аппроксимации методом Галеркина с разрывными базисными функциями уравнений параболического типа на разнесенных неструктурированных треугольных сетках.

Литература

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151-268.
2. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринт № 34, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва. 2012.
3. Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 226. P. 879-896.
4. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations // Journal of Computational Physics. 1997. Vol. 131. P. 267-279.
5. Волков А. В. Метод численного исследования обтекания пространственных конфигураций путем решения уравнений Навье-Стокса на основе схем высокого порядка точности // дис. ... докт. физ.-мат. наук, Москва. 2010.
6. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 6. С. 267-279.

7. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2015. Т. 19. № 3. С. 523-533.
8. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2015. Т. 19. № 3. С. 523-533.
9. Arnold D. N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L. D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2002. Vol. 29. P. 1749-1779.
10. Pani A. K., Yadav S. An hp-Local Discontinuous Galerkin method for Parabolic Integro-Differential Equations // Journal of Scientific Computing. 2011. Vol. 46. Issue 1. P. 71-99.
11. Song L., Zhang S. Symmetric interior penalty Galerkin approaches for two-dimensional parabolic interface problems with low regularity solutions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 330. P. 356-379.
12. Жалнин Р. В., Масыгин В. Ф., Пескова Е. Е. Априорные оценки решения однородной краевой задачи для уравнений параболического типа методом Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках // Вестник Мордовского университета. 2017. Т. 27. № 4. С. 490-503.

MSC 65N30

A priori estimates of the accuracy of the Galerkin method with discontinuous functions for two-dimensional parabolic problems

R. V. Zhalnin¹, V. F. Masyagin¹, E. E. Peskova¹, V. F. Tishkin²

National Research Mordovia State University¹,
Keldysh Institute of Applied Mathematics²

УДК 519.63

Моделирование течения многокомпонентной реагирующей газовой смеси с использованием алгоритмов повышенного порядка точности

Р. В. Жалнин¹, Е. Е. Пескова¹, О. А. Стадниченко², В. Ф. Тишкин³
ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва"¹, ИК им. Г.К. Борескова СО РАН²,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН³

В настоящей работе построен алгоритм на основе схем повышенного порядка точности для моделирования течения химически активного газа с учетом процессов вязкости, теплопроводности, диффузии. Для описания математической модели дозвукового течения газовой смеси используются уравнения Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха [1–3]. Проведено моделирование процесса пиролиза этана в проточном химическом реакторе за счет внешнего обогрева стенок [4]. Получены картины распределения плотности, скорости, температуры, концентраций компонент смеси.

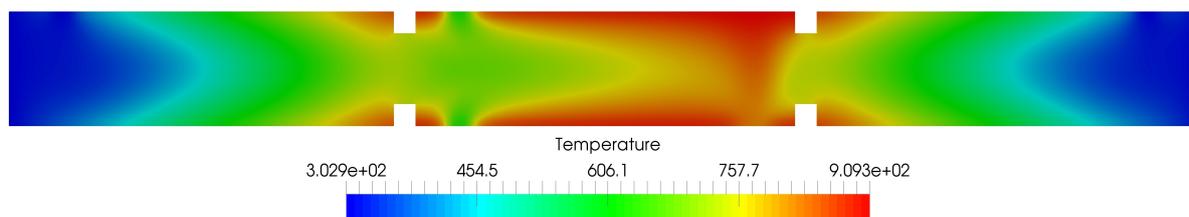


Рис. 1. Распределение температуры

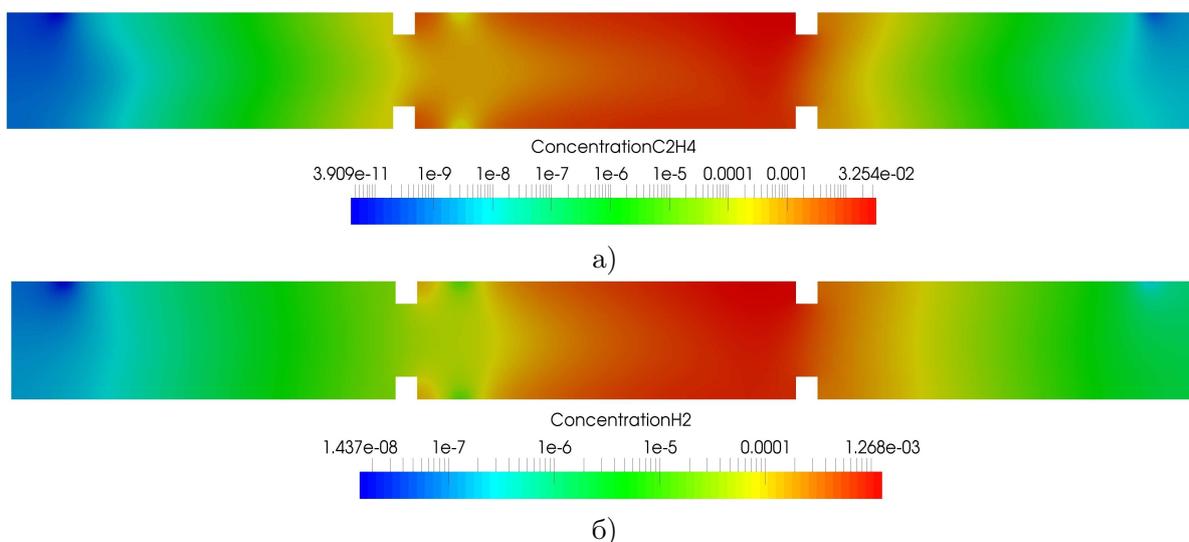


Рис. 2. Распределение массовых долей C₂H₄ (а), H₂ (б)

На рисунках представлены распределения массовой доли целевых продуктов реакции – этилена и водорода и температуры в продольном срезе химического реактора. Макси-

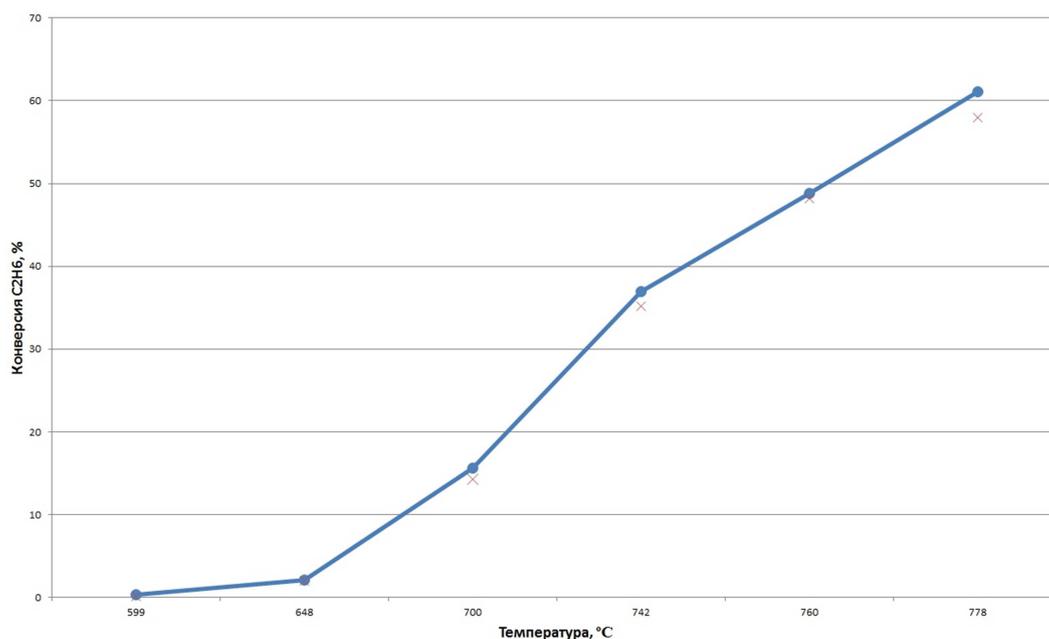


Рис. 3. Зависимость конверсии этана от температуры нагревательных элементов. Данные экспериментов — точки; данные моделирования — крестики

мальная концентрация целевых продуктов наблюдается в областях максимальной температуры, т.к. реакция в этих областях происходит наиболее интенсивно. Сопоставление результатов вычислительного и натурального экспериментов показало высокую достоверность вычислительных данных (рис. 3). Полученные результаты исследований можно использовать при анализе влияния состава газовой смеси, температуры проведения реакции, размеров химико-технологической установки для максимального выхода продуктов реакции. Построенный алгоритм доступен к применению для широкого класса задач химической промышленности.

Литература

1. Борисов В. Е., Якуш С. Е. Применение адаптивных иерархических сеток для расчета течений реагирующих газов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2015. Т. 16. Вып. 2.
2. Almgren A. S., Bell J. B., Colella P., Howell L. H., Welcome M. L. A Conservative Adaptive Projection Method for the Variable Density Incompressible Navier-Stokes Equations // Journal of Computational Physics. 1998. Vol. 142. Issue 1. P. 1–46.
3. Day M. S., Bell J. B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combustion Theory and Modelling. 2000. Vol. 4. Issue 4. P. 535–556.
4. Стадниченко О. А., Снытников В. Н., Снытников Вл. Н. Математическое моделирование потоков многокомпонентного газа с энергоемкими химическими процессами на примере пиролиза этана // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. № 4. С. 658–668.

MSC 35Q30 76N15

Modeling the flow of a multicomponent reactive gas mixture using high accuracy algorithms

R.V. Zhalnin ¹, E.E. Peskova ¹, O.A. Stadnidchenko ², V.F. Tishkin ³

National Research Mordovia State University ¹, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS², Keldysh Institute of Applied Mathematics ³

УДК 517.938

Дискретные динамические системы с соленоидальными множествами седлового типа *

Н.В. Исаенкова ¹, Е.В. Жужома ²

Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации¹,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»²

Соленоиды изучаются в таких разделах математики, как топология, теория групп и теория динамических систем. Как инвариантное множество динамической системы, соленоид впервые появился в книге "Качественная теория дифференциальных уравнений" В.В. Немыцкого и В.В. Степанова [1]. В этой книге соленоид рассматривался как объект теории динамических систем и был использован для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, который состоит из почти периодических траекторий.

Соленоид впервые был введен Виеторисом в 1927 году, как пример однородного множества. Однородность означает, что локальная структура соленоида одинакова во всех его точках. С топологической точки зрения, *соленоид* – это множество, представимое в виде пересечения последовательности полноторий $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \dots \supset \mathcal{B}_i \supset \dots$, таких, что для любого $i \geq 1$ ось полнотория \mathcal{B}_{i+1} обходит $n_i \geq 2$ раз ось полнотория \mathcal{B}_i , не образуя крюков.

В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел С. Смейл, который построил несколько примеров структурно устойчивых и Ω -устойчивых диффеоморфизмов с притягивающими инвариантными множествами. Классическую конструкцию Смейла [2] можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, а затем сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем промежуточный полноторий вкладывается в исходный так, чтобы его ось прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория с сохранением дисковой структуры.

Напомним ряд определений перед тем, как перейти к формулировке основного результата. Пусть $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм замкнутого многообразия M , наделенного некоторой римановой метрикой ρ . Инвариантное множество $\Lambda \subset M$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное df -инвариантное разложение касательного расслоения $T_\Lambda M$ в сумму $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ устойчивого и неустойчивого подрасслоений таких, что:

$$\|df^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \quad \|df^{-n}(w)\| \leq C\lambda^n \|w\|, \quad \forall v \in E_\Lambda^s, \forall w \in E_\Lambda^u, \forall n \in \mathbb{N},$$

для некоторых фиксированных чисел $C > 0$ и $0 < \lambda < 1$. Для $x \in \Lambda$ множества

$$W^s(x) = \{y \in M : \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(f^j(x), f^j(y)) \rightarrow 0\}, \quad W^u(x) = \{y \in M : \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \rightarrow 0\}$$

являются гладкими инъективно вложенными подмногообразиями, при этом E_x^s и E_x^u являются касательными пространствами к W_x^s и W_x^u соответственно. Множество $W^s(x)$ ($W^u(x)$) называется *устойчивым* (*неустойчивым*) многообразием точки x .

Неблуждающее множество $NW(f)$ определяется как множество неблуждающих точек и является f -инвариантным и замкнутым. Точка $x \in M$ является *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U пересечение $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ для бесконечного множества целых n .

Диффеоморфизм f называется *A-диффеоморфизмом*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$ [2]. Согласно теореме Смейла [2] о спектральном разложении, множество $NW(f)$ любого A-диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения непересекающихся *базисных*

*Результаты работы получены при финансовой поддержке РФФ (проект 17-11-01041).

множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ таких, что каждое Ω_i является замкнутым, f -инвариантным и содержит всюду плотную в Ω_i орбиту. Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно отлично от изолированной периодической орбиты. Множество Ω_i называется *аттрактором*, если существует окрестность U этого множества такая, что $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = \Omega_i$. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} . Аттрактор Ω называется *растягивающимся*, если топологическая размерность Ω совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки.

Из статьи [3] следует, что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до некоторого диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А Смейла, замкнутого 3-многообразия с двумя базисными множествами, являющимися соленоидами, но при этом, одно базисное множество является аттрактором, а второе - репеллером.

Главным результатом данной работы является построение примера диффеоморфизма, который имеет одномерное соленоидальное базисное множество с неустойчивым и устойчивым инвариантными многообразиями произвольной ненулевой (наперед заданной) размерности. В этом случае базисное множество будет иметь седловой тип (не будет являться ни аттрактором, ни репеллером). Построенный диффеоморфизм с положительной топологической энтропией и в некоторой окрестности базисного множества диффеоморфизм является консервативным. Хотелось бы отметить, что сформулированная ниже теорема является обобщением основных результатов работ [4], [5].

Теорема. Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n - 1$ существует А-диффеоморфизм $F : M^n \rightarrow M^n$ некоторого замкнутого многообразия M^n такого, что неблуждающее множество $NW(F)$ диффеоморфизма F содержит одномерное базисное множество Λ , являющееся топологическим соленоидом, с размерностями устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий $\dim W^s(x) = k$, $\dim W^u(x) = n - k + 1$ соответственно для всех точек $x \in \Lambda$. Более того, F имеет положительную топологическую энтропию, и в некоторой окрестности множества Λ якобиан диффеоморфизма F равен единице.

Литература

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 448 с.
2. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. pp. 747-817.
3. Bothe H. The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds // Math. Nachr. 1983. V. 112. pp. 69-102.
4. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б. О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы "динамо") // Успехи физ. наук. 1972. Т. 106. С. 431-457.
5. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., Медведев В.С. Об одной модели быстрого кинематического динамо // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 1. С. 14-28.

MSC 37D20 37G30

Discrete dynamical systems with solenoid saddle-type sets

N. V. Isaenkova ¹, E. V. Zhuzhoma ²

Nizhniy Novgorod Academy of the Ministry of the Interior of the Russian Federation ¹,
National research University "Higher school of Economics"²

УДК 519.6, 544.33, 544.182.34

Конструирование гомодесмических реакций для циклических химических соединений *

А.С. Исмагилова ¹, А.И. Ахметьянова ¹, Ф.Т. Зиганшина ²

Башкирский государственный университет¹, Уфимский государственный нефтяной
технический университет²

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых авторами в [1, 2]. Ранее показано, что наиболее надежным является метод сравнительного расчета, основанный на использовании гомодесмических реакций (ГДР). Целью является конструирование независимых ГДР для циклических химических соединений, позволяющее проводить независимую оценку энергосодержания вещества, выявлять ошибочные данные и, в конечном счете, надежно определять тепловые эффекты химических реакций.

Алгоритм конструирования базиса ГДР для циклического соединения включает в себя следующие основные этапы:

1. Представить всевозможные варианты молекулы, которая получена из исходной «разрывом» одной или нескольких связей. Выявить все независимые комбинации внутренних групп, образующих химическое соединение.

2. Для каждого составляющего подобрать концевые группы из тех, что присутствуют в исходном химическом соединении. Сформировать правые части ГДР. Если в составе соединения нет концевых или нет подходящих среди имеющихся, сконструировать «новую», присоединением валентно-связанных атомов.

3. Для определения реагента (реагентов) исходного химического соединения учесть групповой состав продуктов правой части ГДР. Реагенты состоят из концевых групп, входящих в продукты.

4. Рассчитать стехиометрические коэффициенты в ГДР согласно групповому балансу – сохранение числа групп (внутренних и концевых) каждого типа.

Рассмотрим пример конструирования базиса ГДР для молекулы бициклопропила C_6H_{10} . Строение соединения представляется в виде комбинации двух типов внутренних групп (B_1, B_2) (Рис. 1). В данной молекуле присутствуют два типа химических связей: $C - C$ и $C - H$.

Всевозможные варианты разрывов связей представлены на рис. 2. Для слагаемых всех тридцати пяти комбинаций подходящей является концевая группа K_1 . Тем самым нетрудно сформировать правые части ГДР. Учет группового состава продуктов правой части ГДР позволяет определить реагент K_1K_1 для исследуемого химического соединения. Сохранение группового баланса позволяет проставить стехиометрические коэффициенты в ГДР.

Таким образом, получен базис из 35 ГДР:

- 1) $C_6H_{10} + K_1K_1 \rightarrow K_1B_1B_1B_2K_1(B_2B_1B_1)$
- 2) $C_6H_{10} + K_1K_1 \rightarrow K_1B_1B_2B_1K_1(B_2B_1B_1)$
- 3) $C_6H_{10} + K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_2B_1B_1$
- 4) $C_6H_{10} + 2K_1K_1 \rightarrow K_1B_1B_1K_1 + K_1K_1B_2(B_2B_1B_1)$
- 5) $C_6H_{10} + 2K_1K_1 \rightarrow K_1B_1B_1(B_2K_1)(B_2K_1)(B_1B_1K_1)$
- 6) $C_6H_{10} + 2K_1K_1 \rightarrow (B_1K_1)(B_1K_1)B_2B_2(B_1K_1)(B_1K_1)$
- 7) $C_6H_{10} + 2K_1K_1 \rightarrow K_1B_1K_1 + K_1B_1(K_1B_2)(B_2B_1B_1)$
- 8) $C_6H_{10} + 2K_1K_1 \rightarrow (K_1B_1)(K_1B_1)B_2(B_2K_1)B_1(K_1B_1)$
- 9) $C_6H_{10} + 2K_1K_1 \rightarrow (K_1B_1)B_1(K_1B_2K_1) + K_1(B_2B_1B_1)$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-07-00584 А).

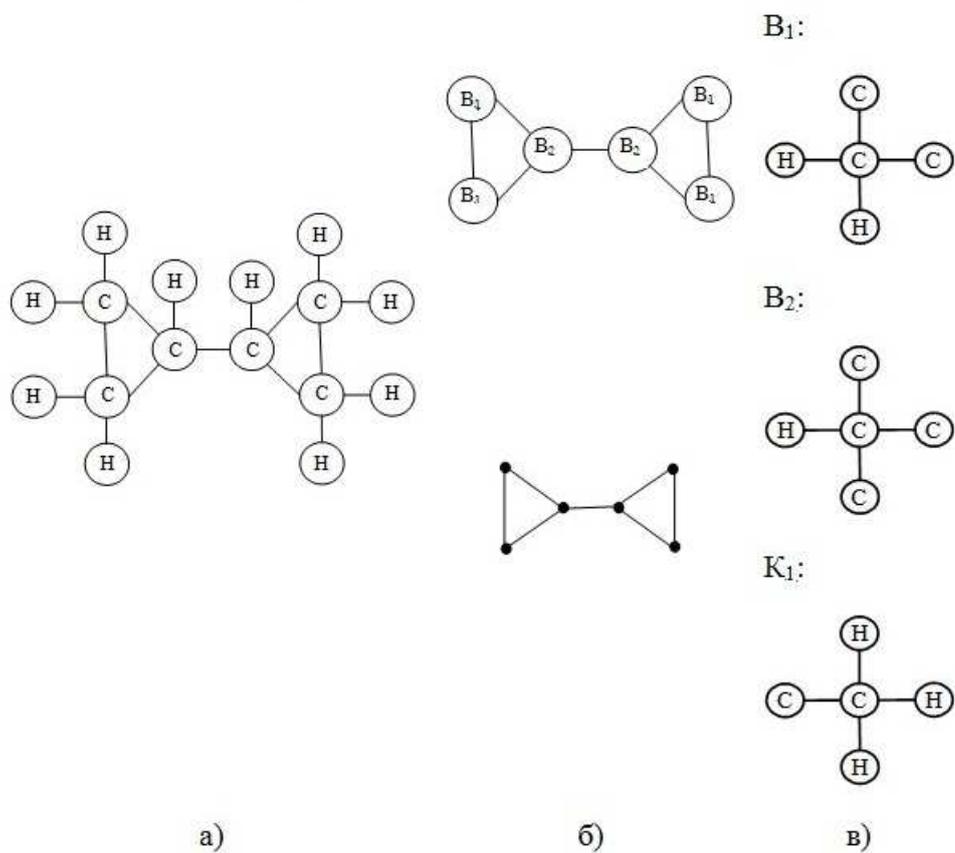


Рис. 1. а) Молекула бициклопропила; б) Структурная формула молекулы и ее групповой состав; в) Внутренние группы B_1 и B_2 и концевая группа K_1 .

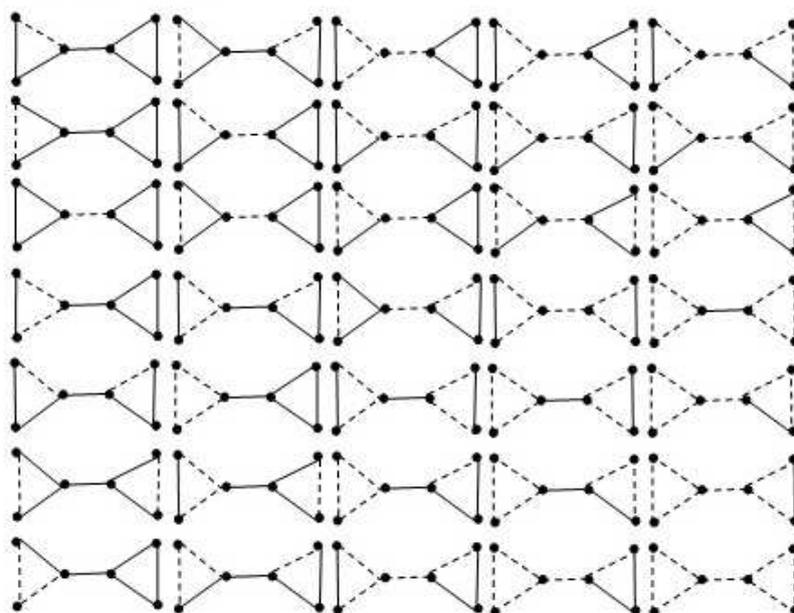


Рис. 2. Варианты разрывов связей в молекуле бициклопропила.

- 10) $C_6H_{10} + 2K_1K_1 \rightarrow K_1B_1(B_2K_1)B_1K_1 + K_1(B_2B_1B_1)$
- 11) $C_6H_{10} + 3K_1K_1 \rightarrow K_1B_1B_1K_1 + K_1K_1B_2(B_2K_1)B_1B_1K_1$
- 12) $C_6H_{10} + 3K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1K_1 + K_1K_1B_2(B_2B_1B_1)$
- 13) $C_6H_{10} + 2K_1K_1 \rightarrow K_1B_1B_1K_1 + K_1K_1B_2(B_2B_1B_1)$
- 14) $C_6H_{10} + 3K_1K_1 \rightarrow K_1B_1K_1 + K_1B_1(B_2K_1)(B_2K_1)B_1B_1K_1$
- 15) $C_6H_{10} + 3K_1K_1 \rightarrow K_1B_1B_1K_1 + K_1K_1B_2K_1 + K_1(B_2B_1B_1)$
- 16) $C_6H_{10} + 3K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1B_1B_2K_1K_1$
- 17) $C_6H_{10} + 3K_1K_1 \rightarrow K_1B_1K_1 + K_1B_1B_2K_1K_1 + K_1(B_2B_1B_1)$
- 18) $C_6H_{10} + 3K_1K_1 \rightarrow K_1B_1(B_2K_1)B_1K_1 + K_1K_1B_2B_1K_1$
- 19) $C_6H_{10} + 4K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1B_1K_1 + K_1K_1B_2B_2K_1K_1$
- 20) $C_6H_{10} + 4K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1K_1 + K_1K_1B_2(B_2K_1)B_1B_1K_1$
- 21) $C_6H_{10} + 4K_1K_1 \rightarrow K_1B_2K_1K_1 + K_1B_1B_1K_1 + K_1K_1B_2B_1B_1K_1$
- 22) $C_6H_{10} + 4K_1K_1 \rightarrow K_1B_2K_1K_1 + K_1B_1B_1K_1 + K_1B_1(B_2K_1)B_1K_1$
- 23) $C_6H_{10} + 4K_1K_1 \rightarrow K_1B_1K_1 + K_1B_1B_2K_1K_1 + K_1K_1B_2B_1B_1K_1$
- 24) $C_6H_{10} + 4K_1K_1 \rightarrow K_1B_1K_1 + K_1B_1B_2K_1K_1 + K_1B_2(B_1K_1)(B_1K_1)$
- 25) $C_6H_{10} + 5K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1B_1K_1 + 2K_1K_1B_2K_1$
- 26) $C_6H_{10} + 5K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1K_1 + K_1K_1B_2B_2K_1K_1 + K_1B_2B_2K_1$
- 27) $C_6H_{10} + 5K_1K_1 \rightarrow 3K_1B_1K_1 + K_1K_1B_2(B_2K_1)B_1K_1$
- 28) $C_6H_{10} + 5K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1K_1 + K_1K_1B_2K_1 + K_1K_1B_2B_1B_1K_1$
- 29) $C_6H_{10} + 5K_1K_1 \rightarrow K_1B_1B_1K_1 + K_1K_1B_2K_1 + K_1K_1B_2B_1K_1 + K_1B_1K_1$
- 30) $C_6H_{10} + 5K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1K_1 + 2K_1B_1B_2K_1K_1$
- 31) $C_6H_{10} + 5K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1K_1 + K_1K_1B_2K_1 + K_1B_1(B_2K_1)B_1K_1$
- 32) $C_6H_{10} + 6K_1K_1 \rightarrow 4K_1B_1K_1 + K_1K_1B_2B_2K_1K_1$
- 33) $C_6H_{10} + 6K_1K_1 \rightarrow 3K_1B_1K_1 + K_1K_1B_2K_1 + K_1K_1B_2B_1B_1K_1$
- 34) $C_6H_{10} + 6K_1K_1 \rightarrow 2K_1B_1K_1 + 2K_1K_1B_2K_1 + K_1B_1B_1K_1$
- 35) $C_6H_{10} + 7K_1K_1 \rightarrow 4K_1B_1K_1 + 2K_1K_1B_2K_1$

Литература

1. Хурсан С. Л. Сопоставительный анализ теоретических методов определения термодинамических характеристик органических соединений // Вестник Башкирского университета. Т.19, № 2. 2014. С. 395-401.
2. Хурсан С. Л., Исмагилова А. С., Ахмеров А. А., Спивак С. И. Конструирование гомодесмических реакций для расчета энтальпий образования органических соединений // Журнал физической химии. Т. 90, № 4. 2016. С. 569-575.

MSC 92E10 90C35 65K05

Design of homodesmic reactions for cyclic chemical compounds*

A.S. Ismagilova¹, A.I. Akhmetyanova¹, F.T. Ziganshina²

Bashkir State University¹, Ufa State Petroleum Technological University²

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 18-07-00584 A).

Трёхфакторная модель процесса уменьшения шероховатости металлических поверхностей

Р.В. Иутин¹, Р.К. Галимова¹, З.Я. Якупов¹

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева-КАИ¹

Процессы, протекающие на границе раздела электролит-металл и в разрядном промежутке при обработке поверхностей парогазовым разрядом с жидким электродом, представляют собой большой набор взаимосвязанных явлений (физических, химических, электрохимических). Основными физико-химическими явлениями, определяющими процесс обработки поверхности в рассматриваемой технологии, являются электрическое поле, а также режимы тепло- и массопереноса между обрабатываемой поверхностью и электролитом [1-8]. Важный элемент проведения технологического эксперимента – контроль его параметров (напряжение разряда, сила тока в разрядном промежутке, температура электролита и т. д.). Кроме того, необходимо отслеживать их постоянство.

Как и в других технологиях, в исследуемом процессе существует ряд неконтролируемых входных переменных. Это приводит к случайному изменению выходных параметров. Планирование эксперимента при этом встречает значительные трудности из-за существенного количества влияющих факторов, о взаимосвязях которых неизвестно. Поэтому математический аппарат полезен как уже на стадии обработки результатов измерений, так и при подготовке проведения технологического эксперимента. Тогда деятельность инженера-исследователя становится более предсказуемой [9].

Была проведена работа:

– по выделению факторов, существенно влияющих на результат обработки твердых металлических поверхностей и жидкостей электрическим разрядом в паровоздушной среде;

– по получению математического описания исследуемого процесса в виде расчетных уравнений, связывающих падение напряжения в межэлектродном промежутке (U_p), силу разрядного тока (I_p), температуру электролита (T) и степень улучшения шероховатости обрабатываемой металлической поверхности;

– по разработке рекомендаций оптимизации технологического процесса.

Рассмотрены возможности *трехфакторного эксперимента для создания регрессионной модели* изучаемого технологического процесса обработки поверхностей металлических деталей (в системе «парогазовый разряд между твердым металлическим катодом и водным раствором салициловой кислоты»). Математические методы оптимального планирования эксперимента позволяют получить математическую модель процесса даже при отсутствии сведений о его механизме. Это полезно, когда необходимо уменьшить затраты на проведение сложных и дорогостоящих исследовательских ра-

бот. Поиск математического описания рассматриваемого процесса осуществлен в виде линейной модели:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3.$$

Условия проведения экспериментов с выделением факторов, существенно влияющих на технологический процесс и результаты изменения шероховатости металлических поверхностей (δR_a) в зависимости от характеристик технологического процесса, представлены в виде графиков (рис. 1-3):

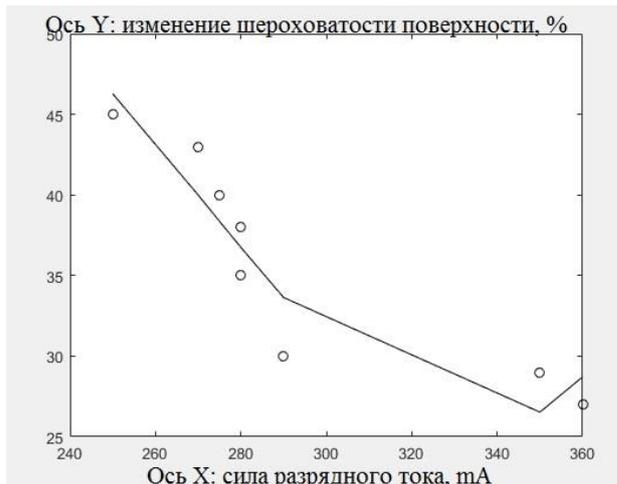


Рис. 1. Зависимость шероховатости поверхности от силы разрядного тока (электролит - водный раствор салициловой кислоты)

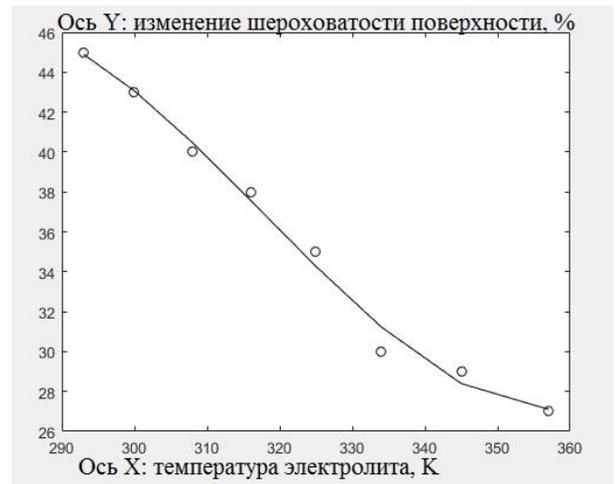


Рис. 2. Зависимость шероховатости поверхности от температуры электролита (электролит - водный раствор салициловой кислоты)

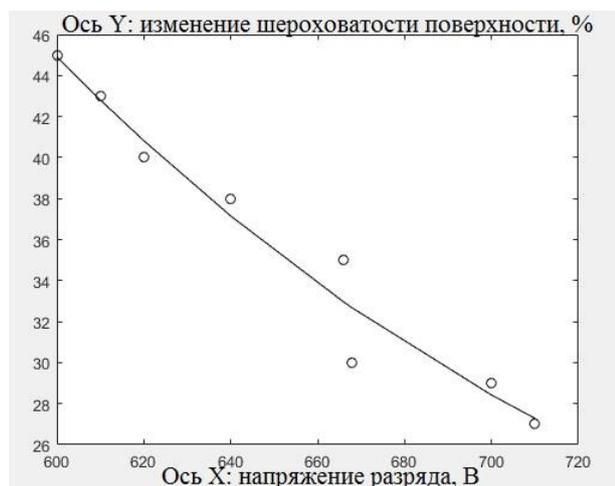


Рис. 3. Зависимость шероховатости поверхности от напряжения разряда (электролит - водный раствор салициловой кислоты)

Для описания зависимости изменения шероховатости поверхности от силы тока в разряде, разрядного напряжения и температуры электролита получено уравнение регрессии:

$$\delta R_a = 736,006 - 0,863I_p - 0,594T.$$

Проверена значимость коэффициентов регрессии и адекватность уравнений регрессии.

На рис. 4 и 5 представлены функции отклика:

$$\delta R_a = f(I_p, T);$$

$$\delta R_a = f(U_p, T).$$

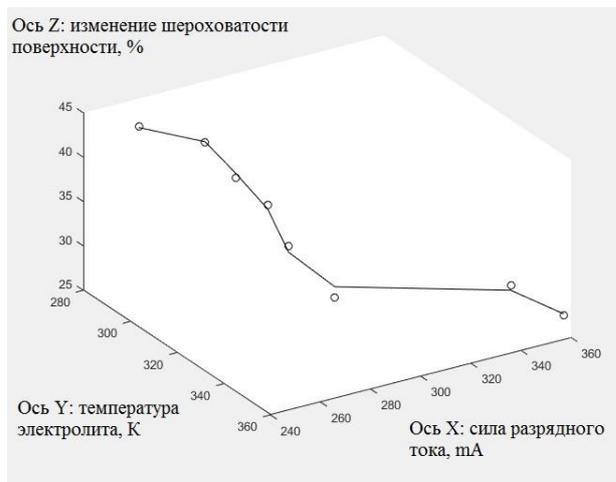


Рис. 4. Зависимость шероховатости поверхности от температуры электролита и силы разрядного тока (электролит - водный раствор салициловой кислоты)

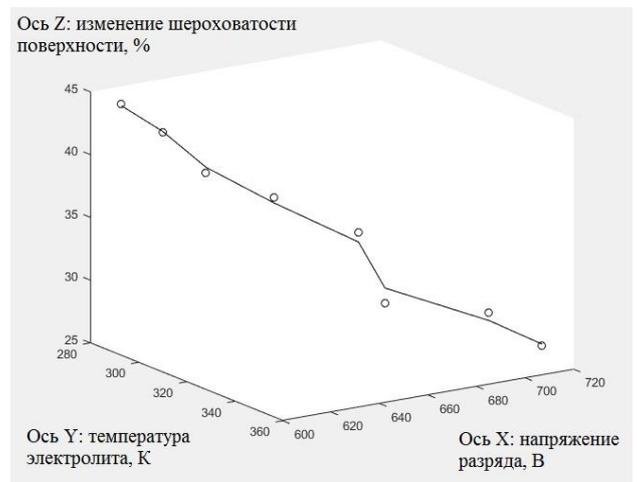


Рис. 5. Зависимость шероховатости поверхности от температуры электролита и напряжения разряда (электролит - водный раствор салициловой кислоты)

Методика математического описания технологии уменьшения шероховатости металлических поверхностей в условиях проведенных экспериментов позволит использовать информацию о влиянии факторов обработки для дальнейших исследований и оптимизации рассматриваемых процессов.

Литература

1. Галимова Р. К., Якупов З. Я. Исследование технологического процесса обработки поверхностей изделий парогазовым разрядом между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами// Fundamental and applied sciences today: Proceedings of the Conference. North Charleston, 25 – 26.07.2013, Vol. 2 CreateSpace. 4900 LaCross Road., SC, USA 29406. Moscow: spc Academic, 2013. P. 147 – 149.
2. Галимова Р.К., Юсупова А.Р. Проблема планирования в технологическом эксперименте//Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol.2. North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. 297 p.

3. Галимова Р.К., Зайнеев А.А. Экспериментально-статистическое моделирование технологического процесса// Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. 297 p.

4. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами// Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1. С.135 – 139.

5. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Уравнения эллиптического типа в моделировании технологических процессов// Теория функций, её приложения и смежные вопросы: Материалы XII международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 27.06-04.07.2015 г.). Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского/Казанское математическое общество. Т.51. Казань: Изд-во Казан. матем. общества, изд-во Академии наук РТ, 2015. С. 144 – 146.

6. Якупов З. Я., Галимова Р. К. Основная концепция исследования групп преобразований Ляпунова// Вестник Казанского государственного технического университета им. Туполева. 2017. № 4. С. 171 – 176.

7. Галимова Р. К. Характеристики плазменной электротермической установки с жидкими электродами (электролиты с добавлением неорганических и органических примесей). Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. СПб. 1997. 16 с.

8. Якупов З.Я., Галимова Р.К. Методы наименьших квадратов и наименьших модулей в научно-технических расчётах: Учебное пособие. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. 140 с.

MSC 62H12

The three-factor model of the process of roughness reduction of metal surfaces

R.V. Iutin¹, R.K. Galimova¹, Z.Ya. Yakupov¹

Kazan National Research Technical University
named after A.N. Tupolev-KAI¹

УДК 004.942

Модели и численный метод в проектировании авиаприборов

Е.Д. Калинов¹

Ульяновский государственный университет¹

При проектировании авиационных приборов, таких как частотные датчики давления, целесообразным является применение систем инженерного анализа для расчета рабочих параметров изделия.

Принцип работы рассматриваемого датчика основан на функциональной зависимости частоты резонансных колебаний упругого чувствительного элемента от величины измеряемого давления: $f=F(P)$. В качестве чувствительного элемента – резонатора – применяется тонкостенный цилиндр.

Система самовозбуждения поддерживает незатухающие изгибные колебания резонатора, в процессе которых его поперечное сечение принимает форму эллипса, вытянутого попеременно то по одной, то по другой из двух взаимно перпендикулярных осей (рис. 1) [1].

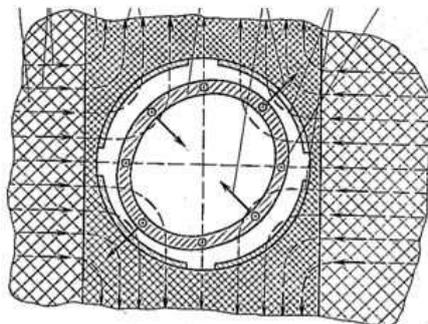


Рис. 1. Деформация резонатора

Применяя пакет программ Ansys, можно рассчитать свободные и вынужденные колебания резонатора датчика в условиях, аналогичных рабочим: находящегося под воздействием теплового поля, внутреннего давления и внешних сил.

Схема построения расчетной модели представлена на рисунке 2:

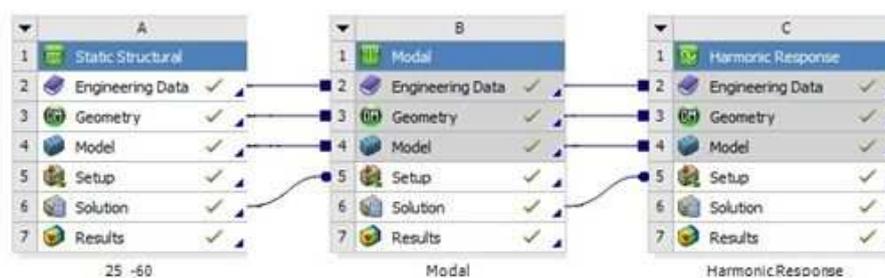


Рис. 2. Схема решения задачи

Геометрическая модель резонатора подготавливается к CAD-системе и импортируется в Ansys. В окне Engineering Data создается материал со свойствами, соответствующими

заявленной температуре.

В модуле Static Structural во вкладке Mesh, предварительно выставив необходимые параметры сетки, выполняется конечно-элементное разбиение модели. Далее задается значение давления (Pressure) на внутренние стенки, величина теплового воздействия (Thermal Condition) на резонатор и его закрепление (Fixed Support) по внешней поверхности цилиндра.

Настройкой связей между модулями Ansys задается передача результатов расчета Static Structural в модуль Modal, в параметрах которого выставляется количество искомых мод.

В модуле Harmonic Response используется метод суперпозиции мод, в основу которого заложено применение ранее полученных собственных векторов (мод) для определения отклика конструкции [4]. В настройках расчета задаются минимальные и максимальные значения частот, количество интервалов предела исследуемых частот, а также параметры амплитуды ускорения.

Обновив проект с помощью Update Project в окне Ansys Workbench выполняем последовательное решение в модулях Static Structural, Modal и Harmonic Response.

В результате расчета выявляется рабочая частота резонатора на форме колебаний, деформация датчика на которой совпадает с его рабочим поведением.

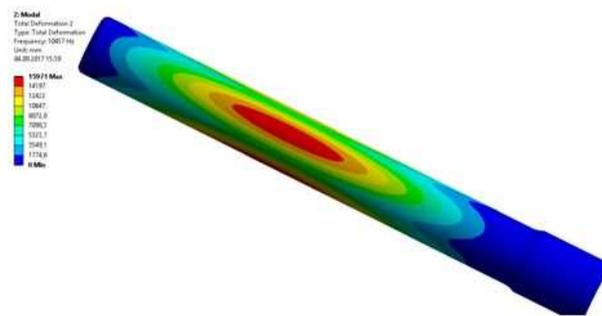


Рис. 3. Деформация резонатора на рабочей частоте

Используя результаты гармонического анализа, строится амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) резонатора.

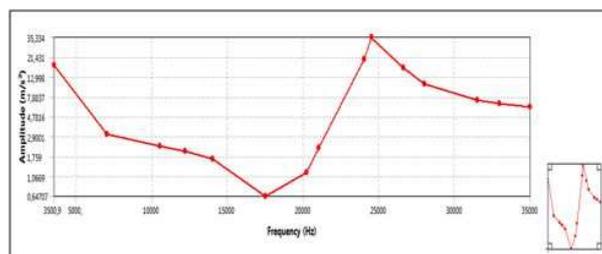


Рис. 4. АЧХ резонатора

Изменив предварительно значения начальных условий и выполнив перерасчет можно выявить рабочие частоты датчика в различных состояниях окружающей среды. Учет допусков на размеры резонатора в геометрических моделях позволяет отследить их влияние на показания датчика.

Для повышения эффективности расчетов статики и динамики датчиков могут быть использованы вариационно-сеточные методы [2, 3], в которых применяются ортогональные финитные функции.

Литература

1. Аш Ж. Датчики измерительных систем. М.: Мир, 1992. 654 с.
2. Красильников А. Р., Леонтьев В. Л. О вариационно-сеточном методе теории пластин // Математическое моделирование, 2005. Т. 17, № 3. С. 23-34.
3. Леонтьев В. Л. Вариационно-сеточный метод решения задач о собственных колебаниях упругих трехмерных тел, связанный с использованием ортогональных финитных функций // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2002. № 3. С. 117.
4. Леонтьев Н. В. Применение системы ANSYS к решению задач модального и гармонического анализа. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные системы в математике и механике». Нижний Новгород, 2006. 101 с.

MSC 68U20

Models and numerical method for the design of aircraft sensors

E.D. Kalinov¹

Ulyanovsk state university¹

УДК 519.633

Построение точных решений, содержащих разрыв, распространяющийся по неоднородному фону

Ю.А. Криксин¹, П.А. Кучугов^{1,2}, М.Е. Ладонкина^{1,2}, О.А. Неклюдова^{1,2},
В.Ф. Тишкин^{1,2}

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН¹, Институт
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН²

Уравнения и системы уравнений типа законов сохранения [1,2] возникают во многих практических приложениях, в связи с чем их численное решение представляет значительный интерес. С этой целью разрабатываются всё более совершенные численные методы и алгоритмы [3]. Важной составляющей этого процесса является этап верификации решений, в особенности содержащих сильные и слабые разрывы, получаемых с помощью создаваемых программных кодов. Обычной практикой здесь является использование различных кусочно-постоянных решений. Много работ посвящены построению аналитического решения для сложных задач, имеющих прикладное значение [4-6]. Однако в данных работах рассматриваются либо кусочно-постоянные начальные данные, либо решения, исключаяющие разрывы. Более тщательное исследование расчетных методик возможно провести на более сложных примерах, в которых разрывы распространяются по неоднородному фону, однако количество задач, имеющих точные решения такого рода, мало.

В данной работе авторы проводят построение разрывных решений для квазилинейного уравнения переноса и системы уравнений мелкой воды, используя характеристический подход.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №17-01-00361-а, 16-01-00333.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
2. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд.-во иностр. Лит., 1959. 617 с.
3. Куликовский А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. М.: Физматлит, 2001. – 608 с.

4. Остапенко В.В. Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // Прикладная механика и техническая физика, 2003, Т. 44, № 6. С. 107-122.
5. Хакимянов Г.С. Баутин С.П. Дерябин С.Л. Соммер А.Ф. Шокина Н.Ю. Аналитическое и численное исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности линии уреза [Электронный ресурс] // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: международная конференция (г. Новосибирск, 30 мая – 4 июня 2011 г.), Режим доступа: http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/38017/45082/Khakimzyanov_doklad_Yan90.pdf.
6. Teshukov V., Russo G., Chesnokov A., Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2d rotational flows // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2004. Vol. 14, No. 10. pp. 1451-1479.

MSC 35Q35

Construction of exact solutions containing a discontinuity spreading over a non-uniform background

YU.A. Kriksin¹, P.A. Kuchugov^{1,2}, M.E. Ladonkina^{1,2}, O.A. Neklyudova^{1,2},
V.F. Tishkin^{1,2}

Keldysh Institute of Applied Mathematics¹, Lavrentyev Institute of
Hydrodynamics²

УДК 517.9

О стабилизации установившихся движений мобильного робота

И.В. Кудашкина¹, Е.А. Сутыркина¹

Ульяновский государственный университет¹

В докладе рассмотрена задача об управлении мобильным роботом с тремя омни-колесами, движущегося по горизонтальной поверхности без проскальзывания [1]. Следуя [1], предположим, что $Oxyz$ — неподвижная система координат с горизонтальной плоскостью Oxy , ось Oz направлена вертикально вверх, C — центр равностороннего треугольника, в вершинах которого находятся омни-колеса, $Cx_1y_1z_1$ — подвижная система координат, жестко связанная с платформой робота, ось Cx_1 параллельна оси вращения первого колеса, ось Cz_1 вертикальна, оси Cy_1 , Cz_1 и Cx_1 образуют правую систему координат, плоскости Oxy и Cx_1y_1 параллельны.

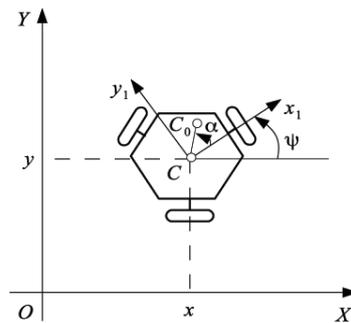


Рис. 1. Схема омни-мобильного робота.

Робот состоит из четырех абсолютно жестких тел: платформы и трех колес. Массой и размерами роликов пренебрегаем. Расстояние от центра платформы до центра каждого колеса равно a , r — радиус колеса. Центр масс системы совпадает с центром C .

Предположим, что ролики всех колес вращаются без проскальзывания, тогда движение всей системы определяется изменением по времени трех координат: двух декартовых координат x и y центра C в неподвижной системе координат $Oxyz$ и угла поворота платформы вокруг вертикальной оси, отсчитываемого от оси Ox . В соответствии с [1] положим m_0 и m_1 — массы платформы и колеса робота, $m = m_0 + 3m_1$. Пусть также I_s — приведенный момент инерции робота.

Уравнения движения робота в переменных x, y, ψ , представленные в [1], могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 3m_1\dot{y}\dot{\psi} &= \frac{1}{2} \left(\sin \psi M_1 + \sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right)M_2 + \sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right)M_3 \right) \\ m\ddot{y} + 3m_1\dot{x}\dot{\psi} &= \frac{1}{2} \left(-\cos \psi M_1 - \cos\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right)M_2 - \cos\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right)M_3 \right) + I_s\ddot{\psi} = \\ &= -\frac{a}{r}(M_1 + M_2 + M_3) \end{aligned} \quad (1)$$

где M_j — управляющий момент, приложенный j -му колесу.

Решается задача о стабилизации программного положения робота $x = x_0 = const$, $y = y_0 = const$, $\psi = \psi_0 = const$ посредством цифровых регуляторов, в том числе ПД-регуляторов вида:

$$M = P(\psi(t_n))M_j^0(t_k), \quad P(\psi) = \frac{2}{3} \left(\begin{pmatrix} \sin \psi & -\cos \psi & -\frac{1}{2a} \\ \sin(\psi + \frac{2\pi}{3}) & -\cos(\psi + \frac{2\pi}{3}) & -\frac{1}{2a} \\ \sin(\psi + \frac{4\pi}{3}) & -\cos(\psi + \frac{4\pi}{3}) & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix} \right) \quad (2)$$

где

$$M_j^0(t_k) = -\mu_j(z(t_k) - z^0) - \nu_j \dot{z}(t_k) \quad (3)$$

$$z' = (x - x_0, y - y_0, \psi - \psi_0)$$

Полученные результаты дополняют результаты работ [2–4].

Литература

1. Мартыненко Ю.Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 610–619.
2. Андреев А.С., Перегудова О.А., Раков С.Ю. Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 3. С. 8–18.
3. Андреев А.С., Перегудова О.А. Стабилизация программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 95–105.
4. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // Systems Science and Control Engineering. 2018. Vol. 6. No. 1. P. 12–19. DOI: 10.1080/21642583.2017.1413437

MSC 68U20

On the stabilization of the steady motions of a mobile robot

I.V. Kudashkina¹, E.A. Sutyorkina¹

Ulyanovsk state university ^{superscript 1}

УДК 519.62

Метод продолжения решения и параметризация задач*

Е.Б. Кузнецов¹, С.С. Леонов¹

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)¹

В докладе излагаются основы метода продолжения решения по параметру. Вводятся понятия наилучшей параметризации и наилучшего параметра, которым является элемент длины дуги интегральной кривой задачи [1]. Рассматривается преобразование краевых задач для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), систем ОДУ с запаздывающим аргументом, систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), систем ДАУ с запаздывающим аргументом, систем интегро-дифференциально алгебраических уравнений (ИДАУ), систем ИДАУ с запаздывающим аргументом к наилучшему аргументу, т.е. наилучшая параметризация [2]. Вводится понятие модифицированного наилучшего аргумента [3] и обсуждается его применение при решении начальных задач с особенностями. Демонстрируются достоинства этой параметризации при решении, как тестовых задач, так и задач механики деформируемого твердого тела.

Литература

1. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
2. Кузнецов Е. Б. Параметризация краевых задач и прохождения точек бифуркации. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
3. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал выч. математ. и математич. физики. 2017. Т. 57. № 6. С. 934-957.

MSC 34B15

Method of solution continuation and parameterization of problems

E.B. Kuznetsov¹, S.S. Leonov¹

Moscow aviation institute (national research university)¹

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 18-19-00474.

УДК 519.62

Численное решение нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

Е.Б. Кузнецов¹, М.А. Яцкий¹

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)¹

Решается краевая задача для нелинейной системы ОДУ с нелинейными граничными условиями.

Для решения такого рода задач разработаны многочисленные методы. В обширной литературе по данной тематике используются всевозможные подходы и различные комбинации методов. Решение краевой задачи может пониматься как решение операторного уравнения в соответствующем пространстве; с этой позиции интересны методы приближенного решения операторных уравнений.

При выборе начального приближения нелинейного операторного уравнения в него вводится параметр X такой, что при $X = 0$ решение уравнения известно или может быть легко найдено, а при $X = 1$ получается решение исходного уравнения. Решение строится методом продолжения по параметру X .

Для исследования линейных краевых задач также предлагается использовать метод суперпозиции и метод сопряженного оператора. В случае нелинейной краевой задачи ее предварительно линеаризуют.

Для жестких задач предлагается использовать метод продолжения по параметру. Демонстрируются большие возможности метода продолжения, и приводятся теоремы о сходимости в функциональных пространствах.

Предлагается алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), используется метод продолжения по наилучшему параметру [1] и метод ортогональной прогонки С. К. Годунова [2] решения краевой задачи для линейной системы ОДУ.

Литература

1. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. // М: Эдиториал УРСС, 1999. 222 с.
2. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН, 1961. Т. 16, вып. 3(99) С. 171-174.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 18-19-00474.

MSC 34B18

**Numerical solution of a nonlinear boundary value
problem for
a system of ordinary differential equations**

E.B. Kuznetsov¹, M.A. Yatsky¹

Moscow Aviation Institute (national research university)¹

УДК 517.938

О гомотопических свойствах диффеоморфизмов поверхностей с одномерными просторно расположенными базисными множествами

Е. Д. Куренков¹

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»¹

В настоящем докладе рассматриваются A -диффеоморфизмы замкнутых ориентируемых двумерных многообразий M^2 рода $p \geq 2$ с одномерными просторно расположенными базисными множествами.

Введем на M^2 аналитическую структуру, превращающую M^2 в риманову поверхность. Рассмотрим конформное отображение π универсальной накрывающей \bar{M}^2 на M^2 , где \bar{M}^2 — плоскость Лобачевского в реализации Пуанкаре на внутренности круга $|z| < 1$ комплексной z -плоскости. Известно, что тогда M^2 соответствует однозначно определенная дискретная группа Γ неевклидовых переносов таких, что M^2 конформно эквивалентно \bar{M}^2/Γ и Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M^2)$ многообразия M^2 .

Для диффеоморфизма $f: M^2 \rightarrow M^2$ обозначим через $\bar{f}: \bar{M}^2 \rightarrow \bar{M}^2$ диффеоморфизм, накрывающий f , то есть диффеоморфизм, для которого $\pi \bar{f} = f \pi$. Преобразование $\bar{f}_*: \gamma' = \bar{f} \gamma \bar{f}^{-1}$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ есть автоморфизм группы Γ .

Пусть τ — произвольный автоморфизм группы Γ .

Определение 1. Автоморфизм τ группы Γ называется гиперболическим, если для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ($\gamma_1 \neq id$), $n \neq 0$ имеет место соотношение $\tau^n(\gamma_1) \neq \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1}$.

Определение 2. Одномерное базисное множество Λ A -диффеоморфизма $f: M^2 \rightarrow M^2$ назовем совершенным, если его дополнение $M^2 \setminus \Lambda$ состоит из конечного числа областей гооморфных диску.

В докладе устанавливается следующая теорема.

Теорема. Пусть $f: M^2 \rightarrow M^2$ — A диффеоморфизм замкнутого двумерного ориентируемого двумерного многообразия рода $p \geq 2$, обладающее совершенным базисным множеством Λ . Тогда \bar{f}_* является гиперболическим автоморфизмом.

Автор благодарит В. З. Гринеса за постановку задачи. Доклад подготовлен при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01041).

MSC 37B25, 37D15, 57M30

On the homotopy properties of diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional spaciouly-spaced basic sets

E.D. Kurenkov¹

National Research University – Higher School of Economics¹

УДК 519.633

О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн

М.Е.Ладонкина^{1,2}, О.А.Неклюдова^{1,2}, В.В.Остапенко^{2,3}, В.Ф.Тишкин^{1,2}

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН¹, Институт
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН², Новосибирский
государственный университет³

В классической работе [1], широко известной в связи со схемой распада разрыва, было введено понятие монотонности двухслойной по времени схемы и показано, что среди линейных разностных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Развитие теории численных методов сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого "запрета Годунова". Были разработаны различные классы как разностных, так и проекционных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций.

Для определения точности схемы в областях влияния ударных волн необходимо рассчитывать разрывные решения квазилинейных систем законов сохранения с ударными волнами, распространяющимися с переменной скоростью, за фронтами которых формируется непостоянное решение. Такое решение для систем законов сохранения, как правило, не описывается точными формулами и для определения скорости сходимости к нему разностного решения необходимо проведение серии расчётов на последовательности сжимающихся сеток.

Изучена точность разрывного метода Галеркина [2] при расчете разрывных решений квазилинейной гиперболической системы законов сохранения с ударными волнами, распространяющимися с переменной скоростью. В качестве конкретного примера рассмотрена аппроксимация системы законов сохранения теории мелкой воды. На примере этой системы показано, что подобно TVD- и WENO-схемам [3-5] повышенного порядка аппроксимации на гладких решениях, разрывный метод Галеркина [6], не смотря на высокую точность на гладких решениях и при локализации ударных волн, снижает свой порядок сходимости до первого порядка в областях влияния ударных волн.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №17-01-00361-а, 16-01-00333.

Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб., 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998. V. 1697. P. 151-268.
3. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О сходимости разностных схем сквозного счёта // Докл. АН., 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603.
4. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О реальной точности разностных схем сквозного счета // Матем. моделир., 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74.
5. Михайлов Н.А. О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир., 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.
6. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф., Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Мат. модел., 2012. Т. 24. № 12. С.124-128.

MSC 65N30

On the accuracy of the discontinuous Galerkin method in the calculation of shock waves

M.E. Ladonkina^{1,2}, O.A. Neklyudova^{1,2}, V.V. Ostapenko^{2,3}, V.F. Tishkin^{1,2}

Keldysh Institute of Applied Mathematics¹, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics², Novosibirsk State University³

Усреднение показателя шероховатости поверхности за время обработки детали методом наименьших квадратов

А.А. Павлова¹, Р.В. Иутин¹, З.Я. Якупов¹

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева-КАИ¹

Технический, технологический, физический эксперимент (инженерия) затруднительно представить без применения аппарата математического моделирования. Многие математические методы обработки численных данных зародились, применяются и преобразуются в соответствии с прикладными проблемами и потребностями. Существует большое количество источников по математическому анализу результатов экспериментов, например, [1-12]. Гармонический анализ, численное решение дифференциальных уравнений, построение номограмм и другие вопросы освещены в справочных пособиях. Информацию по специальному математическому материалу экспериментатор часто может либо не усвоить, либо использовать, прибегая к помощи специалистов в соответствующей области.

Большое количество факторов влияния на конечный результат эксперимента объясняет применение как личного опыта и интуиции исследователей, так и известных математических методов оптимального планирования эксперимента. Правильная интерпретация итогов планирования технологии возможна при понимании сущности проводимых процессов в совокупности с практическим опытом, предвидением и применением математических знаний ученым, инженером [1-12].

Различные виды электротехнологии, к которым относят и использование модификации парогазового разряда между твердым металлическим (или жидким неметаллическим) и жидким электродами, связаны с проведением большого количества сложных, затратных по времени и материалам экспериментов. Поэтому возникает задача поиска приемлемых методов планирования и моделирования экспериментов, позволяющих оптимизировать эти процессы. Применение математических методов обработки результатов эксперимента дает возможность создания моделей инженерных опытов, позволяющих в ряде случаев существенно сократить затраты времени и материальных средств на выполнение исследовательских работ.

Многие экспериментаторы используют достаточно простые методы обработки экспериментальной информации. Широко используются способы нахождения эмпирических уравнений графическим путем. При этом по полученным в ходе измерений данным или по результатам алгебраического преобразования переменных часто строится прямая линия. Большая же часть экспериментальной информации не позволяет получать линейные графики. Тогда необходимо подбирать некий общий многочлен степени n [1]:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n.$$

В работе представлены результаты регрессионного анализа экспериментальных данных по обработке деталей, подвергшихся механическому износу, с целью улучшения степени чистоты их поверхности (рис. 1-2).



Рис. 1. Экспериментальные результаты обработки металлических поверхностей (электролит - водный раствор CaCl_2 с добавлением муравьиной кислоты)

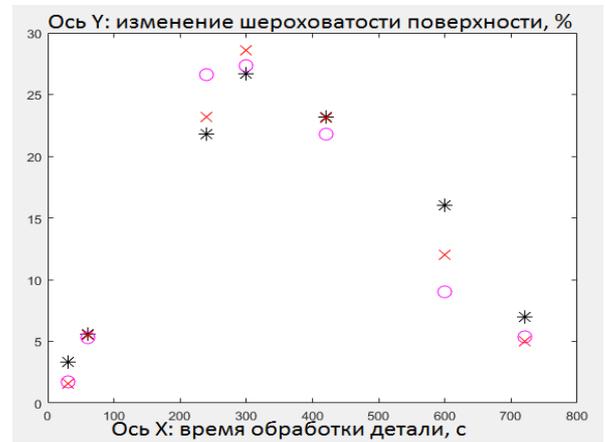


Рис. 2. Экспериментальные результаты обработки металлических поверхностей (электролит - водный раствор CaCl_2 с добавлением NH_4Cl и глицерина)

Процесс *усреднения* результатов экспериментальных данных *методом наименьших квадратов* представлен на рис. 3-4.

Проверка выполнимости основных постулатов и статистических гипотез об адекватности модели и значимости коэффициентов позволила получить регрессионную модель для расчета технологических режимов обработки деталей указанного типа с помощью парогазового разряда между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами при атмосферном давлении.

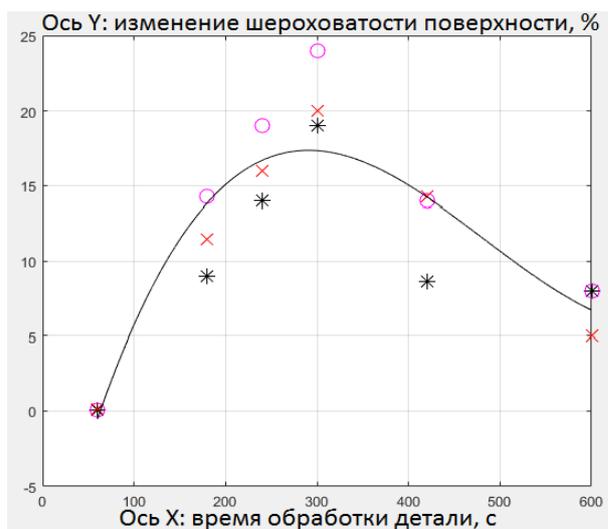


Рис. 3. Результат усреднения данных эксперимента, представленных на рис.1

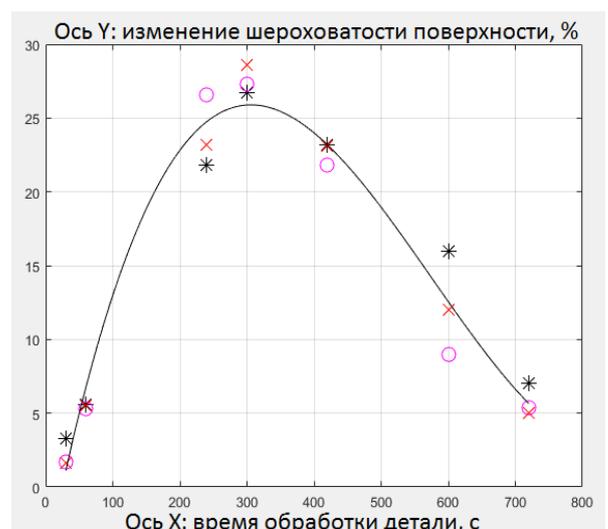


Рис. 4. Результат усреднения данных эксперимента, представленных на рис. 2

Зависимости улучшения чистоты поверхности (в %) от времени обработки детали в электролите заданного состава имеют вид:

$$y = A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3.$$

Получено усреднение (рис. 3) трех регрессионных уравнений для описания экспериментальных зависимостей, представленных на рис. 1:

- для (×)

$$\delta R_a = -6 \cdot 10^{-4} t + 23,81 \cdot 10^{-2} t^2 - 12,85 \cdot 10^{-7} t^3;$$

- для (○)

$$\delta R_a = -8 \cdot 10^{-4} t + 29,81 \cdot 10^{-2} t^2 - 15,87 \cdot 10^{-7} t^3;$$

- для (*)

$$\delta R_a = -4 \cdot 10^{-4} t + 19,91 \cdot 10^{-2} t^2 - 10,84 \cdot 10^{-7} t^3.$$

Математическое усреднение (рис. 4) процессов, представленных на рис. 2, обобщает следующие три закономерности:

- для (×)

$$\delta R_a = -3 \cdot 10^{-4} t + 17,49 \cdot 10^{-2} t^2 - 2,62 \cdot 10^{-7} t^3;$$

- для (○)

$$\delta R_a = -7 \cdot 10^{-4} t + 28,75 \cdot 10^{-2} t^2 - 7,71 \cdot 10^{-7} t^3;$$

- для (*).

$$\delta R_a = -5 \cdot 10^{-4} t + 23,63 \cdot 10^{-2} t^2 - 5,93 \cdot 10^{-7} t^3.$$

Литература

1. Якупов З.Я., Галимова Р.К. Методы наименьших квадратов и наименьших модулей в научно-технических расчётах: Учебное пособие. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. 140 с.
2. Якупов З. Я. Использование вероятностной схемы независимых испытаний в теории надёжности//Динамика неоднородных систем: Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН). Т.32(2). М.: Изд-во ЛКИ, 2008. С. 348-350.
3. Галимова Р. К., Якупов З. Я. Исследование технологического процесса обработки поверхностей изделий парогазовым разрядом между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами//Fundamental and applied sciences today: Proceedings of the Conference. North Charleston, 25 – 26.07.2013, Vol. 2 CreateSpace. 4900 LaCross Road., SC, USA 29406. Moscow: spc Academic, 2013. pp. 147 – 149.
4. Галимова Р. К., Якупов З. Я., Рахимова Л. Р. Метод наименьших квадратов в технике и технологии//Fundamental science and technology – promising developments IV: Proceedings of the Conference. North Charleston, 29-30.09.2014, Vol.1. North Charleston, SC, USA: CreateSpace. Moscow: spc Academic, 2014. pp. 204-206.
5. Якупов З. Я., Галимова Р. К., Сафин А. А. Сравнительный анализ методов наименьших квадратов и модулей // Развитие науки и образование в современном

- мире. В 7 частях. Часть 1: Сборник научных трудов по материалам Международной научно–практической конференции. – Москва, 30 сентября 2014 г. Москва: АР – Консалт, 2014. С. 92 – 96.
6. Якупов З. Я., Галимова Р. К., Никифоров С. А. О математической модели Тунгусского феномена//Инновационная наука и современное общество. Часть 2: Сборник статей Международной научно-практической конференции. Уфа, 25 октября 2014 г. Уфа: Аэтерна, 2014. С. 16 –20.
 7. Галимова Р.К., Зайнеев А.А. Экспериментально-статистическое моделирование технологического процесса// Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. –297 p.
 8. Галимова Р.К., Юсупова А.Р. Проблема планирования в технологическом эксперименте//Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol.2. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. 297 p.
 9. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогозовых разрядов с жидкостными электродами// Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17. № 1. С. 135 – 139.
 10. Якупов З.Я., Яруллин А.А. О роли коллективных стратегий в развитии нанотехнологий// Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. PP. 181 – 183.
 11. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Уравнения эллиптического типа в моделировании технологических процессов//Теория функций, её приложения и смежные вопросы: Материалы XII международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 27.06-04.07.2015 г.). Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского/Казанское математическое общество. Т.51. Казань: Изд-во Казан. матем. общества, изд-во Академии наук РТ, 2015. С. 144 – 146.
 12. Якупов З. Я., Галимова Р. К. Основная концепция исследования групп преобразований Ляпунова // Вестник Казанского государственного технического университета им. Туполева. 2017. № 4. С. 171 – 176.

MSC 62H12

Averaging of the surface roughness index during the machining time of the workpiece by the method of the least squares

A.A. Pavlova¹, R.V. Iutin¹, Z.Ya. Yakupov¹

Kazan National Research Technical University
named after A.N. Tupolev-KAI¹

УДК 533.9+517.2

Оценивание кислотности раствора в процессе получения зольей методом наименьших модулей

А.А. Павлова¹, А.Ш. Шакиров¹, Р.К. Галимова¹

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева-КАИ¹

При разработке технологических процессов для создания новых материалов главной и наитруднейшей задачей является необходимость связать информацию о большом количестве параметров и об их взаимодействиях. Математическое моделирование позволяет:

- разрабатывать описание уже существующих технологических процессов и проводить их оптимизацию;
- сравнивать различные варианты осуществления технологий;
- анализировать технологические процессы с целью выявления различных закономерностей.

Возможности моделирования на практике чаще всего затруднены из-за недостаточной изученности закономерностей тех или иных технологий процессов [1-13]. При моделировании процессов, сочетающих в себе элементы различных видов воздействия на вещество (например, электрическое, химическое) с большим количеством факторов влияния на конечный результат, удобно использовать экспериментально-статистическое моделирование. Это направление предполагает сбор и обработку данных технологических параметров обработки вещества [5-13]. Основное преимущество подобного подхода – в скорости создания моделей конкретных процессов.

В настоящее время вызывают активный интерес методы получения материалов с уникальными физическими свойствами (тонкая керамика, неорганические композиты, нанокompозиты). В частности, развиваются золь-гель-технологии неорганических материалов, которые позволяют получать оксидные материалы, роль которых очень важна в волоконной оптике, радиотехнической керамике, газочувствительной сенсорике и т. д. [1]. В процессе получения зольей могут использоваться различные типы химических реакций, методы физической конденсации и электрические методы (метод Брандта и метод Сведберга) [3].

В данной работе рассматривается возможность использования для получения зольей парогазового разряда между твердым металлическим анодом и жидкостным электролитическим катодом (рис. 1). Процесс получения зольей этим способом обусловлен сочетанием воздействия на обрабатываемый металлический анод электрического разряда в парогазовой среде с химическими реакциями в объеме жидкого катода, меняющим состав и содержание электролита [4]. В процессе горения парогазового разряда на поверхности электролита в приэлектродной области образуется коллоидный раствор (золь). Важным параметром процесса получения зольей является pH раствора. Полярность электродов оказывает влияние на изменение этой характеристики (рис. 2-4).

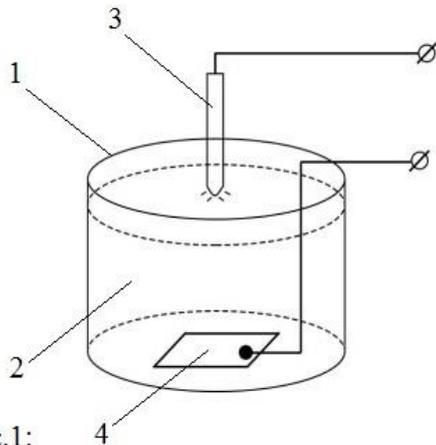


Рис.1:
 1. Электролитическая ячейка;
 2. Электролит (жидкий электрод);
 3. Твёрдый металлический электрод;
 4. Токопровод

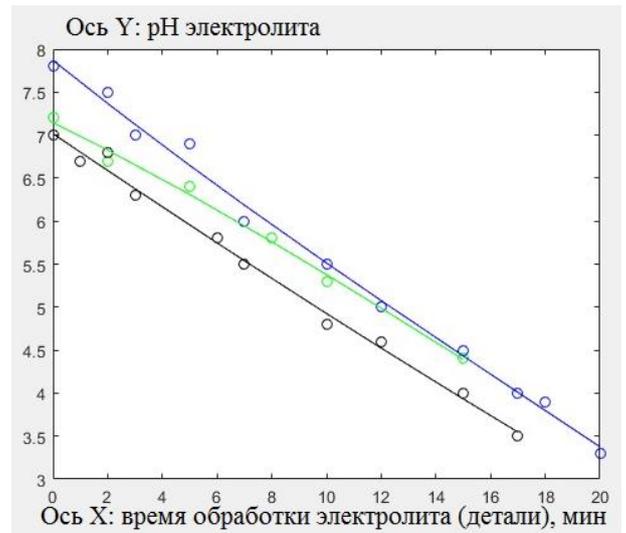


Рис. 2. Зависимость кислотности электролита (жидкий катод) от времени обработки детали

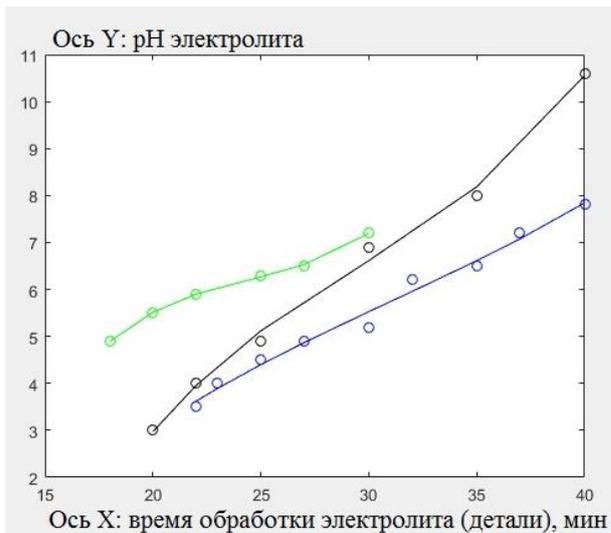


Рис. 3. Зависимость кислотности электролита (жидкий анод) от времени обработки детали

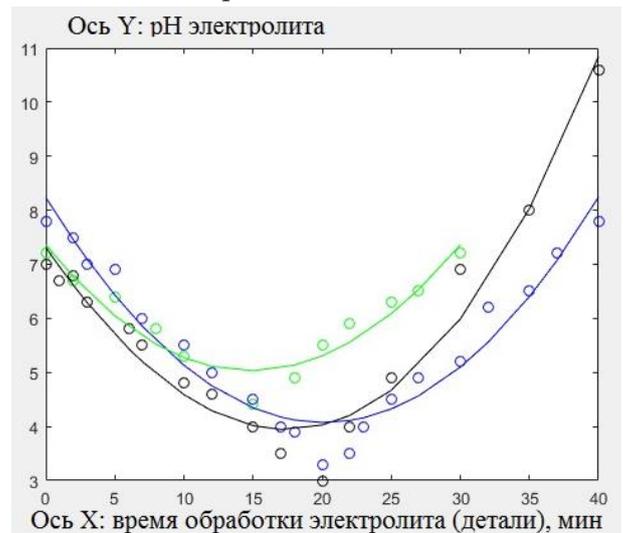


Рис. 4. Изменение кислотности электролита в непрерывном цикле

В работе *методом наименьших модулей* проведена оценка характера изменения кислотности электролита, обработанного парогазовым разрядом с жидкими электродами (жидкий катод, жидкий анод) (рис. 4). Экспериментально-статистическая модель позволит разрабатывать рекомендации по выбору оптимальных режимов получения зольей рассмотренным способом.

Литература

1. Якупов З. Я. Использование вероятностной схемы независимых испытаний в теории надёжности//Динамика неоднородных систем: Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН). Т.32(2). М.: Изд-во ЛКИ, 2008. С. 348 – 350.
2. Якупов З.Я., Галимова Р.К. Методы наименьших квадратов и наименьших модулей в научно-технических расчётах: Учебное пособие. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. 140 с.
3. Мошников В. А., Таиров Ю. М., Хамова Т. В., Шилова О. А. Под. Ред. Шиловой О. А. Золь-гель технология микро- и нанокompозитов. СПб.: Лань, 2013. 304 с.
4. Гельфман М. И., Ковалевич О. В., Юстратов В. П. Коллоидная химия. СПб.: Лань, 2017 г. 336 с.
5. Галимова Р. К. Характеристики плазменной электротермической установки с жидкими электродами (электролиты с добавлением неорганических и органических примесей)// Автореферат дисс. ... канд. техн. наук. СПб. 1997. 16 с.
6. Галимова Р. К., Якупов З. Я. Исследование технологического процесса обработки поверхностей изделий парогазовым разрядом между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами//Fundamental and applied sciences today: Proceedings of the Conference. North Charleston, 25 – 26.07.2013, Vol. 2 CreateSpace. 4900 La-Cross Road., SC, USA 29406. Moscow: spc Academic, 2013. pp. 147 – 149.
7. Галимова Р. К., Якупов З. Я., Рахимова Л. Р. Метод наименьших квадратов в технике и технологии//Fundamental science and technology – promising developments IV: Proceedings of the Conference. North Charleston, 29-30.09.2014, Vol.1. North Charleston, SC, USA: CreateSpace. Moscow: spc Academic, 2014. pp. 204-206.
8. Якупов З. Я., Галимова Р. К., Сафин А. А. Сравнительный анализ методов наименьших квадратов и модулей//Развитие науки и образование в современном мире. В 7 частях. Часть 1: Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Москва, 30 сентября 2014 г. Москва: АР – Консалт, 2014. С. 92 – 96.
9. Галимова Р.К., Зайнеев А.А. Экспериментально-статистическое моделирование технологического процесса//Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. 297 p.
10. Галимова Р.К., Юсупова А.Р. Проблема планирования в технологическом эксперименте//Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/North Charleston, 1-2.12.2015, Vol.2. North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. 297 p.
11. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами//Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1. С. 135 – 139.
12. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Уравнения эллиптического типа в моделировании технологических процессов//Теория функций, её приложения и смежные вопросы: Материалы XII международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 27.06-04.07.2015 г.). Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского/Казанское

математическое общество. Т.51. Казань: Изд-во Казан. матем. общества, изд-во Академии наук РТ, 2015. С. 144 – 146.

13. Якупов З. Я., Галимова Р. К. Основная концепция исследования групп преобразований Ляпунова//Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2017. №4. С. 171 – 176.

MSC 62H12

Estimation of the acidity of the solution in the process obtaining sols by the method of the smallest modules

A.A. Pavlova¹, Sh. Shakirov¹, R.K. Galimova¹

Kazan National Research Technical University
named after A.N. Tupolev-KAI¹

УДК 517.9

Непрерывная модель загрузки данных

Д.В. Пашуткин¹

ООО Центр разработки и исследований¹

1. Введение

Рассмотрим одну из типичных задач, встречающихся в области информационных технологий. Пусть на удаленном компьютере выполняется приложение, работающее с локальной базой данных (далее - БД). Данные в локальной БД со временем устаревают и требуют регулярного обновления, что обеспечивается сеансами загрузки актуальных значений из централизованного источника. При этом объем передаваемых данных часто является значительным.

В качестве примера здесь может выступать кассовое программное обеспечение, установленное в магазинах, офисах продаж, торговых киосках и т.п. Требование высокой скорости обслуживания и бесперебойной работы независимо от работоспособности средств коммуникации приводит к необходимости использования локальных баз данных, размещенных непосредственно в точках обслуживания. Обновление информации выполняется путем загрузки данных из внешних систем. Технологически эта задача может решаться различными способами, но главным остается вопрос: будет ли приложение справляться с существующей интенсивностью потока получаемых данных и успевать обновлять данные в своей локальной базе?

Предположим, объемы данных для обмена велики настолько, что измеряющие их дискретные величины можно считать непрерывными. Такой процесс обмена моделируется при помощи обыкновенного дифференциального уравнения. На основе построенной модели можно сделать выводы о качественном поведении системы.

2. Построение модели

Как было отмечено в введении, величины, описывающие состояние обмена данными, считаются непрерывными. Тогда задача формализуется следующим образом. Обозначим $x(t)$ - объем данных в некоторых условных единицах, подлежащих загрузке в локальную БД, а скорость поступления новых данных из внешней системы $f(t)$, где t - время, $t \geq 0$. Будем далее считать f непрерывной функцией. Так как данные поступают только извне, $f(t) \geq 0$ при всех t .

На практике типичный алгоритм работы механизма загрузки работает следующим образом. Через заданные интервалы времени $a_0 > 0$ происходит опрос наличия новых данных для загрузки. Если новые данные обнаружены, то выполняются действия по инициализации системы обновления данных. Далее все имеющиеся на этот момент времени данные для загрузки в объеме $x(t)$ записываются в локальную БД. Затем выполняются технологические операции, завершающие обмен. Суммарное время выполнения операций по инициализации и деинициализации обмена обозначим a_1 . Время записи одной единицы объема данных в локальную БД обозначим a_2 . Эта величина, как и время инициализации и деинициализации цикла обмена, зависит от текущей загруженности компьютера, получающего данные, поэтому в общем случае a_2 и a_1 являются функциями времени. Будем считать их также непрерывными. Очевидно, что $a_0, a_1, a_2 > 0$.

На загрузку данных объемом $x(t)$ будет затрачено время, равное $a_2(t)x(t) + a_1(t) + a_0$.

Тогда скорость загрузки этого блока данных равна:

$$\frac{x(t)}{a_2(t)x(t) + a_1(t) + a_0}.$$

И, с учетом потока поступающих новых данных, $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{a_2(t)x + a_1(t) + a_0} + f(t). \quad (1)$$

Неограниченный рост решения уравнения означает, что при соответствующем режиме данные не успевают загружаться. Поэтому важнейшей задачей для уравнения (1) является поиск необходимых и достаточных условий ограниченности решений.

Часто можно предположить, что процессы ежедневно (или еженедельно) протекают по схожей схеме. В этом случае естественно считать функции a_1 , a_0 и f периодическими, и тогда становится актуальной задача существования периодического решения, его устойчивости и притяжения.

В следующем разделе получено достаточное условие равномерной ограниченности решений, существования периодического решения уравнения (1) и его асимптотической устойчивости.

3. Качественный анализ решений

Контекст модели не предполагает малости $f(t)$ в уравнении (1), и решения заведомо сильно отклоняются от нуля, поэтому использование метода малых возмущений с линейным уравнением первого приближения здесь невозможно. Для исследования поведения решений воспользуемся методом, базирующимся на идеях работы [1], где в качестве уравнения первого приближения используется нелинейное уравнение.

Введем обозначения. Решения уравнения (1) с начальными данными x_0, t_0 будем обозначать $x(t : x_0, t_0)$. Банахово пространство непрерывных на промежутке $[a, b]$ функций с равномерной нормой обозначим $C([a, b])$.

Заметим, что интерес представляют только решения $x(t : t_0, x_0)$, где $x_0 \geq 0$, причем если $x_0 \geq 0$, то и $x(t : t_0, x_0) \geq 0$ при всех $t \geq t_0$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие:

$$\int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t \frac{d\tau}{a_2(\tau)\alpha + a_1(\tau) + a_0}\right) f(s)ds \leq K\alpha$$

где $K < 1$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$, $\alpha \geq \alpha_0 \geq 0$. Тогда решения уравнения (1) равномерно ограничены, т.е. для любого $C_1 > 0$ существует $C_2 > 0$ такое, что если $x_0 \leq C_1$, то $x(t : t_0, x_0) \leq C_2$ для всех $t \geq t_0 \geq 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $T > t_0 \geq 0$. Рассмотрим оператор $L : C([t_0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([t_0, T], \mathbb{R})$:

$$Lx(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{ds}{a_2(s)x(s) + a_1(s) + a_0}\right) x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t \frac{d\tau}{a_2(\tau)x(\tau) + a_1(\tau) + a_0}\right) f(s)ds$$

Оператор L отображает в себя выпуклое замкнутое ограниченное множество

$$F = \left\{ x \mid x \in C([t_0, T]), 0 \leq x(t) \leq \max\left\{\frac{x_0}{1-K}, \alpha_0\right\} \right\},$$

вполне непрерывен и, по теореме Шаудера, имеет неподвижную точку в F .

Дифференцированием проверяется, что неподвижная точка L является решением уравнения (1) с начальными данными (t_0, x_0) . В силу единственности решения задачи Коши для (1) она совпадает с $x(t : t_0, x_0)$ на промежутке $[t_0, T]$. Следовательно,

$$x(t : t_0, x_0) \leq \frac{x_0}{1-K} + \alpha_0,$$

и, в силу произвольного выбора T , эта оценка справедлива для всех $t \geq t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Пусть a_0, a_2, a_1 не зависят от t , а скорость получения данных имеет вид:

$$f(t) = \phi_0 + \phi(t),$$

где $\left| \int_0^t \phi(s) ds \right| < K_\phi < +\infty$ при всех $t \geq 0$, а $\phi_0 > 0$ - некоторая постоянная, играющая роль среднего значения. Тогда, если значение скорости записи данных выше среднего значения скорости потока поступающих данных: $1/a_2 > \phi_0$, то условия теоремы выполнены и решения уравнения (1) будут равномерно ограничены. Если же $1/a_2 < \phi_0$, то из оценки

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{a_2x + a_1 + a_0} + f(t) > \frac{-1}{a_2} + \phi_0 + \phi(t),$$

вытекает неограниченность решений. Заметим, что в обоих случаях значения параметров a_1 и a_0 не оказывают влияния на качественное поведение решений.

Предположим теперь, что функции a_2, a_1, f — периодические, с периодом ω .

Теорема 2. Пусть выполнено условие:

$$\int_{-\infty}^t \exp\left(-\int_s^t \frac{d\tau}{a_2(\tau)\alpha + a_1(\tau) + a_0}\right) f(s) ds \leq K\alpha,$$

где $K < 1$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$, $\alpha \geq \alpha_0 \geq 0$. Тогда уравнение (1) имеет ω -периодическое решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим C_ω банахово пространство непрерывных ω -периодических функций, определенных на \mathbb{R} и значениями в \mathbb{R} с равномерной нормой.

Рассмотрим оператор $L : C_\omega \rightarrow C_\omega$:

$$Lx(t) = \int_{-\infty}^t \exp\left(-\int_s^t \frac{d\tau}{a_2(\tau)x(\tau) + a_1(\tau) + a_0}\right) f(s) ds.$$

Оператор L вполне непрерывен и отображает в себя выпуклое замкнутое ограниченное множество:

$$F = \{x \mid x \in C_\omega, 0 \leq x(t) \leq \alpha_0\}.$$

По теореме Шаудера он имеет в F неподвижную точку. Дифференцированием проверяется, что она является решением уравнения (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Рассмотрим уравнение в вариациях для (1):

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{a_1(t) + a_0}{(a_2(t)x(t : t_0, x_0) + a_1(t) + a_0)^2} y.$$

Если для (1) выполнены условия теоремы 1, то в условиях теоремы 2 для α_0 существует C_2 такое, что если $x_0 \leq \alpha_0$, то $|x(t : t_0, x_0)| \leq C_2$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$. Но тогда

$$\left| \frac{\partial x(t : t_0, x_0)}{\partial x_0} \right| \leq \exp\left(\int_0^t -\frac{a_1(s) + a_0}{(a_2(s)C_2 + a_1(s) + a_0)^2} ds\right). \quad (2)$$

Так как правая часть (2) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то периодическое решение, существование которого обеспечивают условия теоремы 2, будет асимптотически устойчивым.

4. Заключение

Получены достаточные условия равномерной ограниченности решений и существования периодического решения уравнения модели. Но этим не исчерпываются задачи качественного поведения решений, имеющие прикладное значение. Например, интерес представляет исследование влияния на поведение решений на бесконечном промежутке времени малых изменений (в том или ином смысле) функций a_0 , a_1 и f .

Литература

1. Воскресенский Е. В. О периодических решениях возмущенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. 1991. № 1. С. 11-14.

MSC 34C60

Continuos model of data loading

D.V. Pashutkin ¹

Development and research centre Ltd.¹

УДК 531.36

О стабилизации положения управляемых механических систем дискретными регуляторами *

О.А. Перегудова ¹

Ульяновский государственный университет¹

В докладе рассматривается голономная механическая система с n обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_n , описываемая уравнениями Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_1(\dot{q}) + Q_2(q) + U \quad (1)$$

где $T = (1/2)\dot{q}'A(q)\dot{q}$ – кинетическая энергия, $Q = Q_1 + Q_2$ – действующая обобщенная сила, $Q_1(0) = 0$, U – управление.

Исследуется задача о стабилизации программного положения системы, за которое, без ограничения общности, можно принять положение $q = \dot{q} = 0$, при дискретном измерении обобщенных скоростей и координат.

Показано, что при общих предположениях относительно неуправляемых сил задача решается ступенчатым импульсным управлением вида

$$U = -Q(q(0)) - K_1(n\Delta t)\dot{q}(n\Delta t) - K_2(n\Delta t)q(n\Delta t) - \sum_{l=0}^{n-1} K_3((n-l)\Delta t)\dot{q}(l\Delta t) - \sum_{l=0}^{n-1} K_4((n-l)\Delta t)q(l\Delta t), \quad \sum_{l=0}^{\infty} K_3((n-l)\Delta t) < +\infty \quad (2)$$

где Δt – шаг дискретизации, матрицы управления $K_s \in R^{n \times n}$, $s = 3, 4$ удовлетворяют ограничению

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|K_s((n-l)\Delta t)\| < +\infty, \quad s = 3, 4$$

Форма управления (2) включает в себя различные типы дискретных регуляторов. Дискретный ПИ-регулятор ($K_1 = K_3 = 0$) также возможен, но в предположении действия линейных диссипативных сил, т.е.

$$\dot{q}'Q(\dot{q}) \leq -\mu_0\|\dot{q}\|^2, \quad \mu_0 = const > 0$$

Условия применимости регуляторов (2) находятся на основе двух различных подходов:

- дискретизация уравнений движения управляемой системы и применение результатов работы [1];

- приведение к интегро-дифференциальным уравнениям типа Вольтерра и применение результатов работ [2] – [5].

Условия применимости представляют собой методику подбора матриц Q_s , $s = 1, 2$ в зависимости: от массо-инерционных параметров, от структуры действующих сил.

Литература

1. Кудашова Е. А., Перегудова О. А. Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем. Научно-технический вестник Поволжья. № 1. 2015. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2015. С. 118-121.

*Работа выполнена в рамках государственного задания по НИР № 9.5994.2017/БЧ Минобрнауки России.

2. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // *Systems Science and Control Engineering*. 2018. Vol. 6. No 1. pp. 12-19.
3. Андреев А.С., Перегудова О.А., Раков С.Ю. Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2016. Т. 18, № 3. С. 8–18.
4. Макаров Д.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных позиций голономной механической системы без измерения скоростей // *Ученые записки Ульяновского государственного университета. Серия Математика и информационные технологии*. 2016. Вып. 1(8). С. 64–71.
5. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 137–153.

MSC 93C57

On the position stabilization of the controlled mechanical systems by sampled-data regulators

O.A. Peregudova ¹
Ulyanovsk state university ¹

УДК 517.9

Сценарий пересоединения в короне солнца с простой дискретизацией

О.В. Починка¹

Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики¹

В серии относительно недавних работ специалистов в области магнитной гидродинамики (МГД) (см, например, [1], [2] и др.) было показано, что такие явления, как вспышки на Солнце и других звёздах, суббури в магнитосферах планет, различные эффекты в лабораторной плазме в качестве физической основы имеют пересоединение магнитных силовых линий. Наиболее яркие свидетельства магнитного пересоединения были обнаружены в короне Солнца.

Магнитное пересоединение в трёхмерном случае можно описать как изменение состояния плазмы, при котором два элемента плазмы, вначале связанные силовой линией, после перестают быть ею связанной. Точки, в которых магнитное поле равно нулю, называются нейтральными, или нулевыми точками. Из результатов МГД следует, что с точки зрения теории динамических систем в типичном случае нулевые точки суть трёхмерные структурно устойчивые седла, такие, что сумма характеристических чисел данного седла равна нулю. Нулевая точка называется положительной, если среди собственных чисел соответствующего седла одно положительное и два. Нулевая точка называется отрицательной, если среди собственных чисел одно отрицательное и два положительных. Одномерную сепаратрису седла в МГД называют шипом, а двумерную сепаратрису веерной поверхностью.

В ряде случаев процессы пересоединения связаны с появлением и исчезновением так называемых гетероклинических сепараторов – магнитных линий, соединяющих нулевые точки векторного поля, одновременно являющихся пересечением веерных поверхностей. В теории динамических систем такие объекты называют гетероклиническими кривыми. Подробное физическое и математическое описание процессов пересоединения можно посмотреть в книге [2], с. 233-240. Более подробно о моделировании явлений в плазме методами теории динамических систем можно прочитать, например, в работах [3] и [4].

Модель, рассматриваемая в данной статье, имеет следующую структуру. Трёхмерную замкнутую ограниченную область магнитного поля, из которой все линии магнитного поля выходят, считают источниковой областью и условно рассматривают как источник. Трёхмерную замкнутую ограниченную область магнитного поля, в которую все линии магнитного поля входят, считают стоковой областью и условно рассматривают как сток. Мы будем рассматривать магнитное поле с двумя источниковыми, двумя стоковыми областями и двумя нулевыми точками – положительной и отрицательной, веерные поверхности которых пересекаются не менее, чем по одному гетероклиническому сепаратору. Рассмотренная модель с точки зрения теории

динамических систем представляет собой поток на сфере S^3 , неблуждающее множество которого состоит в точности из двух источников, двух стоков и двух седел разного топологического индекса.

В настоящей работе описан один из возможных сценариев рождения гетероклинических сепараторов в солнечной короне (см. [5], [6]). Именно, в пространстве потоков, обладающих описанными выше свойствами, мы строим простой путь с двумя седло-узловыми бифуркационными точками, соединяющий систему без гетероклинических кривых с системой с двумя гетероклиническими кривыми. Или, в терминологии МГД, нами построен путь, связывающий магнитное поле с двумя нулевыми точками разного знака, веерные поверхности которых не пересекаются, с магнитным полем с двумя нулевыми точками и двумя гетероклиническими сепараторами, их соединяющими. Отметим, что дискретизация такого пути также является простым путём в пространстве соответствующих диффеоморфизмов.

Благодарности: Работа выполнена в рамках проекта РНФ 17-11-01041.

Литература

1. Сыроватский С.И. Магнитная гидродинамика // Успехи физических наук, 1957, Т. LXII, № 7, С. 247-302.
2. Priest E.R., Forbes T.G. Magnetic reconnection: MHD theory and applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 616 pp. спектральных характеристик фредгольмова оператора // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15. № 3. С. 100-107.
3. Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E. On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids // Phisica D: Nonlinear Phenomena. 2015. Vol. 294. pp. 1-5.
4. Жужома Е. В., Медведев В. С. Рождение сепараторов в магнитных полях // Динамические системы. 2016. Т. 6(34). № 1. С. 35-45.
5. Browns D. S., Priest E. R. The topological behaviour of stable magnetic separators // Solar Physics. 1999. Vol. 190. pp. 25-33.
6. Haynes A. L., Parnell C. E., Galsgaard K., Priest E. R. Magnetohydrodynamic evolution of magnetic skeletons // Proceeding of the Royal Society A. 2007. Vol. 463. pp. 1097-1115.

MSC 37D15

Scenario of reconnection in the solar corona with a simple discretization

O. V. Pochinka¹

National Research University Higher School of Economics¹

УДК 519.624

О непрерывном регуляризованном методе третьего порядка

И. П. Рязанцева¹

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева¹

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H , $A : H \rightarrow H$ – нелинейный монотонный оператор с $D(A) = H$.

Рассмотрим в H уравнение

$$Ax = f, \quad (1)$$

где f – фиксированный элемент из H . Пусть это уравнение имеет непустое множество решений N . Известно, что N является выпуклым и замкнутым в H множеством (см., например, [1, с.31]). Обозначим через x^* нормальное решение (1). Задача нахождения элемента x^* относится к классу некорректных задач. В данной заметке для решения (1) строится непрерывный регуляризованный метод третьего порядка. Метод третьего порядка для уравнения (1) с сильно монотонным оператором A построен в [2]. При решении некорректной задачи важно получить приближения к решению (1), обладающие свойствами искомого решения, которые считаются известными. По этой причине необходимо иметь разнообразные методы решения некорректных задач, и поэтому предлагаемый в данной заметке метод представляет интерес для исследователей, занимающихся решением некорректных задач.

Предположим, что оператор A и элемент f в (1) известны приближенно, т.е.

а) вместо элемента f имеем его приближения $f(t) \in H$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$, причём $\|f - f(t)\| \leq \delta(t)$,

б) при каждом $t \geq t_0 \geq 0$ известно монотонное приближение $A(t) : H \rightarrow H$ оператора A такое, что $\|A(t)v - Av\| \leq h(t)g(\|v\|)$, $\forall v \in H$, здесь $\delta(t)$ и $h(t)$ – неотрицательные бесконечно малые при $t \rightarrow +\infty$, $g(s)$ ($s \geq 0$) – неотрицательная функция, переводящая ограниченное множество в ограниченное.

Непрерывный регуляризованный метод третьего порядка для уравнения (1) построим в форме следующей задачи Коши

$$y'''(t) + \varphi_1(t)y''(t) + \varphi_2(t)y'(t) + \varphi_3(t)[A(t)y(t) + \alpha(t)y(t) - f(t)] = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad y''(t_0) = y''_0,$$

где y_0, y'_0, y''_0 – некоторые произвольные фиксированные элементы из H , $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ – положительные непрерывные ограниченные функции при $t \geq t_0 \geq 0$.

Установлены условия, при которых $\|y(t) - x^*\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Литература

1. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
2. Рязанцева И.П. О непрерывном методе третьего порядка для решения операторных уравнений с монотонными операторами в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 267.

MSC 65J15

On a continuous regularized third-order method

I.P. Ryazantseva¹

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev ¹

УДК 517.9

Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами

А.Н. Тында¹, Д.Н. Сидоров², И.Р. Муфтахов³

Пензенский государственный университет¹, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН², Главный вычислительный центр ОАО «РЖД»³

1. Введение

Функциональные уравнения (дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения) с различного рода отклоняющимися аргументами (задержками) являются универсальным средством моделирования динамических систем в ряде областей физики, техники, медицины, экономики и в других областях, см., например, [1], [2]. При этом основанные на них модели обеспечивают наиболее реалистичное отражение свойств наблюдаемых процессов, являясь зачастую единственным математическим аппаратом для их описания. Интегральными динамическими моделями с запаздываниями можно описывать большое многообразие процессов. Такие модели учитывают эффект памяти динамических систем, когда прошлые состояния системы воздействуют на развитие в будущем. Интегральные уравнения с отклоняющимися аргументами (задержками) являются удобным аппаратом моделирования динамических систем в ряде областей физики, техники, экономики и т.д.. Точные решения таких уравнений в большинстве нетривиальных случаев не могут быть найдены аналитически, поэтому актуальной является разработка эффективных численных методов их решения.

Одним из классов функциональных уравнений с задержками являются интегральные уравнения Вольтерра и их системы, ядра которых терпят конечные разрывы вдоль семейства гладких кривых. В цикле работ авторов [2] - [5] предлагается ряд численных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с переменными в пределах интегрирования, играющими роль временных задержек. В данной работе итерационный численный метод обобщается и распространяется на системы уравнений такого типа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему нелинейных уравнений Вольтерра I рода [2], [4]

$$\begin{cases} \int_0^t h_1(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds - f_1(t) = 0, \\ \int_0^t h_2(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds - f_2(t) = 0, \\ \vdots \\ \int_0^t h_n(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds - f_n(t) = 0. \end{cases}, \quad (1)$$

где $t \in [0, T]$, а ядра $h_i(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))$, терпящие конечные разрывы на линиях $\alpha_j(t)$, $j = \overline{1, n-1}$, имеют вид

$$h_i(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) = \begin{cases} K_{i1}(t, s)G_{i1}(s, x_1(s)), & (t, s) \in m_1, \\ K_{i2}(t, s)G_{i2}(s, x_2(s)), & (t, s) \in m_2, \\ \vdots \\ K_{in}(t, s)G_{in}(s, x_n(s)), & (t, s) \in m_n. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $m_j = \{(t, s) \mid \alpha_{j-1}(t) < s \leq \alpha_j(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$. Функции $K_{ij}(t, s)$, $f_i(t)$ и $\alpha_j(t)$ имеют непрерывные производные относительно t при $(t, s) \in \overline{m_j}$, $K_{in}(t, t) \neq 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$. Функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ являются неубывающими при $t \in [0, T]$. Вопрос существования и единственности решения такого класса нелинейных систем изучался в работе [4].

В данной работе предлагается итерационный метод решения такого рода систем, основанный на линеаризации интегрального вектор-оператора. Для решения возникающих в итерационном процессе систем линейных уравнений с разрывными ядрами используется обобщение алгоритма прямой дискретизации, предложенного в работах [3], [5]. Метод основан на кусочно-постоянной аппроксимации точных решений и имеет первый порядок точности.

Литература

1. Hritonenko N., Yatsenko Yu. *Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1999.
2. Sidorov D. *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control*. In: L.O. Chua, ed. "World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A". Singapore: World Scientific Press. 300 p.
3. Сидоров Д.Н., Тында А.Н., Муфтахов И.Р. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами // Вестник Южноуральского Государственного Университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2014. Т. 7, № 3. С. 107-115.
4. Muftahov I., Sidorov D. Solvability and numerical solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2016. Vol. 9, 1. pp. 130-136.
5. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 313, No. 15. pp. 119-128.
6. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis*. 2nd edition. Oxford : Pergamon Press. 1982. 604 p.

MSC 65R20

Numerical method for systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels

A.N. Tynda¹, D.N. Sidorov², I.R. Muftahov³

Penza State University¹, Energy Systems Institute Russian Academy of Sciences², Main
Computing Center of Joint Stock Company «Russian Railways»³

УДК 544.431

Программная реализация алгоритма выписывания базиса НПФ из графа Вольперта *

З.А. Хамидуллина¹, А.С. Исмагилова¹, С.И. Спивак¹

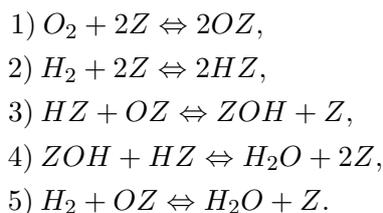
Башкирский государственный университет¹

В работах [1, 2] создана общая теория анализа информативности кинетических параметров при решении обратных задач, позволяющая определить число и вид нелинейных параметрических функций (НПФ) кинетических констант, допускающих однозначную оценку по эксперименту. Основная задача анализа информативности состоит в выделении "внутренних параллелизмов". В работе [3] предложен теоретико-графовый метод анализа механизма сложной каталитической реакции. Алгоритм определения базиса НПФ основан на методологии исследования систем дифференциальных уравнений химической кинетики на графах, предложенных А. И. Вольпертом [4].

Результатом данной работы является программная реализация алгоритма определения базиса НПФ для механизмов сложных химических реакций.

Программное обеспечение разработано в среде Microsoft Visual C++ 2012. Интерфейс программы представляет собой окно с полями и таблицами для ввода входных данных, с вкладками и с кнопками для выполнения расчетов и получения результатов. Входными данными программы, вводимыми пользователем, являются количество стадий в механизме, общее количество участников, количество промежуточных веществ, обозначения участников реакции и механизм химической реакции. На основе анализа входных данных программное обеспечение формирует стехиометрическую матрицу и вектор-столбец кинетических констант.

Рассмотрим механизм реакции окисления водорода на платиновом катализаторе [5]:



Введем обозначения: $\{X_1, X_2, X_3\} = \{O_2, H_2, H_2O\}$ - исходные вещества и продукты реакции, $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\} = \{Z, OZ, HZ, ZOH\}$ - промежуточные вещества, $\{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_{10}, W_{20}, W_{30}, W_{40}, W_{50}\}$ - элементарные стадии.

В программе реализована теоретико-графовая интерпретация механизмов химических реакций в виде графа Вольперта. Для построения графа проводится анализ матрицы стехиометрических коэффициентов и вектор-столбца кинетических констант (Рис. 1).

Алгоритм определения базиса НПФ кинетических параметров включает в себя следующие шаги:

1. Исключаются из графа все Y-вершины (промежуточные вещества), X-вершины, имеющие только входящие ребра (вещества, которые являются продуктами в элементарных стадиях, и не являются исходными веществами ни в какой другой элементарной стадии) и W-вершины, для которых нет предшествующих X-вершин; и инцидентные, удаляемым

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ и Правительства Республики Башкортостан (проект 17-47-020068).

вершинам, ребра. В результате получим несвязный граф (на рисунке выделен жирными линиями).

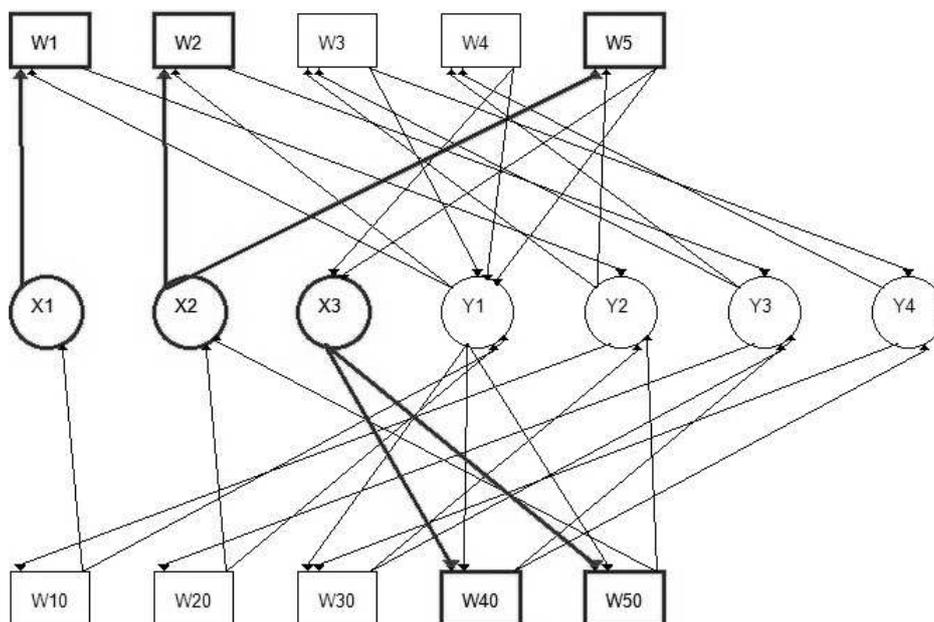


Рис. 1. Граф Вольперта реакции окисления водорода на платиновом катализаторе.

2. Из преобразованного графа выписывается матрица связей A следующим образом. Строкам матрицы соответствуют кинетические параметры $(k_1, k_2, k_5, k_{40}, k_{50}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Количество столбцов матрицы равно количеству X-вершин. Расположение ненулевых элементов в матрице связей определяют вершины-реакции и вершины-вещества, смежные в преобразованном графе. Значение элемента определяется ребром, соединяющим вершину-вещество с вершиной-реакцией (кинетическая константа).

3. Система независимых НПФ определяется как базис частных решений системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (Рис. 2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial k^i} \cdot A = 0.$$

где $k^i = k^i(k, \xi)$ – вектор кинетических параметров, $\rho_i(k, \xi)$ – базис НПФ, $1 \leq i \leq m$, m – число столбцов матрицы связей A .

Для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка применен метод характеристик.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= k_1^*(1+\varepsilon_1) \\ \rho_2 &= (k_2/k_5) + k_5^*(1+\varepsilon_2) \\ \rho_3 &= (k_{40}/k_{50}) + k_{50}^*(1+\varepsilon_3) \end{aligned}$$

Рис. 2. Базис НПФ реакции окисления водорода на платиновом катализаторе.

Программой предусмотрена возможность сохранения данных механизма, открытия ранее исследованных механизмов, а также сохранения результатов в отчет формата MSWord.

Теоретически программа способна корректно работать с массивами, состоящими из нескольких десятков кинетических параметров.

Литература

1. Спивак С. И., Горский В. Г. Неединственность решения задачи восстановления кинетических констант // Доклады Академии наук. 1981. Т. 257. № 2. С. 412-415.
2. Кудашев В. Р., Спивак С. И. Информативность кинетических измерений при определении параметров математических моделей нестационарной химической кинетики // Теоретические основы химической технологии. 1992. Т. 26. №6. С. 872-879.
3. Исмагилова А. С., Хамидуллина З. А., Спивак С. И. Теоретико-графовый метод нахождения базиса нелинейных параметрических функций // Математическое моделирование процессов и систем: материалы VII Международной научно-практической конференции. Стерлитамак, 2017. С. 365-369.
4. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. – М: Наука, 1975. 394 с.
5. Крылов О. В. Гетерогенный катализ. М.: Академкнига, 2004. 679 с.

MSC 68R10

Software of algorithm for writing out nonlinear parametric function basis from Volpter's graph*

Z.A. Khamidullina¹, A.S. Ismagilova¹, S.I. Spivak¹
Bashkir State University¹

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 17-47-020068).

УДК 532.685

Влияние поступательно-колебательного движения плоского слоя на течение жидкости

Н. А. Храмова¹

Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева¹

Теория движения жидкостей через пористые среды интенсивно развивается в последнее время в связи с разнообразными приложениями в технологических процессах, а также при изучении природных явлений.

Задачи о течении жидкости в пористой среде вокруг сплошного цилиндра и сферы решены в [2]. Движение жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением пористого шара вокруг стационарной оси вращения, проходящей через центр шара, исследовано в [3].

Движение жидкости в объеме определяется условиями на ограничивающих ее поверхностях и называемых граничными условиями. Классическое граничное условие к уравнениям движения жидкости, контактирующей с твердой поверхностью, состоит в равенстве скоростей жидкости и твердой поверхности (условие прилипания).

Однако, как показали многочисленные эксперименты и теоретические исследования последнего времени, классическое граничное условие для скорости жидкости в некоторых случаях нуждается в определенных усложнениях. Например, на так называемых супергидрофобных поверхностях, как существующих в природных условиях, так и созданных искусственно, жидкость проскальзывает, не прилипая к твердой поверхности.

Вывод уравнений движения вязкой жидкости через пористую среду методом локального объемного усреднения приведен, например, в [4].

Рассматривается колебательное движение вязкой жидкости, контактирующей с плоским слоем пористой среды. Пористый слой совершает поступательно-колебательное движение по гармоническому закону с частотой ω в направлении, параллельном непроницаемой плоскости, ограничивающей этот слой снизу и движущейся со скоростью слоя.

Пористая среда далее предполагается недеформируемой, однородной и изотропной. Предполагается также, что пористая среда имеет достаточно большую пористость и высокую проницаемость. При таких свойствах пористой среды в ней могут возникать колебательные движения жидкости, в которых скорость жидкости будет заметно отличаться от скорости пористой среды.

Система координат выбрана так, что поверхность раздела пористой среды и жидкости совпадает с плоскостью y^*, z^* ; пористая среда занимает область: $-H_1 < x^* < 0$, а области жидкости соответствует $0 < x^* < H_2$. Плоскость $x^* = H_2$ совпадает со свободной поверхностью жидкости. Непроницаемая плоская поверхность $x^* = -H_1$ ограничивает снизу слой пористой среды и движется вместе с ней. Ось y^* выбирается параллельно направлению колебаний пористого слоя и плоскости $x^* = -H_1$. Знаком «*» здесь и далее обозначаются размерные переменные (но не размерные параметры), чтобы отличать их от соответствующих безразмерных, обозначаемых теми же буквами. Величины, относящиеся к пористой среде и свободной жидкости, обозначаются в необходимых случаях индексами 1 и 2 соответственно.

Скорость поступательно-колебательного движения пористого слоя и ограничивающей его плоскости вдоль оси y^* запишем в виде функции от времени t^*

$$u^* = U_0 \exp(-i\omega t^*),$$

где U_0 — действительная постоянная.

В окончательных результатах вычислений везде подразумеваются действительные части соответствующих комплексных выражений.

Систему уравнений нестационарного движения жидкости в пористой среде (модель Бринкмана) запишем в виде [5].

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\Gamma^2} (\mathbf{u}_1^* \cdot \nabla) \mathbf{u}_1^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p_1^* + \nu' \nabla^{*2} \mathbf{u}_1^* + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1^* = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность жидкости, Γ — пористость ($\Gamma = \text{const}$), \mathbf{u}_1^* — макроскопическая скорость фильтрации ($\mathbf{u}_1^* = \Gamma \mathbf{v}_1^*$, \mathbf{v}_1^* — средняя по объему пор скорость жидкости), p_1^* — среднее по объему пор давление, $\nu' = \eta'/\rho$, η' — эффективная вязкость жидкости в порах, $\nu = \eta/\rho$, η — вязкость свободной жидкости вне пористой среды, K — коэффициент проницаемости пористой среды, $\mathbf{F}^* = -(\eta/K)(\mathbf{u}_1^* - \Gamma \mathbf{u}^*)$ — плотность силы сопротивления пористой среды. При $K \rightarrow 0$ (непроницаемая для жидкости среда) из (1) следует $\mathbf{u}_1^* = \Gamma \mathbf{u}^*$, т. е. жидкость будет двигаться как целое вместе с пористой средой. Если $\mathbf{u}^* = 0$, то \mathbf{F}^* принимает известный вид силы Дарси.

Уравнения движения свободной жидкости имеют обычный вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}_2^* \cdot \nabla) \mathbf{u}_2^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p_2^* + \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}_2^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_2^* = 0. \quad (2)$$

Из соображений симметрии следует, что все переменные величины будут функциями только от вертикальной координаты x^* и времени t^* . А согласно уравнениям непрерывности (1), (2) будет $u_{1x}^* = \text{const}$, $u_{2x}^* = \text{const}$, где обе эти постоянные следует принять равными нулю, поскольку $u_{1x}^* = 0$ и $u_{2x}^* = 0$ на поверхностях $x^* = -H_1$ и $x^* = H_2$. Поэтому $u_{1x}^* \equiv 0$, $u_{2x}^* \equiv 0$ всюду. Кроме того, $(\mathbf{u}_j^* \cdot \nabla) \mathbf{u}_j^* \equiv 0$ ($j = 1, 2$). Таким образом, вследствие симметрии нелинейные слагаемые выпадают из уравнений движения (1), (2). Из соображений симметрии следует также, что скорости \mathbf{u}_1^* , \mathbf{u}_2^* направлены всюду параллельно оси y^* .

Из x^* - компонент уравнений движения (1), (2) следует, что в случае горизонтального расположения пористого слоя, давления p_1^* и p_2^* будут функциями только от координаты x^* и времени t^* . Вид этих функций, очевидно, не влияет на характер движения жидкости в горизонтальном направлении. Поэтому без потери общности можно не рассматривать влияние силы тяжести на течение жидкости и принять $p_1^* = \text{const}$, $p_2^* = \text{const}$.

Вводя обозначения $u_{1y}^* \equiv u_1^*$, $u_{2y}^* \equiv u_2^*$, получим из (1) и (2)

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} = \nu' \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\nu}{K} (u_1^* - \Gamma u^*), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} = \nu \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x^{*2}}.$$

Граничные условия к этим двух уравнениям [2], [3]

$$x^* = -H_1 : \quad u_1^* - \Gamma U_0 e^{-i\omega t^*} = B \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*}, \quad (4)$$

$$x^* = 0 : \quad u_1^* = u_2^*,$$

$$x^* = 0 : \quad \Lambda \left(\eta' \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} - \eta \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} \right) = \eta (u_1^* - \Gamma u^*),$$

$$x^* = H_2 : \quad \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} = 0.$$

Здесь B и Λ — постоянные с размерностью длины, зависящие от свойств пористой среды и жидкости. В первом условии (4) учитывается возможное скольжение жидкости относительно непроницаемой поверхности, контактирующей с пористой средой. При $B = 0$

получается обычное условие прилипания $u_1^* = \Gamma U_0 \exp(-i\omega t^*)$. В более простой модели фильтрации Дарси возможное наличие скольжения неявно учитывается тем, что на скорость жидкости накладывается только условие непротекания в нормальном к твердой поверхности направлении, а скорость скольжения жидкости вдоль этой поверхности остается неопределенной. Второе условие (4) выражает непрерывность скорости на поверхности раздела пористой среды и жидкости ($x^* = 0$). Третье условие (4) связывает скачок касательных напряжений на поверхности $x^* = 0$ с касательной скоростью жидкости; при $\Lambda \rightarrow \infty$ оно переходит в условие непрерывности касательных напряжений, а при $\Lambda = 0$ — в условие прилипания на поверхности пористой среды. Четвертое — это условие отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности жидкости.

Введем безразмерные переменные

$$x = x^*/H \quad (H = H_1 + H_2), \quad t = \omega t^*, \quad u_1 = u_1^*/U_0, \quad u_2 = u_2^*/U_0, \quad u = u^*/U_0 = \exp(-it^*).$$

Уравнения (3) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\omega H^2}{\nu \Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\nu'}{\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{H^2}{K} (u_1 - \Gamma u), \\ \frac{\omega H^2}{\nu} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия (4) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} x = -h_1: \quad u_1 - \Gamma u &= \beta \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ x = 0: \quad u_1 &= u_2, \\ x = 0: \quad \lambda \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) &= u_1 - \Gamma u, \\ x = h_2: \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $h_1 = H_1/H$, $h_2 = H_2/H$, $\beta = B/H$, $\lambda = \Lambda/H$, $\alpha^2 = \eta/\eta'$.

Безразмерные скорости u_1, u_2 будем искать в виде

$$u_1(x, t) = F_1(x) \exp(-it), \quad u_2 = F_2(x) \exp(-it). \quad (7)$$

Из уравнений (5) следует

$$\frac{d^2 F_1}{dx^2} - \xi_1^2 F_1 = -2\alpha^2 \left(\frac{H}{\delta_1} \right)^2, \quad \frac{d^2 F_2}{dx^2} - \xi_2^2 F_2 = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \frac{2\alpha^2}{\Gamma} \left[\left(\frac{H}{\delta_1} \right)^2 - i \left(\frac{H}{\delta_2} \right)^2 \right], \quad \xi_2^2 = -2i \left(\frac{H}{\delta_2} \right)^2, \\ \delta_1 &= \sqrt{\frac{2K}{\Gamma}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \end{aligned}$$

Общие решения уравнений (8):

$$F_1(x) = A_1 \exp \xi_1 x + B_1 \exp(-\xi_1 x) + C, \quad (9)$$

$$F_2(x) = A_2 \exp \xi_2 x + B_2 \exp(-\xi_2 x),$$

$$\xi_1 = \frac{\alpha H}{\sqrt{\Gamma}} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{i\delta}{\delta_2^2} \right), \quad \xi_2 = (1 - i) \frac{H}{\delta_2},$$

$$C = \frac{\Gamma}{1 - i(\delta_1/\delta_2)^2}, \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\delta_1^2} + \sqrt{\frac{1}{\delta_1^4} + \frac{1}{\delta_2^4}}.$$

Коэффициенты A_j, B_j ($j = 1, 2$) в (9), определяемые с помощью граничных условий (6), имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{D_1}{D_2}, \\ B_1 &= \frac{\Gamma - C}{(1 + \beta \xi_1) \exp \xi_1 h_1} - \frac{D_1(1 - \beta \xi_1)}{D_2(1 + \beta \xi_1) \exp 2\xi_1 h_1}, \\ A_2 &= \frac{D_1 D_5 + D_2 D_4}{D_2(1 + \beta \xi_1)(1 + \exp 2\xi_2 h_2) \exp \xi_1 h_1}, \\ B_2 &= \frac{D_1 D_5 + D_2 D_4}{D_2(1 + \beta \xi_1)[1 + \exp(-2\xi_2 h_2)] \exp \xi_1 h_1}, \\ D_1 &= \lambda \xi_1 (\Gamma - C) + \alpha^2 D_3 D_4 - \alpha^2 \Gamma (1 + \beta \xi_1) \exp \xi_1 h_1, \\ D_2 &= \lambda \xi_1 D_6 - \alpha^2 D_3 D_5, \\ D_3 &= 1 - \lambda \xi_2 \operatorname{th} \xi_2 h_2, \\ D_4 &= \Gamma - C + C(1 + \beta \xi_1) \exp \xi_1 h_1, \\ D_5 &= 2 \operatorname{sh} \xi_1 h_1 + 2\beta \xi_1 \operatorname{ch} \xi_1 h_1, \\ D_6 &= 2 \operatorname{ch} \xi_1 h_1 + 2\beta \xi_1 \operatorname{sh} \xi_1 h_1. \end{aligned}$$

Решения вида (7), (9) описывают поперечные стоячие волны, в которых скорости $u_1(x, t), u_2(x, t)$, направленные параллельно оси y , перпендикулярны направлению распространения волны вдоль оси x .

Решена задача о движении вязкой жидкости, вызванном колебательно-поступательным движением плоского слоя пористой среды, контактирующего с вязкой жидкостью. Движение жидкости в пористой среде описывается нестационарным движением Бринкмана, а свободной жидкости вне пористой среды — уравнением Навье — Стокса. Найдены нестационарные поля скоростей жидкости в пористом слое и слое вне пористой среды.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.
2. Леонтьев Н.Е. Течения в пористой среде вокруг цилиндра и сферы в рамках уравнения Бринкмана с граничным условием Навье // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 2. С. 107–112.
3. Тактаров Н.Г. Движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением пористого шара // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 133–138.
4. Тактаров Н.Г. Конвекция намагничивающихся жидкостей в пористых средах // Магнитная гидродинамика. 1981. № 4. С. 33–35.
5. Brinkman H.C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res., 1947. Vol. 1. pp. 27–34.

MSC 76N20

The effect of the translational-oscillatory motion of a plane layer on the fluid flow

N.A. Khramova ¹

Mordovian State Pedagogical Institute named after Evseyev ¹

УДК 517.9

ОПТИМИЗАЦИЯ ДОХОДОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

В.В. Чебоксаров¹, Т.Ф. Мамедова¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Необходимо исследовать зависимость роста доходов экономических агентов с учетом их теневой деятельности, выраженной в сокрытие части доходов от налогообложения.

Для этого рассмотрим замкнутую экономическую систему, состоящую из производственного сектора(фирм), домохозяйств и государства.

Сделаем следующие предположения[1,4,5]:

1. Будем считать, что выручка, полученная фирмами от объёма реализованной продукции, определяется функцией потребления $C(w_2)$.
2. Домохозяйства формируют свой бюджет, как за счёт официальных доходов, которые облагаются налогом, так и за счёт теневых доходов, налогом не облагаемых.
3. Государство формирует свой бюджет из налогов с официальных доходов фирм и домохозяйств, а также за счёт изъятия обнаруженной части сокрытой в тени выручки.
4. Фирмы выбирают, какую часть выручки с производимого продукта оставить в официальной экономике, где она облагается налогом, а какую часть скрыть в тени, где налогов нет, но где часть её может быть обнаружена и изъята государством. Эта величина определяется функцией от размеров теневой деятельности γ^α , $\alpha \in [0, 1]$ [2].
5. Доход фирм складывается из официальной и теневой прибыли. Легальная прибыль формируется из легальной части выручки за вычетом налога, институциональных издержек и оплаты официального труда домохозяйствам. Теневая прибыль формируется из теневой части выручки за вычетом обнаруженной и изъятой государством части и оплаты теневого труда домохозяйствам.

Математическая модель задачи, учитывая все вышеуказанные условия и предположения, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = (1 - \tau_1)(1 - sL)(1 - r)(1 - \gamma)C(w_2) + (1 - \gamma^\alpha)(1 - \beta L)\gamma C(w_2), \\ \frac{dw_2}{dt} = (1 - \tau_2)sL(1 - r)(1 - \gamma)C(w_2) + \beta L\gamma C(w_2), \\ \frac{dw_3}{dt} = \tau_1(1 - sL)(1 - r)(1 - \gamma)C(w_2) + \gamma^\alpha\gamma C(w_2) + \tau_2sL(1 - r)(1 - \gamma)C(w_2). \end{cases} \quad (1)$$

Положим, что функция потребления имеет вид простейшей кейнсианской линейной функции потребления [3] $C(w_2) = a + b * w_2$, где $\beta \in [0, 1]$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = (1 - \tau_1)(1 - sL)(1 - r)(1 - \gamma)C(a + bw_2) + (1 - \gamma^\alpha)(1 - \beta L)\gamma(a + bw_2), \\ \frac{dw_2}{dt} = (1 - \tau_2)sL(1 - r)(1 - \gamma)(a + bw_2) + \beta L\gamma(a + bw_2), \\ \frac{dw_3}{dt} = \tau_1(1 - sL)(1 - r)(1 - \gamma)(a + bw_2) + \gamma^\alpha\gamma(a + bw_2) + \tau_2sL(1 - r)(1 - \gamma)(a + bw_2). \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы (2), с начальными условиями: $w_1(0) = C_1, w_2(0) = C_2, w_3(0) = C_3$ было

получено в пакете Wolfram Mathematica 9.0 и имеет следующий вид (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(t) = \frac{1}{bL((-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)-\beta\gamma)} (-a(-1+e^{bLt(-(-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)+\beta\gamma)}) \\ (1-t_1+r(-1+Ls)(-1+\tau_1)(-1+\gamma)+t_1\gamma-\gamma^{1+\alpha}+L(s(-1+\tau_1+\gamma-t_1\gamma)+\beta\gamma \\ (-1+\gamma^\alpha))) + b(C_1L((-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)-\beta\gamma) - C_2(-1+e^{bLt(-(-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\tau_2) \\ e^{(-1+\gamma)+\beta\gamma)})(1-\tau_1+r(-1+Ls)(-1+\tau_1)(-1+\gamma)+\tau_1\gamma-\gamma^{1+\alpha}+L(s(-1+\tau_1+\gamma- \\ \tau_1\gamma)+\beta\gamma(-1+\gamma^\alpha))))), \\ w_2(t) = \frac{bC_2e^{bLt(-(-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)+\beta\gamma)} + a(-1+e^{bLt(-(-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)+\beta\gamma)})}{b}, \\ w_3(t) = \frac{1}{bL((-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)-\beta\gamma)} (-a(-1+e^{bLt(-(-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)+\beta\gamma)}) \\ (-(-1+r)(-1+Ls)\tau_1(-1+\gamma)+\gamma^{1+\alpha}+L((-1+r)s\tau_2(-1+\gamma)-\beta\gamma^{1+\alpha})) + b(C_3L \\ ((-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)-\beta\gamma) - C_2(-1+e^{bLt(-(-1+r)s(-1+\tau_2)(-1+\gamma)+\beta\gamma)})(-(-1+ \\ +r)(-1+Ls)\tau_1(-1+\gamma)+\gamma^{1+\alpha}+L((-1+r)s\tau_2(-1+\gamma)-\beta\gamma^{1+\alpha}))). \end{array} \right. \quad (3)$$

Т. о. получена зависимость изменения доходов фирм, домохозяйств и государств от налоговых ставок, качества работы контрольно-надзорной системы и институциональных издержек.

Вычисление доли теневой экономики в зависимости от изменения различных факторов исследуемой модели проводилось, используя решение системы (3). Вычисление проводилось с помощью функции нелинейной численной оптимизации NMaximize с параметром «SimulatedAnnealing» (метод имитации отжига).

Используя полученное решение системы (3) на следующих исходных данных $t_2 = 0.5$, $s=0.002$, $b=0.68$, $a=1$, $\beta = 0.00025$, $C_1 = 1000$, $C_2 = 1000$, $C_3 = 1000$, $L=100$, $t=1$ была рассмотрена динамика доходов экономических агентов при различных значениях налоговой ставки на прибыль в зависимости от следующих факторов:

1. качества работы надзорно-контрольных органов государства α ,
2. величины институциональных издержек τ .

Результаты проведенного анализа иллюстрируют рис. 1 и рис. 2.

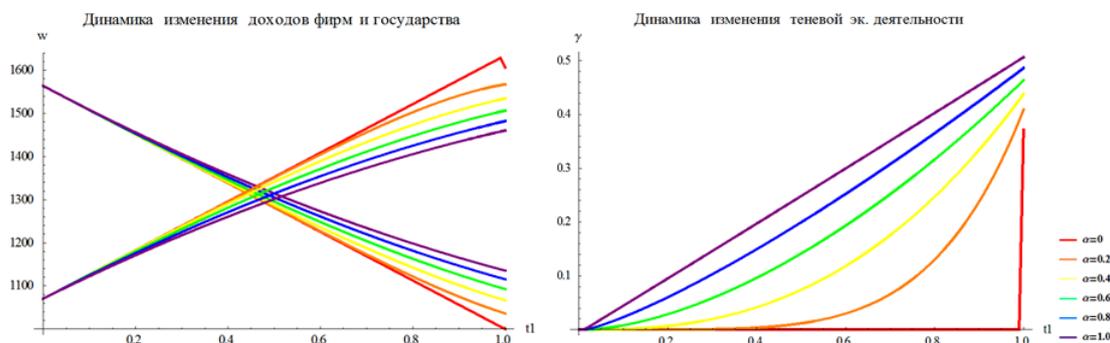


Рис. 1. Динамика доходов эк. агентов и динамика изменения теневой эк. деятельности ($r=0$, $\alpha \in [0, 1]$)

Была разработана и получена математическая модель в виде системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений для исследования динамики доходов экономических агентов с учётом теневой экономической деятельности. В результате данного исследования были получены следующие выводы:

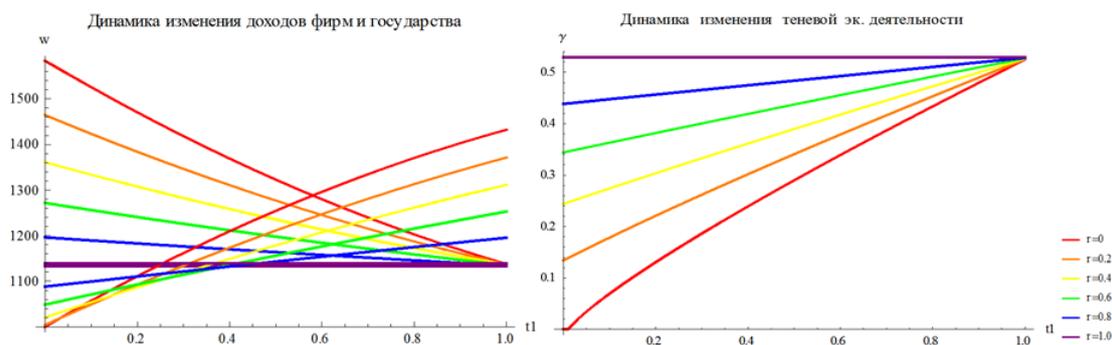


Рис. 2. Динамика доходов эк. агентов и динамика изменения теневой эк. деятельности ($\alpha=0$, $r \in [0, 1]$)

1. Существует оптимальный уровень теневой экономической деятельности, при котором фирмы и государство находятся в состоянии равновесия. В среднем он составляет 10–30 %.
2. Институциональные издержки гораздо сильнее сказываются на увеличении размера теневой экономики, чем налоговые ставки, негативно отражаясь на доходах всех эк. агентов.

Литература

1. Friedman E. Dodging the Grabbing hand: The Determinants of Unofficial Activity in 69 Countries / E. Friedman, S. Johnson, D. Kaufmann, P. Zoido-Labton // Journal of Public Economics. 2000. 76(4). pp. 459–493.
2. Hibbs A. D. Institutions Corruption and Tax Evasion in the Unofficial Economy / A. D. Hibbs, V. Piculescu // CEFOS and Department of Economics, Göteborg University. pp. 29.
3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория; пер. с англ./ М. Интрилигатор. – М.: Прогресс, 1975. 606 с.
4. Мамедова Т. Ф. Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем / Т. Ф. Мамедова, Д. К. Егорова // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 2. С. 55–58.
5. Чебоксаров В. В., Мамедова Т. Ф. Математическая модель динамики доходов в замкнутой системе с учетом теневой экономической активности [Электронный ресурс] // Огарев-online. 2017. № 13. Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/matematiceskaya-model-dinamiki-doxodov-v-zamknutoj-sisteme-s-uchetom-tenevoj-ekonomicheskoy-aktivnosti>

MSC 47A13

Optimization of incomes of economic agents

V.V. Cheboksarov¹, T.F. Mamedova¹

National Research Ogarev Mordovia State University¹

УДК 517.9

О периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением в виде полиномиальной оператор-функции

П. А. Шаманаев ¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Задача о ветвлении решений дифференциальных уравнений с вырожденным или единичным оператором при производной и возмущением в виде аналитической оператор-функции малого параметра рассматривались в работах [1], [2].

В настоящей работе решается задача о нахождении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или единичным оператором при производной и возмущением в виде полиномиальной оператор-функции второй степени относительно малого параметра.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$A \frac{dx}{dt} = B_0 x - B(\varepsilon)x - f(t), \quad B(\varepsilon) = \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2, \quad (1)$$

где A и B_i – плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, действующие из E_1 в E_2 , $f(t+T) = f(t)$, $T > 0$, ε – малый вещественный параметр.

Предполагается, что уравнение

$$A \frac{dy}{dt} = B_0 y \quad (2)$$

имеет $2n$ ($n = n_1 + \dots + n_r$) T -периодических решений $\varphi_k^{(1)}, \bar{\varphi}_k^{(1)}$ ($k = \overline{1, n}$).

В работе при достаточно малых вещественных ε доказано существование и единственность T -периодического решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $x(t, 0) = z(t)$, где $z(t)$ – T -периодические решения уравнения

$$A \frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t). \quad (3)$$

Предполагается, что для уравнения (3) справедливы условия, обеспечивающие существование T -периодических решений.

Для решения поставленной задачи уравнение (1) представляется в виде

$$B_0 x = f(t) + B(\varepsilon)x, \quad B_0 x \equiv B_0 x(t) - A \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

а, затем, используя метод линеаризации по спектральному параметру [3], приводится к матрично-операторной форме

$$B y = H(t) + \varepsilon A y, \quad (5)$$

где $y = \text{colon}(y_1, y_2)$, $H(t) = \text{colon}(f(t), 0)$,

$$B \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь, C – произвольный обратимый оператор.

Далее, используя обобщённые жордановы наборы для оператор-функций $\mathcal{B}_0 - B(\varepsilon)$ и $\mathcal{B} - \varepsilon A$ [1]- [3], с помощью метода Ляпунова-Шмидта задача о нахождении T -периодических решений уравнения (1) сводится к исследованию разрешающих систем в корневом подпространстве [4], [5]. Разрешающая система представляет собой систему линейных алгебраических уравнений и при $\varepsilon \neq 0$ имеет единственные решения, а при значении ε , равным нулю, – $2n$ -параметрическое семейство решений.

T -периодическое решение уравнения (1) строится в виде линейной комбинации элементов обобщённого жорданова набора оператор-функций $\mathcal{B}_0 - B(\varepsilon)$ и дополнительного слагаемого. Показано, что T -периодическое решение уравнения (1) в общем случае имеет полюс в точке $\varepsilon = 0$, а при значении ε , равным нулю, переходит в $2n$ -параметрическое семейство периодических решений.

Литература

1. Loginov B.V., Rusak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. *Nonlinear analysis, theory, methods and applications*. 1991. Vol. 17, N 3. pp. 219-232.
2. Коноплёва И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах. *Изв. высших учеб. заведений. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки*. 2009. Спецвыпуск. С. 115-124.
3. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщённая жорданова структура аналитической оператор-функции и её роль в теории ветвления. Редкол. "Известия АН УзССР". Ташкент. 1977. 82 с. Деп. в ВИНТИ 18.04.1977, № 1782.
4. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
5. Кяшкин А.А., Логинов Б.В., Шаманаев П.А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // *Журнал Средневожского математического общества*. 2016. Т. 18, № 1. С. 45–53.

MSC 39A23

On periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with small perturbation in the form of a polynomial operator function

P. A. Shamanaev¹

National Research Mordovia State University¹

УДК 517.95

Исследование системы Франкля с секвестрированными коэффициентами

Т.А. Шемякина¹

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹

Основным объектом исследования рассматриваем систему Франкля [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - P(x,y, u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \pm Q(x,y, u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x,y), v(x,y)$ – неизвестные функции;

$P(x,y, u(x,y), v(x,y)) \geq p_0 > 0; Q(x,y, u(x,y), v(x,y)) \geq q_0 > 0;$

p_0, q_0 – константы.

Эта система дифференциальных уравнений с частными производными относится к системам смешанного типа: со знаком плюс – она эллиптического типа, со знаком минус – гиперболического типа. Известный физик Ф.И. Франкль в работе [1] впервые привлек внимание к системе дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (1) смешанного типа, соединив исследование её при определенных условиях с изучением задач стационарного процесса трансзвуковой газовой динамики. Библиография по уравнениям смешанного типа содержится во многих монографиях.

Известные ученые С.А. Чаплыгин, М.А. Лаврентьев, С.В. Фалькович, А.В. Бицадзе, Ф. Трикоми, Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко и др. изучали задачи для систем уравнений смешанного типа (чаще всего в виде дифференциального уравнения второго порядка). При этом, коэффициенты дифференциальных уравнений либо являются константами, либо независимыми переменными. Метод исследования заключался, как правило, с помощью новых переменных в преобразовании нелинейных уравнений к линейным. Но возврат к исходным переменным в общем случае представляет собой более трудоемкую задачу, чем исходная задача. В итоге разработанные методы наряду с преимуществами имеют существенные недостатки. Например, применение метода характеристик для таких систем уравнений в соответствующем интегральном уравнении вносит суперпозицию неизвестных функций. В применении большинства методов условием разрешимости исходной задачи является условие существования обратной функции. Новая задача во многих случаях оказывается настолько сложной, что ее не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия.

Для преодоления таких трудностей сначала исследуем задачу для достаточно общего вида системы Франкля в гиперболическом случае методом дополнительного аргумента. Академик РАН М.И. Иманалиев и профессор С.Н. Алексеенко в работах [2] - [4] впервые предложили метод дополнительного аргумента. Метод дополнительного аргумента позволяет во многих случаях более эффективно через начальные данные определить условия разрешимости системы дифференциальных уравнений и интервал её разрешимости.

Рассмотрим систему Франкля в случае, когда при определенных предположениях она описывает движение идеального газа при сверхзвуковых скоростях. Коэффициенты системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (1) принимают следующий вид:

$$P(v(x,y)) \geq p_0 > 0; Q(v(x,y)) \geq q_0 > 0.$$

Учитывая свойства физического процесса, мы преобразуем коэффициент системы уравнений Q . После преобразований мы получаем коэффициент уравнения в следующем виде:

$$Q(v(x, y)) = \frac{k_0}{v^2 \cdot P(v^2)},$$

где k_0 – константа.

В этом случае мы называем коэффициенты системы Франкля секвестрированными.

Для системы Франкля определим начальные условия:

$$u(x, 0) = \varphi(x); v(x, 0) = \psi(x); x \in (-\infty; \infty); \varphi(x), \psi(x) \in \overline{C}^2(R^1) \quad (2)$$

Задача рассматривается в области:

$$\Omega_Y = \{(x, y) : x \in (-\infty, \infty); y \in [0, Y], Y > 0\}.$$

В статьях [5] - [15] авторами разработан принципиально новый подход исследования разрешимости системы Франкля методом дополнительного аргумента. В работах [5] - [8] были сформулированы условия локальной разрешимости системы Франкля, определен интервал разрешимости через начальные данные. При этом получили, что гладкость решений не ниже гладкости начальных условий. В системах интегральных уравнений было уменьшено количество суперпозиций неизвестных функций, что упростило исследование задачи.

Численные эксперименты проводились для модельных примеров и для частных случаев системы Франкля, когда она имела физическое или экологическое содержание [10] - [15]. В работах [10] - [11] построены примеры некоторых вариантов системы Франкля для гиперболического и эллиптического типов, в которых решение было найдено в явном аналитическом виде через W -функцию Ламберта.

В работе [9] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия локальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в характеристической форме. Мы нашли глобальные оценки, которые гарантируют существование глобального классического решения, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Однако для системы Франкля, с произвольно заданными начальными данными, условия существования глобального решения, установленные в работе [9], не выполняются.

В работах [14] - [15] мы доказываем глобальное существование автомодельного решения системы Франкля при условии согласования начальных данных. Система Франкля имеет коэффициенты вида $P(u(x, y), v(x, y)), Q(u(x, y), v(x, y))$.

В настоящей работе мы нашли глобальное классическое решение системы Франкля с секвестрированными коэффициентами и при условии согласования начальных данных. Исследование задачи выполнено на основе метода дополнительного аргумента. Результаты сформулированы в виде теоремы.

Теорема.

Пусть функции $P(v(x, y)) \geq p_0 > 0, Q(v(x, y)) \geq q_0 > 0$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам;

$\varphi(x), \psi(x) \in \overline{C}^2(R^1)$ - функции с условием согласования начальных данных:

$$\varphi(x) = k_0^{0.5} \ln(\psi(x)) + c, c - const,$$

$$(P(v(x, y)) + v(x, y)\partial_x P(v(x, y)))\psi'(\cdot) \leq 0.$$

Тогда для системы Франкля (1) с секвестрированными коэффициентами и начальными условиями (2), на любом заданном промежутке задача Коши имеет единственное ограниченное решение, определяемое по формулам:

$$u(x, y) = \varphi(x + y \cdot k_0^{-0.5} v(x, y) P(v(x, y))),$$

$$v(x, y) = \psi(x + y \cdot k_0^{-0.5} v(x, y) P(v(x, y))).$$

Замечание. Если неравенство $(P(v(x, y)) + v(x, y) \partial_x P(v(x, y))) \psi'(\cdot) > 0$ выполнено, то функция $v(x, y)$ обращается в бесконечность на конечном интервале.

Литература

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 712 с.
2. Иманалиев М. И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. Бишкек: Илим, 1992. 112 с.
3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. № 3. С. 410-414.
4. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады АН СССР. 1992. Т. 325. № 6. С. 1111-1115.
5. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Круц К. Г. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 142-147.
6. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Чезганов В. Г. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в эллиптическом случае // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 148-152.
7. Шемякина Т. А. Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т.13. № 2. С.127-131.
8. Шемякина Т. А. Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2012. № 2 (146). С. 130-140.
9. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2013. № 3 (177). С. 190-201.
10. Шемякина Т. А. Примеры решения задачи Коши для некоторых вариантов системы Франкля эллиптического типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2011. № 4 (134). С. 191-197.
11. Шемякина Т. А. Примеры решения задачи Коши для некоторых вариантов системы Франкля гиперболического типа // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ' 2012). М.: МАИ-ПРИНТ, 2012. С. 525-528.
12. Kainov N. U., Tarkhov D. A., Shemyakina T. A. Application of neural network modeling to identification and prediction problems in ecology data analysis for metallurgy welding industry // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. vol. 17. № 1. 2014. P. 57-63.

13. Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. Нейросетевой подход к задачам математической физики. СПб.: Нестор-История, 2015. 260 с.
14. Shemyakina T. and Alekseenko S. Methods of construction and study of Frankl system self-similar solutions in the hyperbolic case // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) 012085 <http://iopscience.iop.org/1757-899X/158/1/012085>.
15. Shemyakina T. Global solutions of Frankl system with sequestered coefficients providing by filling of initial data International conference on mathematical modelling in applied sciences St. Petersburg. Russia (2017). Abstract Book. SPbPU Publication. №11 (131). P.239-140.

MSC 35L50, 35M11, 35Q35, 76B03

A study of the Frankl system with sequestered coefficients

T.A. Shemyakina¹

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University¹

УДК 517.9

Частичная устойчивость математической модели управляемого движения космического аппарата

О.С. Язовцева¹, П.А. Шаманаев¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
им. Н.П. Огарёва¹

Рассмотрим задачу об исследовании частичной устойчивости семейства положений равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = w_1 + v_2 \\ \dot{v}_2 = w_2 - v_1 \\ \dot{w}_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 w_1 + k_4 w_2 - k_1 - k_4 \\ \dot{w}_2 = -\frac{3v_2}{(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{3}{2}}} - v_2 - w_1 \end{cases} \quad (1)$$

К исследованию частичной устойчивости системы (1) сводится задача об управляемом движении космического аппарата [1].

В работе решена задача об исследовании частичной устойчивости семейства положений равновесия $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ системы (1).

В качестве первого приближения системы (1) возьмем

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + y_3, \\ \dot{y}_2 = y_4 - y_1, \\ \dot{y}_3 = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + k_4 y_4, \\ \dot{y}_4 = -y_2 - y_3. \end{cases} \quad (2)$$

Применяя методы из работы [2], получим, что множество параметров k_i , $i = \overline{1, 4}$, при которых нулевое решение системы (2) устойчиво по переменным y_1 и y_4 и асимптотически устойчиво по переменным y_2 и y_3 , имеет вид

$$k_1 = -k_4, \quad k_3 < 0, \quad k_3 < k_2, \quad k_4 > -\frac{k_2}{k_3}. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть параметры k_i , $i = \overline{1, 4}$, удовлетворяют условию (3). Тогда каждая точка из семейства положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ системы (1)

- 1) асимптотически устойчива по переменным x_2 и x_3 ;
- 2) устойчива по переменным x_1 и x_4 , причем имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным.

Доказательство теоремы основано на установлении локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности [3] и проводится аналогично работам [4]- [6].

Литература

1. Шмыров А. С., Шмыров В. А. Об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2009. – № 4. – С. 250–257.

2. Никонов В. И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2011. – Т. 13, № 2. – С. 95–99.
3. Язовцева О. С. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2017. – № 13. – Режим доступа:
<http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primeneniye-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennykh>.
4. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2017. – Т. 19, № 1. – С. 102–115.
5. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2018. – Т. 20, № 3. – С. 304–317.
6. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. – 2018. – Т. 28, № 3. – С. 321–332.

MSC 34C20

Partial stability of the mathematical model of the controlled motion of a spacecraft

O.S. Yazovtseva ¹, P.A. Shamanaev ¹

National Research Ogarev Mordovia State University ¹

MSC 45G05

Note on approximation of the exact solutions of weakly singular integral equations

Aleksandr N. Tynda¹

Penza state university¹

1. Introduction

It is well-known that the exact solutions of weakly singular integral equations may have unbounded derivatives near the bounds of domain (see, e.g. [2, 5]).

For a simplicity of presentation consider now the simplest case of one-dimensional Volterra integral equation of the form

$$x(t) - \int_0^t \frac{h(t, \tau)}{(t - \tau)^\alpha} x(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

where the function $h(t, \tau)$ has bounded derivatives on each variable up to certain order r in square $[0, T]^2$, $f(t) \in C^{r, \alpha}(0, T]$. Then the exact solution $x(t) \in C^{r, \alpha}(0, T]$ ([2]). Here is a definition of this class:

Definition 1. Let $0 \leq \alpha < 1$ and the function $f(t)$ has continuous derivatives up to order r for $t \in (0, T]$, satisfying the inequalities

$$|f^{(k)}(t)| \leq \frac{A_k}{t^{k-1+\alpha}}, \quad \text{for all } t \in (0, T], k = 0, 1, \dots, r.$$

Then $f(t) \in C^{r, \alpha}(0, T]$.

Since the exact solution of (1) belongs to $C^{r, \alpha}$, there is a necessity to investigate the optimal methods of approximation for this class.

2. Piecewise polynomial approximation

It is well-known (see, e.g. the papers [1, 2] by H. Brunner) that the polynomial spline approximation of functions from $C^{r, \alpha}$ in case of the uniform mesh $t_k = \frac{kT}{N}$, $k = \overline{0, N}$, satisfies only $\|f - f_N\|_\infty = O(\frac{1}{N^{1-\alpha}})$. And this order is best possible for any $r \geq 1$. One can restore the optimal convergence rate $O(N^{-r})$ by using so-called graded meshes of the form

$$t_k = \left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{r}{1-\alpha}} T, \quad k = \overline{0, N}. \quad (2)$$

The mesh (2) is strongly nonuniform and there are some practical difficulties in its application in collocation methods for integral equations. In using graded meshes we have to start the collocation on a very small subinterval. This may create serious round-off errors in subsequent calculations, which will restrict applicability of the method (see, e.g. [3, 7]).

In this paper we suggest the new practical mesh which is less nonuniform than (2), but at the same time it gives us an equivalent approximation error for the functions from $C^{r, \alpha}(0, T]$.

The application of this mesh in practice (when the spline-collocation technique is used) allows to save 2 – 3 orders of a theoretical accuracy. Such approach is also extended to the case of multidimensional integral equations at the construction of its numerical solutions [8].

References

1. H. Brunner, The Numerical solution of weakly singular Volterra integral equations by collocation on graded meshes, *Math. Comp.*. 1985. Vol.45, No. 172. pp. 417-437.
2. H. Brunner, A. Pedas, G. Vainikko, The piecewise polynomial collocation method for nonlinear weakly singular Volterra equation, *Math. Comp.*. 1999. Vol. 68, No. 227. pp. 1079-1095.
3. T. Diogo, S. McKee, T. Tang, Collocation methods for second-kind Volterra integral equations with weakly singular kernels. *Proc. Roy. Soc. Edin.* 124A, 1994. pp. 199-210.
4. A.N. Tynda, Numerical algorithms of optimal complexity for weakly singular Volterra integral equations, *Comp. Meth. Appl. Math.*. 2006. Vol. 6, No. 4. pp. 436-442.
5. G.M. Vainikko, On the smoothness of solution of multidimensional weakly singular integral equations. *Mat. Sbornik.*. 1989. Vol. 180, No. 12. pp. 1709-1723 (In Russian)
6. V.K. Dziadyk, *Introduction in Theory of Uniform Approximation of the Functions by Polynomials*. Moscow, Nauka. 1977. 512 p. (in Russian)
7. A.P. Orsi, Product integration for Volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernels. *Math. Comp.*. Vol.65. No. 215(1996). pp. 1201-1212.
8. A.N. Tynda, Numerical methods for 2D weakly singular Volterra integral equations of the second kind. *PAMM*, 2007. Vol. 7, Issue 1, pp. 2020009 - 2020010.

УДК 517.958:531.12; 534.11

Исследование поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении

В.Н. Анисимов¹, В.Л. Литвинов¹

Сызранский филиал ФГБОУ ВО СамГТУ¹

Аннотация. В статье исследуются поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами. При постоянной скорости продольного движения колебания каната характеризуются набором собственных частот. В результате получено уравнение, позволяющее найти точные значения собственных частот. В статье проанализировано, как влияет скорость продольного движения каната на форму собственных колебаний. Решение произведено в безразмерных переменных, что позволяет использовать полученные результаты для расчёта колебаний широкого круга технических объектов.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, частота колебаний.

1. Введение

В статье исследуются поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [2, 9, 15], гибкие звенья передач [1, 4, 13], балки [3], лентопротяжные механизмы [11], конвейеры [10, 12] и т.д. Наличие движущихся границ делает неприменимыми к решению таких краевых задач классические методы математической физики, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

2. Постановка задачи

Схема объекта изучения изображена на рисунке 1.

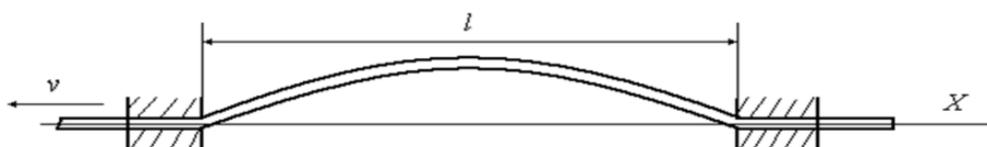


Рис.1. Схема объекта

Уравнение, учитывающее натяжение каната и сопротивление внешней среды, имеет вид:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + Gu_t(x,t) = 0. \quad (1)$$

Здесь $u(x,t)$ – поперечное смещение точки каната с координатой x в момент времени t ; $a^2 = \frac{T}{\rho}$; (T – натяжение каната; ρ – масса единицы длины каната); G – коэффициент сопротивления среды (сила, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения).

Граничные условия имеют вид:

$$u(vt, t) = 0; u(vt + l, t) = 0, \quad (2)$$

где v – скорость продольного движения каната, l – длина колеблющейся части.

Введем безразмерные переменные:

$$u(x,t) = U(\xi, \tau); \quad \xi = \frac{2\pi(x-vt)}{l}; \quad \tau = \frac{2\pi\sqrt{a^2-v^2}}{l}t. \quad (3)$$

В результате получим задачу с условиями, заданными на неподвижных границах:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \gamma U_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \lambda U_{\tau}(\xi, \tau) - \eta U_{\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$U(0, \tau) = 0; U(2\pi, \tau) = 0. \quad (5)$$

Здесь:

$$\gamma = \frac{2v}{\sqrt{a^2-v^2}}; \lambda = \frac{Gl}{2\pi\sqrt{a^2-v^2}}; \eta = \frac{Gvl}{2\pi(a^2-v^2)}. \quad (6)$$

Два коэффициента уравнения (1) могут быть выражены через два безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{v}{a}; D = \frac{Gl}{2\pi a}. \quad (7)$$

Параметры характеризуют: α – относительную скорость продольного движения каната; D – сопротивление среды.

Через безразмерные параметры коэффициенты уравнения (4) выражаются следующим образом:

$$\gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \lambda = \frac{D}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \eta = \frac{\alpha D}{1-\alpha^2}. \quad (8)$$

3. Решение задачи

Решим задачу (4), (5) аналитическим методом. Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}, \quad (9)$$

где $\mu(\xi)$ – собственные функции, характеризующие форму колебаний, ω – собственные частоты.

Для вычисления функции $\mu(\xi)$ получим следующую краевую задачу:

$$\mu''(\xi) + (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) - (\omega^2 + \lambda\omega)\mu(\xi) = 0; \quad (10)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами при граничных условиях (11).

Общее решение (10) имеет вид:

$$\mu(\xi) = e^{\frac{(\gamma\omega - \eta)\xi}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)}}{2} \xi + C_2 \sin \frac{\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)}}{2} \xi \right). \quad (12)$$

Используя граничные условия (11), получим

$$C_1 = 0$$

$$C_2 \sin \pi \sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)} = 0. \quad (13)$$

Тогда:

$$\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)} = n. \quad (14)$$

Из (14) получим квадратное уравнение относительно собственных частот ω :

$$\omega^2(4 + \gamma^2) + 2\omega(\gamma\eta + 2\lambda) + (\eta^2 + n^2) = 0. \quad (15)$$

В результате решения уравнения (15) получено выражение для собственных частот колебаний:

$$\omega_n = -\frac{\gamma\eta + 2\lambda}{\gamma^2 + 4} + i \frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4)(n^2 + \eta^2) - (\gamma\eta + 2\lambda)^2}}{\gamma^2 + 4}. \quad (16)$$

Здесь i – мнимая единица; n – порядковый номер частоты. Действительная часть выражения (16) характеризует затухание колебаний, а мнимая – фактическую частоту.

При отсутствии затухания ($\lambda = \eta = 0$) выражение (16) примет вид:

$$\omega_n = i \frac{n}{\sqrt{\gamma^2 + 4}}. \quad (17)$$

Найдем собственные функции $\mu(\xi)$ при отсутствии затухания. С учетом нормирования, из (12) получим:

$$\mu(\xi) = e^{\frac{-i\alpha\xi}{2}} \sin \frac{n\xi}{2}. \quad (18)$$

Используя формулу Эйлера, получим выражение для собственных функций в виде:

$$\mu(\xi) = \sin\left(\frac{(1-\alpha)n\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{(1+\alpha)n\xi}{2}\right). \quad (19)$$

Как изменяются собственные функции $\mu(\xi)$ в зависимости от параметра α показано на рис. 2.

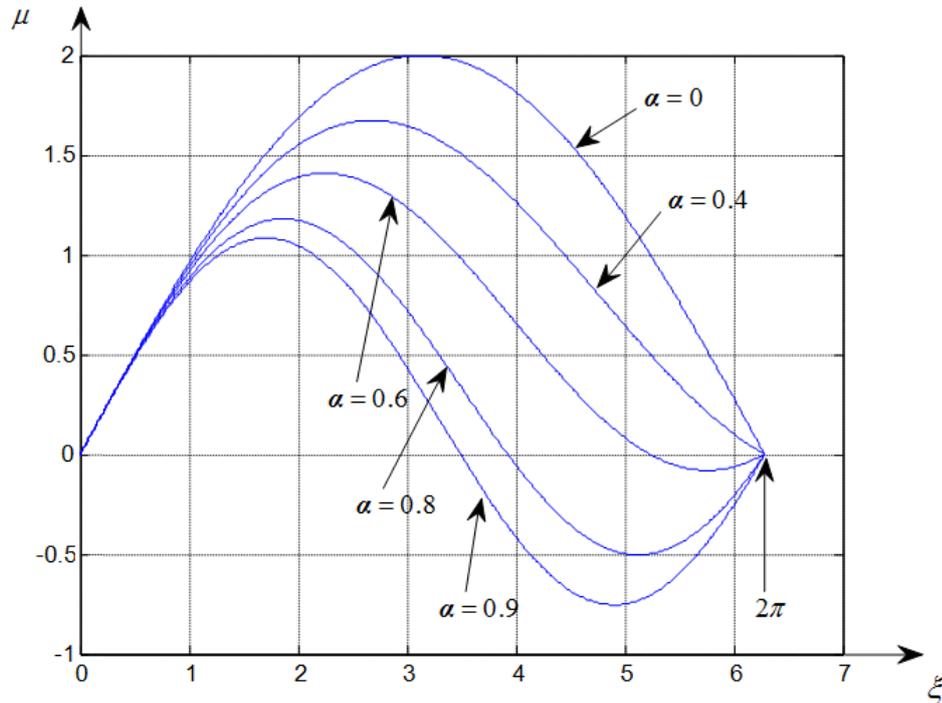


Рис.2. Зависимость собственных функций от скорости продольного движения каната

Анализ рис. 2 показывает, что чем больше скорость движения каната, тем больше искажаются собственные функции. Искажение происходит на границе, движущейся навстречу бегущим волнам.

4. Заключение

В статье произведен анализ поперечных колебаний каната движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната и сопротивление внешней среды. Решение произведено аналитическим методом. Полученные результаты могут быть использованы для расчёта широкого круга технических объектов.

Литература

1. Самарин Ю. П., Анисимов В. Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. Вузов. Машиностроение, 1986. № 12. С. 17–21.
2. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
3. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1970. № 1. С. 159–161.
4. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
5. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2009. № 1 (18). С. 149–158.
6. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2012. № 3 (28). С. 145–151.
7. Ding Hu, Chen Li-Qun. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams // J. Sound and Vibr., 2010. no. 17. pp. 3484–3494.
8. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009. – 131 с.
9. Zhu W. D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust., 2006. no. 1. pp. 66–78.
10. Ерофеев В. И., Колесов Д. А., Лисенкова Е. Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. № 6 (70), 2013. – С. 18–29.
11. Рагульский К. И. Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов // В сб.: Динамика машин. – М.: Наука, 1971. – С. 169–177.
12. Хосаев Х. С. Математическое описание динамических характеристик канатного става ленточного конвейера // Тр. Сев.-Кавк. гос. технол. ун-та. – 2001. – № 8. – С. 234–239.
13. Тихонов В.С., Абрамов А.А. Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке // Вестник МГУ. Сер. 1, 1993. № 5. С. 45–48.
14. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2015. Т. 19, № 2. С. 382–397.

15. Анисимов В. Н. Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъемной установки // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4-1. С. 128–133.
16. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 149 с.
17. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70-77.

MSC: 35R37; 35G30, 35Q70

Investigation of transverse oscillations of a rope moving in longitudinal direction

V.N. Anisimov¹, V.L. Litvinov¹

Syzran' Branch of Samara State Technical University¹

Abstract. The article researches the oscillations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the tension of the rope and resistance of the external environment. The object of the study refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries. At a constant speed of longitudinal motion, the rope oscillations are characterized by a set of eigen frequencies. As a result, an equation is obtained in the form of series, which makes it possible to find the exact values of the eigen frequencies. The article analyzes how the speed of longitudinal rope motion affects the shape of natural oscillations. The solution is made in dimensionless variables, which allows us to use the obtained results to calculate the oscillations of a wide range of technical objects.

Key Words: oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, mathematical models, oscillation frequency.

УДК 537.531:004.42

Разработка алгоритма и программы расчета параметров электромагнитного излучения плоского проводника

В.Ф. Белов¹, А.А. Буткина¹, С.О. Костров¹, А.В. Шамаев¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
им. Н.П. Огарева¹

Аннотация: В работе предложен алгоритм и выбран метод решения задачи расчета параметров электромагнитного излучения плоского проводника, обеспечивающий максимальную вычислительную эффективность ее решения. На основе данного метода разработана программа расчета электрической и магнитной составляющей электромагнитного излучения плоского проводника в заданной точке пространства, которая может применяться при решении задач виртуальной сертификации электронных устройств.

Ключевые слова: электромагнитное излучение, метод моментов, базисная функция, интегральное уравнение электрического поля, виртуальная сертификация.

Плоские проводники повсеместно используются в различных технических устройствах, в частности, они размещаются на печатных платах, предназначенных для размещения и организации взаимодействия компонентов электронных устройств. По мере усложнения таких печатных плат (увеличение количества слоев, уменьшение размеров проводников, увеличение количества и плотности компонентов) требуются все более точные методы для их проектирования. К таким методам относится расчет электромагнитных (ЭМ) полей в объеме и ближайшей окрестности печатной платы.

Современные системы автоматизированного проектирования (САПР) и моделирования электронных устройств, производимые как в России, так и за рубежом, которые позволяют проводить такие расчеты, зачастую не обеспечивают требуемой точности определения параметров ЭМ поля, либо не являются свободно распространяемыми и имеют крайне высокую стоимость.

Кроме того, задача определения уровня эмиссии электромагнитных помех на определенной частоте в заданной точке пространства должна многократно решаться при выполнении виртуальной сертификации электронных устройств.

Указанные факты обосновывают актуальность проведения исследования, посвященного разработке алгоритма и программы расчета параметров электромагнитного поля, создаваемого плоским проводником прямоугольной формы в заданной точке пространства.

В большинстве современных САПР используются три метода решения электродинамических задач:

- метод моментов (Method of Moments – MoM);
- метод конечных элементов (Finite Element Method – FEM);
- метод конечных разностей во временной области (Finite Difference Time Domain – FDTD).

Эти методы моделирования используют схожий подход к решению электродинамических задач. При этом процесс моделирования включает следующие основные шаги:

- **Создание физической модели.** На этом шаге создается топология (расположение) и определяются свойства материальных объектов, использованных в этой топологии.
- **Настройка параметров ЭМ моделирования.** Определяется область моделирования и граничные условия, выбираются специальные опции моделирования;
- **Выполнение ЭМ моделирования.** Физическая модель подвергается дискретизации путем разбиения сеткой на ячейки. Затем с помощью локальной (базисной) функции выполняется аппроксимация поля/тока в пределах ячейки.
- **Последующая обработка.** Расчет S-параметров характеристик излучения в дальней зоне и т.п.

В качестве метода решения электродинамических задач, используемого для вычисления параметров поля, был выбран метод моментов. Этот выбор обусловлен тем, что данный метод обеспечивает высокую скорость и точность решения указанных задач при низких требованиях к вычислительным ресурсам.

Метод моментов обеспечивает решение уравнений Максвелла в интегральной форме в частотной области. Основным его достоинством является то, что он является «методом источника», то есть при его применении дискретизируется только источник излучения (поля), а не свободное пространство, как в случае использования других методов. При этом объем используемой памяти компьютера пропорционален геометрии задачи и частоте.

Рассмотрим решение поставленной задачи данным методом. Пусть S – поверхность проводника, E^{-i} – поле, создаваемое некоторым источником. Это поле индуцирует на S поверхностный ток. Тогда поле E^{-s} , создаваемое проводником, может быть вычислено по формуле

$$E^{-s} = -j\omega\bar{A} - \nabla\Phi, \quad (1)$$

которая соответствует интегральному уравнению электрического поля (Electric Field Integral Equation – EFIE) [1], где векторный и скалярный потенциал электромагнитного поля определяются по формулам:

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_s \frac{e^{-jR}}{R} dS, \quad (2)$$

$$\Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \sigma \frac{e^{-jR}}{R} ds. \quad (3)$$

Для решения данного уравнения методом моментов необходимо представить неизвестную плотность поверхностного тока \bar{J} в виде суммы известных функций с некоторыми коэффициентами, которые в методе моментов называются базисными:

$$\bar{J} = \sum_{n=1}^N I_n \bar{f}_n. \quad (4)$$

В данной работе в качестве базисных используются RWG функции, разработанные Рао, Уилтоном и Глиссоном [2] и являющиеся одним из самых главных научных достижений в области расчета поля антенн.

При их использовании для решения плоских задач поверхность проводника должна быть разбита на отдельные треугольники (Рис. 1). При этом каждая пара треугольников, имеющих общее ребро, образует соответствующий RWG элемент.

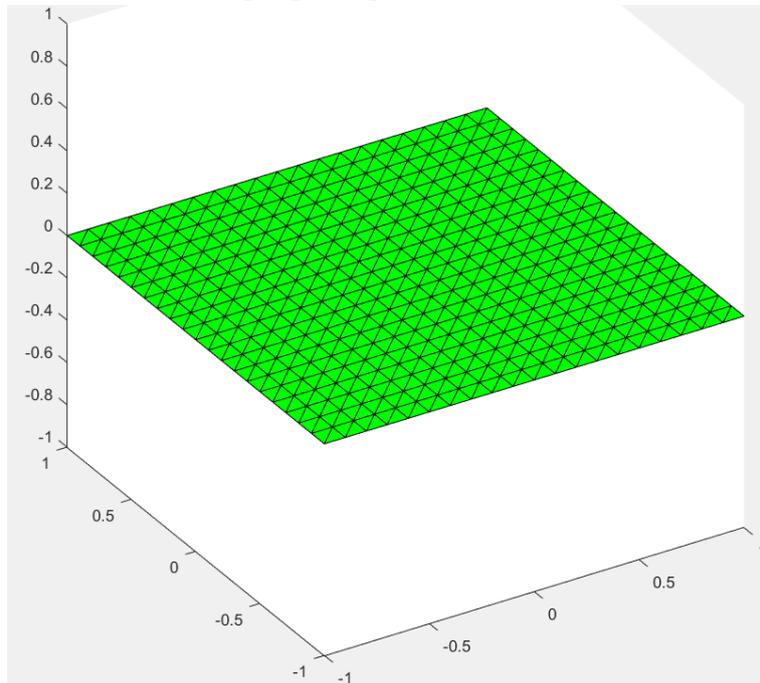


Рис. 1. Разбиение проводника на треугольные элементы

Один из треугольников, принадлежащих такому элементу, помечается как T^+ , другой — как T^- (Рис. 2). Каждому RWG элементу ставится в соответствие базисная функция

$$f_n(r) = \begin{cases} (l_n / 2A_n^+) \rho_n^+(r), & r \text{ в } T_n^+; \\ (l_n / 2A_n^-) \rho_n^-(r), & r \text{ в } T_n^-; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь: l_n – длина общего ребра; A_n^\pm – площади соответствующих треугольников. Вектор ρ_n^+ направлен из вершины «положительного» треугольника в точку r . Вектор ρ_n^- направлен из точки r к свободной вершине «отрицательного» треугольника.

Базисная функция приближенно соответствует конечному диполю длины $d = |r_n^{c+} - r_n^{c-}|$ [3] (Рис. 2).

Таким образом, разбиение структуры проводника на RWG элементы приближенно соответствует разбиению тока плоского проводника на «элементарные» диполи [4].

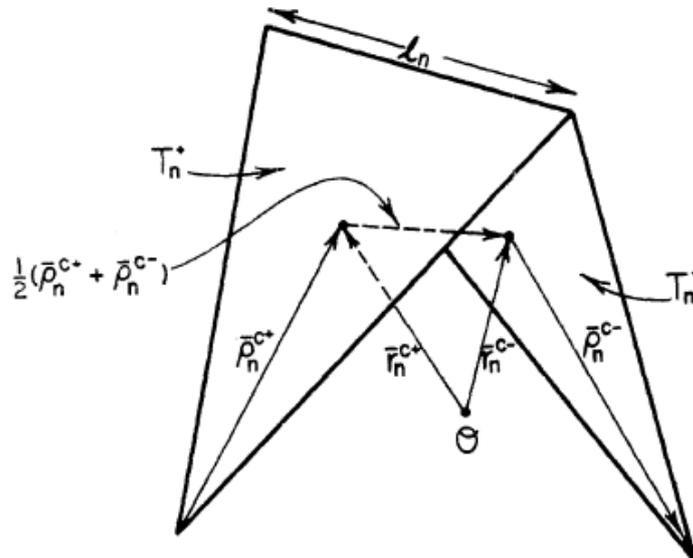


Рис. 2. Дипольная интерпретация RWG элемента

Для получения однозначного решения EFIE проводят тестовую процедуру, которая состоит в определении операции умножения в виде

$$\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle = \int_s \bar{f} \cdot \bar{g} ds \quad (5)$$

и ее применении к EFIE. Теперь перейдем к системе линейных уравнений:

$$ZI = V, \quad (6)$$

где $Z = [Z_{mn}]$ — это матрица сопротивлений размерности $N \times N$, $I = [I_n]$, $V = [V_n]$ — векторы размерности N , а N — количество RWG элементов.

Если граничные элементы m и n рассматриваются как электрические диполи, то элемент Z_{mn} матрицы сопротивлений Z описывает воздействие диполя n на электрический ток диполя m , и наоборот.

В результате получаем следующую формулу расчета матрицы сопротивлений для RWG граничных элементов:

$$Z_{mn} = l_m \left[j\omega \left(A_{mn}^- \cdot \rho_m^{c-} / 2 + A_{mn}^+ \cdot \rho_m^{c+} / 2 \right) + \Phi_{mn}^- - \Phi_{mn}^+ \right]. \quad (7)$$

Здесь индексы m и n соответствуют двум граничным элементам; символ « \cdot » обозначает скалярное произведение; l_m — длина общего ребра граничного элемента m ; ρ_m^{c+} — вектор, который соединяет свободную вершину «положительного» треугольника и его центроид; ρ_m^{c-} — вектор, который соединяет центроид «отрицательного» треугольника и его свободную вершину.

Выражения для векторного потенциала электромагнитного поля A и скалярного потенциала Φ имеют вид:

$$A_{mn}^{\pm} = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{l_n}{2A_n^+} \int \rho_n^+(r) g_m^{\pm}(r) dS + \frac{l_n}{2A_n^-} \int \rho_n^-(r) g_m^{\pm}(r) dS \right], \quad (8)$$

$$\Phi_{mn}^{\pm} = \frac{1}{4\pi j \omega \varepsilon} \left[\frac{l_n}{2A_n^+} \int_{r_n^+} g_m^{\pm}(r) dS - \frac{l_n}{2A_n^-} \int_{r_n^-} g_m^{\pm}(r) dS \right]. \quad (9)$$

Здесь $g_m^{\pm}(r) = \frac{e^{-jkR}}{R}$; $R = |r_m^{c\pm} - r|$.

Решив эту систему линейных уравнений, можно найти неизвестный ток \bar{J} на поверхности проводящего тела, вызываемый полем E^{-i} . Зная этот ток, можно определить электромагнитное поле в заданной точке r по формулам:

$$E(r) = \sum_{m=1}^M E_m \left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_m^{c+} + \mathbf{r}_m^{c-}) \right), \quad (10)$$

$$H(r) = \sum_{m=1}^M H_m \left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_m^{c+} + \mathbf{r}_m^{c-}) \right), \quad (11)$$

где $E(r)$ и $H(r)$ — это соответственно электрическая и магнитная составляющая поля излучаемого диполем, имеющим соответствующий номер. Эти величины вычисляются по формулам

$$H(r) = \frac{jk}{4\pi} (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) C e^{-jkr}, \quad C = \frac{1}{r^2} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right], \quad (12)$$

$$E(r) = \frac{\eta}{4\pi} \left((M - \mathbf{m}) \left[\frac{jk}{r} + C \right] + 2MC \right) e^{-jkr}, \quad M = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{r}}{r^2}, \quad (13)$$

где $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$; $m = l_m I_m (\mathbf{r}_m^{c-} - \mathbf{r}_m^{c+})$.

Алгоритм решения поставленной задачи методом моментов, базирующимся на RWG элементах, включает следующие шаги:

1. Создание RWG элементов на основе входных данных (списка координат сетки разбиения проводника и списка треугольников сетки) создаются RWG элементы.
2. Расчет матрицы сопротивлений.
3. Решение уравнения моментов.
4. Нахождение искомых характеристик электрического и магнитного полей в заданной точке пространства.

На основе разработанного алгоритма была создана компьютерная программа, структура которой представлена на рисунке 3.



Рис. 3. Модули программы

Для тестирования разработанной программы с ее помощью была решена задача определения параметров электромагнитного излучения плоского проводника. В

качестве объекта, являющегося источником электромагнитного излучения, рассматривался плоский проводник квадратной формы размерами $2 \times 0,1$ м, лежащий в плоскости $Z = 0$.

В качестве источника энергии использовался генератор переменного тока, подключенный через зазор малой ширины, расположенный в граничном элементе (Рис. 4). Источник энергии имеет следующие характеристики: частота переменного тока 1,5 МГц; амплитуда напряжения 1В.

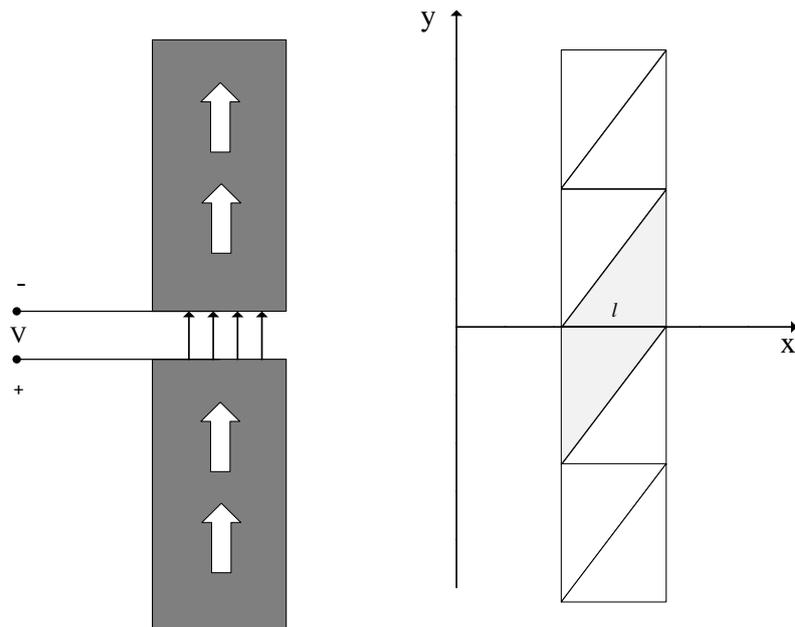


Рис. 4. Входные данные

Разбиение структуры проводника на треугольные элементы на основе входных данных, включающих в себя массивы, которые содержат координаты сетки разбиения проводника и список треугольников (Рис. 5). Интерфейс программы с результатами ее работы продемонстрирован на рисунке 6.

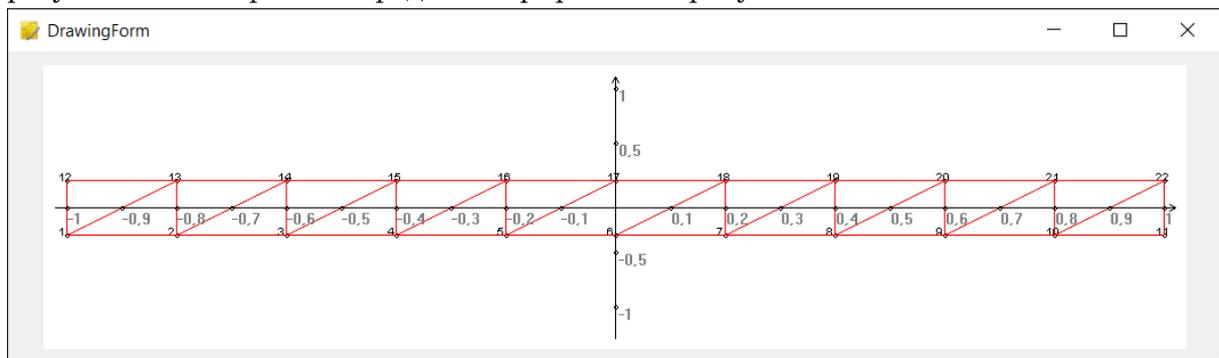


Рис. 5. Топология проводника

Point	Efield	Hfield
X 0	0.0014 - 0.0002i	0.1601 + 0.0491i
Y 0	-0.0597 - 0.0185i	0.0038 - 0.0006i
Z 5	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i

Рассчитать

Рис. 6. Интерфейс программы с результатами ее работы

В результате работы программы формируется файл, содержащий значения рассчитанных параметров электромагнитного поля. Их можно использовать для последующего анализа и нахождения картины поля в заданной области пространства.

Литература

1. Gibson W. C. The Method of Moments in Electromagnetics Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2014. 450 p.
2. Rao S. M., Wilton D. R., Glisson A. W. Electromagnetic by surfaces of arbitrary shape. IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol. 30, no.3, 1982, pp. 409-418.
3. Makarov S. MoM antenna simulations with Matlab: RWG basis functions. IEEE Antennas and Propagation Magazine. Vol. 43. Issue 5. 2001, pp. 100 – 107.
4. Makarov S. Antenna and EM modeling with MATLAB, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2002. 288 p.

MSC 35Q60, 68N19

Development of an algorithm and a program for calculating the parameters of the electromagnetic emission of a flat conductor

V.F. Belov¹, A.A. Butkina¹, S.O. Kostrov¹, A.V. Shamaev¹
National Research Mordovia State University ¹

Abstract: An algorithm is proposed and a method is chosen for solving the problem of calculating the electromagnetic emission parameters of a flat conductor, which ensures the maximum computational efficiency of its solution. Based on this method, a program has been developed for calculating the electrical and magnetic components of the electromagnetic emission of a flat conductor at a given point in space. This program can be used to solve problems of virtual certification of electronic devices.

Keywords: electromagnetic emission, method of moments, basis function, electric field integral equation, virtual certification.

References

1. Gibson W. C. The Method of Moments in Electromagnetics Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2014. 450 p.
2. Rao S. M., Wilton D. R., Glisson A. W. Electromagnetic by surfaces of arbitrary shape. IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol. 30, no.3, 1982, pp. 409-418.
3. Makarov S. MoM antenna simulations with Matlab: RWG basis functions. IEEE Antennas and Propagation Magazine. Vol. 43. Issue 5. 2001, pp. 100 – 107.
4. Makarov S. Antenna and EM modeling with MATLAB, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2002. 288 p.

УДК 539.3: 532.542

Динамическая устойчивость деформируемых элементов аэроупругих конструкций*

П.А. Вельмисов, А.В. Анкилов, Ю.В. Покладова

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: В работе исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику деформируемых элементов различных конструкций, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа). Принятые в работе определения устойчивости деформируемого (вязкоупругого, упругого) тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Изучается устойчивость элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, вибрационных устройств при различных способах закрепления элементов при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания сжимаемой или несжимаемой средой. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических линейных уравнений аэрогидромеханики. Для описания динамики упругих элементов используется как линейная, так и нелинейная теории твердого деформируемого тела.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, упругая пластина, дозвуковой поток газа, дифференциальные уравнения в частных производных, функционал.

1. Введение

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в авиаракетостроении, приборостроении, при проектировании антенных установок, высоких наземных сооружений и т. д.

Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Среди последних исследований по динамике и устойчивости деформируемых тел, обтекаемых потоком жидкости или газа, следует отметить работы [1–6] и многие другие. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, в том числе взаимодействующих с потоком жидкости или газа, отметим монографии и статьи [7–11].

Исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для связанных систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику деформируемых элементов различных конструкций, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа). Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов (прямой метод Ляпунова) для этих систем. Принятые в работе определения устойчивости деформируемого (вязкоупругого, упругого) тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость–тело» (основными параметрами являются

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие или растягивающие усилия, силы трения), малым деформациям тел в начальный момент времени $t = 0$ (т.е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени $t > 0$.

Изучается устойчивость элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, вибрационных устройств, датчиков измерения параметров газожидкостных сред при различных способах закрепления элементов при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания сжимаемой или несжимаемой средой. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики. Для описания динамики упругих элементов используется как линейная, так и нелинейная теории твердого деформируемого тела.

В качестве примера приведем результаты исследования динамической устойчивости деформируемых элементов вибрационных устройств. Основной частью широкого класса этих устройств является проточный канал, внутри которого расположены деформируемые элементы. Работа таких устройств основана на вибрации деформируемых элементов при протекании внутри каналов жидкости.

2. Динамическая устойчивость деформируемых элементов вибрационного устройства, расположенных последовательно

Рассмотрим плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < H\}$, в котором последовательно расположены два упругих элемента. Скорость невозмущенного однородного потока на входе в канал равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругими элементами являются пластины $J_i = \{(x, y) \in R^2 : y = y_0 \in (0, H), x \in [b_i, c_i]\}$, $i = 1, 2$ (рис. 1).

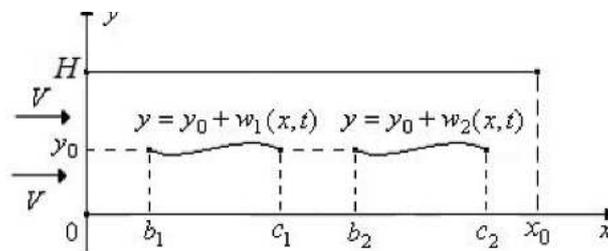


Рис. 1. Канал, внутри которого расположены последовательно деформируемые элементы.

Введем обозначения: $u_i(x, t)$, $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$ – функции, определяющие продольные и поперечные составляющие деформации элементов в направлении осей Ox и Oy соответственно, $\varphi(x, y, t)$ – функция, определяющая потенциал скорости возмущенного потока газожидкостной среды, где $t \geq 0$ – время.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in G \setminus J, \quad J = \bigcup_{i=1}^2 J_i, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}_i(x, t) + Vw'_i(x, t), \quad x \in (b_i, c_i), \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, H, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Аэрогидродинамическое воздействие потока на элементы, согласно интегралу Лагранжа-Коши, определяется выражением

$$P_i(x, t) = \rho(\varphi_t^+(x, y_0, t) - \varphi_t^-(x, y_0, t)) + \rho V(\varphi_x^+(x, y_0, t) - \varphi_x^-(x, y_0, t)), \quad x \in (b_i, c_i), \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка – частные производные по x и t соответственно; ρ – плотность потока; a – скорость звука в невозмущенном потоке газожидкостной среды ($a > V$); $\varphi_t^\pm(x, y_0, t) = \lim_{y \rightarrow y_0 \pm 0} \varphi_t(x, y, t)$; $\varphi_x^\pm(x, y_0, t) = \lim_{y \rightarrow y_0 \pm 0} \varphi_x(x, y, t)$.

Рассмотрим нелинейную модель колебаний упругого тела с учетом продольных и поперечных составляющих деформаций элементов, моделируемых упругими пластинами, с учетом силового воздействия потока $P_i(x, t)$ на них. Тогда математическую постановку задачи (1)–(6) следует дополнить уравнениями

$$\begin{cases} -E_i F_i \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)' + M_i \ddot{u}_i(x, t) = 0, \\ -E_i F_i \left[w_i'(x, t) \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right) \right]' + D_i w_i''''(x, t) + M_i \ddot{w}_i(x, t) + N_i(t) w_i''(x, t) + \\ + \beta_{2i} \dot{w}_i''''(x, t) + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) = P_i(x, t), \quad x \in (b_i, c_i), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $D_i = E_i h_i^3 / (12(1 - \nu_i^2))$ – изгибные жесткости элементов; h_i – толщина элементов; $M_i = h_i \rho_i$ – погонные массы элементов; E_i, ρ_i – модули упругости и линейные плотности элементов; $F_i = h_i / (1 - \nu_i)$; $N_i(t)$ – сжимающие ($N_i > 0$) или растягивающие ($N_i < 0$) элементы силы; β_{2i}, β_{1i} – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_{0i} – коэффициенты жесткости слоя обжатия; ν_i – коэффициенты Пуассона.

Исследована устойчивость в случае шарнирного неподвижного закрепления концов упругих элементов:

$$w_i(b_i, t) = w_i''(b_i, t) = u_i(b_i, t) = w_i(c_i, t) = w_i''(c_i, t) = u_i(c_i, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Получили связанную краевую задачу (1)–(8) для пяти неизвестных функций – деформаций упругих элементов $u_i(x, t), w_i(x, t), i = 1, 2$ и потенциала скорости жидкости (газа) $\varphi(x, y, t)$.

Зададим начальные условия:

$$w_i(x, 0) = f_{1i}(x), \quad \dot{w}_i(x, 0) = f_{2i}(x), \quad u_i(x, 0) = f_{3i}(x), \quad \dot{u}_i(x, 0) = f_{4i}(x), \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\varphi(x, y, 0) = f_5(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = f_6(x, y), \quad (10)$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями.

В монографии [8] доказана лемма.

Лемма 1. Если можно построить функционал $\Phi(t) \equiv \Phi(w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_n, \varphi)$ полиномиального вида, где $w_i(x, t), u_i(x, t), i = 1, 2, \varphi(x, y, t)$ – решение задачи (1)–(10), такой что $\Phi(t) \geq 0, \dot{\Phi}(t) \leq 0$, то функции $w_i(x, t), u_i(x, t), i = 1, 2$ и (или) $\varphi(x, y, t)$ и (или) их производные, входящие в положительно определенный полином в выражении для $\Phi(t)$ или в положительно определенную нижнюю оценку $\Phi_1(t)$ этого функционала $\Phi(t) (\Phi(t) \geq \Phi_1(t) \geq 0)$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (9), (10).

Введем обозначение: λ_{1i} – наименьшие собственные значения [12] краевых задач для уравнения $\psi'''' = -\lambda \psi''$, $x \in (b_i, c_i), i = 1, 2$ с краевыми условиями $\psi(b_i) = \psi''(b_i) = \psi(c_i) = \psi''(c_i) = 0$, соответствующими условиям (8) для функций $w_i(x, t)$.

На основе исследования функционала

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_{G \setminus J} (\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \varphi_x^2(x, y, t) + a^2 \varphi_y^2(x, y, t)) dx dy + \\ & + 2a^2 V \sum_{i=1}^2 \int_{b_i}^{c_i} (\varphi^+(x, y_0, t) - \varphi^-(x, y_0, t)) w_i'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_{b_i}^{c_i} \left(E_i F_i \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)^2 + \right. \\ & \left. + M_i (\dot{u}_i^2(x, t) + \dot{w}_i^2(x, t)) + D_i w_i''^2(x, t) + \beta_{0i} w_i^2(x, t) - N_i(t) w_i'^2(x, t) \right) dx \end{aligned}$$

согласно лемме 1 доказана теорема.

Теорема 1. Пусть для любого момента времени $t > 0$ выполняются условия

$$\dot{N}_i(t) \geq 0, \beta_{2i} \geq 0, \beta_{1i} \geq 0, i = 1, 2,$$

$$\min_{i=1,2} (\lambda_{1i} D_i - N_i(t)) > \frac{V^2 \rho H ((a^2 - V^2) \pi^2 (H - y_0) y_0 + 2a^2 x_0^2)}{2(a^2 - V^2) \pi^2 y_0 (H - y_0)}.$$

Тогда решение $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (1)–(10) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $w_i'(x, t)$, $\dot{w}_i(x, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w_i''(x, t)$, $i = 1, 2$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (9), (10).

3. Динамическая устойчивость деформируемых элементов вибрационного устройства, расположенных параллельно

Рассмотрим плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ с горизонтальными недеформируемыми стенками. Внутри канала имеются два параллельных деформируемых упругих элемента. Скорость невозмущенного сжимаемого однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Рассматривается дозвуковой режим протекания $a > V$, где a – скорость звука в невозмущенном потоке жидкости. Деформируемыми являются пластины при $y = y_1$ и $y = y_2$ при $x \in [b, c]$ (рис. 2). Введем обозначение $J_i = \{(x, y) \in R^2 : y = y_i \in (0, y_0), x \in [b, c]\}$, $i = 1, 2$, $J = J_1 \cup J_2$.

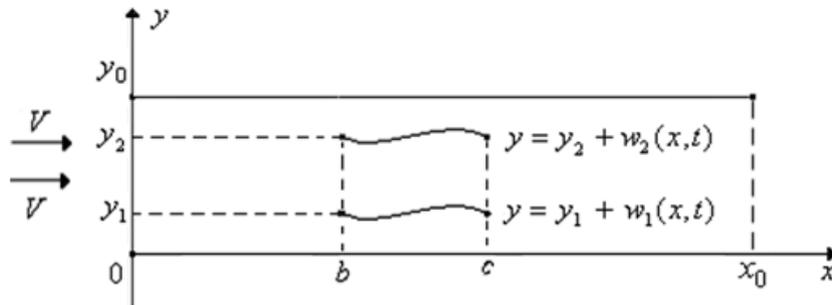


Рис. 2. Канал, внутри которого расположены параллельно деформируемые элементы.

Введем обозначения: $u_i(x, t)$, и $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$ – деформации упругих элементов в направлении осей Ox и Oy соответственно, индекс $i = 1$ соответствует элементу при $y = y_1$, $i = 2$ – при $y = y_2$; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока.

Сформулируем математическую постановку задачи:

$$\varphi_{tt} + 2V \varphi_{xt} + V^2 \varphi_{xx} = a^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in G \setminus J, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (12)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$\varphi_y(x, y_i, t) = \dot{w}_i(x, t) + Vw_i'(x, t), \quad i = 1, 2, \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad (15)$$

$$P_i(x, t) = \rho(\varphi_t^+(x, y_i, t) - \varphi_t^-(x, y_i, t)) + \rho V(\varphi_x^+(x, y_i, t) - \varphi_x^-(x, y_i, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

$$\begin{cases} -E_i F_i \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)' + M_i \ddot{u}_i(x, t) = 0, \\ -E_i F_i \left[w_i'(x, t) \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right) \right]' + D_i w_i''''(x, t) + M_i \ddot{w}_i(x, t) + N_i(t) w_i''(x, t) + \\ + \beta_{2i} \dot{w}_i''''(x, t) + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) = P_i(x, t), \quad x \in (b, c), \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$w_i(b, t) = w_i''(b, t) = u_i(b, t) = w_i(c, t) = w_i''(c, t) = u_i(c, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

Имеем связанную краевую задачу (11)–(18) для пяти неизвестных функций – деформаций упругих элементов стенок канала $u_i(x, t)$, $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$ и потенциала скорости жидкости (газа) $\varphi(x, y, t)$.

На основе исследования функционала:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_{G \setminus J} (\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \varphi_x^2(x, y, t) + a^2 \varphi_y^2(x, y, t)) dx dy + \\ & + 2a^2 V \sum_{i=1}^2 \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, t) - \varphi^-(x, y_i, t)) w_i'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c \left(E_i F_i \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)^2 + \right. \\ & \left. + M (\dot{u}_i^2(x, t) + \dot{w}_i^2(x, t)) + D_i w_i''^2(x, t) + \beta_{0i} w_i^2(x, t) - N_i(t) w_i'^2(x, t) \right) dx \end{aligned}$$

согласно лемме 1 доказана теорема.

Теорема 2. Пусть для любого момента времени $t > 0$ выполняются условия

$$\dot{N}_i(t) \geq 0, \quad \beta_{2i} \geq 0, \quad \beta_{1i} \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} & \frac{y_1 V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2 \right)}{(y_2 - y_1) \left(2K_1(t) (a^2 - V^2) \pi^2 y_1 - V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 y_1^2 + 2a^2 x_0^2 \right) \right)} \in (0, 1); \\ & \frac{(y_0 - y_2) V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2 \right)}{(y_2 - y_1) \left(2K_2(t) (y_0 - y_2) (a^2 - V^2) \pi^2 - V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_0 - y_2)^2 + 2a^2 x_0^2 \right) \right)} \in (0, 1); \\ & + \frac{\frac{y_1}{(2K_1(t) y_1 (a^2 - V^2) \pi^2 - V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 y_1^2 + 2a^2 x_0^2 \right))} +}{(y_0 - y_2)} < \\ & < \frac{(y_2 - y_1)}{V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2 \right)}, \end{aligned}$$

где $K_i(t) = \lambda_{1i} D_i - N_i(t)$. Тогда решение $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (11)–(18), (9), (10) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $w_i'(x, t)$, $\dot{w}_i(x, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w_i''(x, t)$, $i = 1, 2$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (9), (10).

Литература

1. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. 3. 1. С. 350–354.
2. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // Journal of sound and vibration. 2013. 332. 12. P. 3064–3085. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
3. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // Procedia Engineering. 2011. 14. P. 2986–2993. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>
4. Gatica G.N., Heuer N., Meddahi S. Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D // Numer. Methods Partial Differ. Equations. 2014. 30. 4. P. 1211–1233. <https://doi.org/10.1002/num.21866>
5. Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M.P. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. 2017. 139(3). P. 1–8. <https://doi.org/10.1115/1.4034405>
6. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // Journal of Fluids and Structures. 2016. 63. P. 120–139. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002>
7. Ankilov A.V., Vel'misov P.A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem // Journal of Mathematical Sciences, 2016. 219, 1. P. 14–26. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3079-4>
8. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. Ульяновск, УлГТУ, 2015. 146 с.
9. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск, УлГТУ, 2013. 322 с.
10. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск, УлГТУ, 2009. 220 с.
11. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконеко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления». Ульяновск, УлГТУ, 2008. 188 с.
12. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., Наука, 1968. 503 с.

MSC 74F10

Dynamic stability of deformable elements of aeroelastic structures

P.A. Velmisov, A.V. Ankilov, Yu.V. Pokladova

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The stability of solutions of initial-boundary value problems for integro-differential partial differential equations describing the dynamics of deformable elements of various structures interacting with a gas-liquid medium (streamlined by a fluid or gas flow) is investigated in this paper. The definitions of the stability of a deformable (viscoelastic, elastic) body adopted in the paper correspond to the concept of stability of dynamical systems by Lyapunov. The stability of the elements of aircraft, pipeline systems, vibrating devices under different ways of fixing elements under subsonic or supersonic flow around a compressible or incompressible medium is studied. The effect of gas or liquid (in the model of an ideal medium) is determined from the asymptotic linear equations of aerohydrodynamics. To describe the dynamics of elastic elements, both linear and nonlinear theories of a solid deformed body are used.

Keywords: aerohydroelasticity, mathematical modeling, dynamic stability, elastic plate, subsonic flow of gas, the differential equations in partial derivatives, functional.

References

1. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Hristoforova A.V. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki vzaimodeystviya sil'novyazkoy zhidkosti so stenkami kanala, ustanovlennogo na uprugom osnovanii // *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin*. 2016. 3. 1. P. 350–354. (in Russian)
2. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // *Journal of sound and vibration*. 2013. 332. 12. P. 3064–3085. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
3. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // *Procedia Engineering*. 2011. 14. P. 2986–2993. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>
4. Gatica G.N., Heuer N., Meddahi S. Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D // *Numer. Methods Partial Differ. Equations*. 2014. 30. 4. P. 1211–1233. <https://doi.org/10.1002/num.21866>
5. Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M.P. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions // *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*. 2017. 139(3). P. 1–8. <https://doi.org/10.1115/1.4034405>
6. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // *Journal of Fluids and Structures*. 2016. 63. P. 120–139. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002>
7. Ankilov A.V., Vel'misov P.A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem // *Journal of Mathematical Sciences*, 2016. 219, 1. P. 14–26. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3079-4>

8. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti aerouprugikh konstruksiy. Ul'yanovsk, UIGTU, 2015. 146 p. (in Russian)
9. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti deformiruemykh elementov konstruksiy pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii. Ul'yanovsk, UIGTU, 2013. 322 p. (in Russian)
10. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Dinamika i ustoychivost' uprugikh plastin pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii. Ul'yanovsk: UIGTU, 2009. 220 p. (in Russian)
11. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Gorbokonenko V.D., Pokladova Yu.V. Matematicheskoe modelirovanie mehanicheskoi systemy «truboprovod – datchik davleniya». Ul'yanovsk: UIGTU, 2008. 188 p. (in Russian)
12. Kollatz L. Zadachi na sobstvennyye znacheniya. M., Nauka. 1968. 503 p. (in Russian)

УДК 539.3:533.6:517.9

Об управлении динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании*

А.В. Гладун¹, П.А. Вельмисов²

Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации
Б.П. Бугаева¹, Ульяновский государственный технический университет²

Аннотация: Рассмотрена задача построения стабилизирующего управления в случае неустойчивости деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании. Исходное уравнение, описывающее динамику элемента, с помощью метода Галеркина приводится к системе линейных уравнений, для которой строится управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения. Приведены результаты численного моделирования поведения функции прогиба элемента конструкции при заданных параметрах под действием построенного управления.

Ключевые слова: деформируемый элемент, сверхзвуковое обтекание, динамика, управляемость, стабилизация, уравнения с частными производными, метод Галеркина.

1. Введение

При проектировании конструкций, обтекаемых потоком газа или жидкости, важное значение имеет устойчивость деформируемых элементов. Воздействие потока на составные части конструкций может приводить к возникновению неустойчивых колебаний и, тем самым, к их разрушению или нарушению требуемых функциональных свойств. В работах [1], [2] были получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости упругого элемента конструкции при обтекании его сверхзвуковым потоком газа. Чтобы не допустить разрушения конструкции в случае неустойчивых колебаний, можно рассмотреть задачу о погашении колебаний с помощью некоторого управляющего воздействия. Таким образом можно предотвратить разрушение конструкции, обеспечить надежность ее эксплуатации и поддержание требуемых функциональных свойств.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача управления динамикой упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при одностороннем обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа в случае ее шарнирного закрепления на обоих концах. Динамика упругого элемента в сверхзвуковом потоке газа описывается дифференциальным уравнением с частными производными

$$m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' - \beta\ddot{w}'' + \gamma(\dot{w} + Vw') + u(t) = 0, \quad (1)$$

где $w(x, t)$ – прогиб пластины; x – продольная координата, $x \in [0, l]$, l – длина пластины; t – время; $u(t)$ – некоторое управляющее воздействие; V – скорость потока; m, D, N, α, β – некоторые постоянные; $\gamma = \alpha_0\rho_0a_0$, ρ_0 – плотность потока, a_0 – скорость звука в однородном потоке; штрих обозначает производную по координате x , точка – производную по времени t . Постоянная $\alpha_0 = 1$ для одностороннего и $\alpha_0 = 2$ для двустороннего обтекания пластины.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

Введем безразмерные координату \bar{x} , время \bar{t} и функцию прогиба \bar{w} :

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{V}{l} t, \quad \bar{w} = \frac{w}{l}. \quad (2)$$

Делая замену переменных (2) в уравнении (1) и оставляя за безразмерными переменными такие же обозначения, какие были у исходных переменных, получаем

$$\frac{mV}{K} \ddot{w} + \frac{D}{KVL^2} w'''' + \frac{N}{KV} w'' + \frac{\alpha}{Kl^3} \dot{w}'''' - \frac{\beta V}{Kl^2} \ddot{w}'' + \dot{w} + w' + u(t) = 0, \quad (3)$$

где $K = \gamma V$, $x \in [0, 1]$.

Рассмотрим задачу построения управления $u(t)$, обеспечивающего гашение возникающих колебаний пластины в случае, когда значениям исходных параметров уравнения соответствует состояние динамической неустойчивости [3].

Задача. Найти для случая динамической неустойчивости уравнения (3) непрерывное (далее допустимое) управление $u(t)$, такое, что соответствующее ему нулевое решение уравнения $w(x, t) = 0$ будет асимптотически устойчивым.

В начальный момент времени $t = 0$ деформация и скорость точек пластины задаются равенствами:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \sqrt{2} c_1 \sin(\pi x) + \sqrt{2} c_2 \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \\ \dot{w}(x, 0) &= \sqrt{2} c_3 \sin(\pi x) + \sqrt{2} c_4 \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые заданные постоянные.

3. Построение решений

Для построения решений уравнения (3) методом Галеркина будем задавать функцию $w(x, t)$ в виде [4]

$$w_M(x, t) = \sum_{k=1}^M v_k(t) g_k(x),$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0, 1]$ система нормированных базисных функций, соответствующих случаю шарнирного закрепления концов пластины

$$w(0, t) = w(1, t) = w''(0, t) = w''(1, t) = 0.$$

Выберем $g_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ и ограничимся случаем $M = 2$, тогда функция $w(x, t)$ запишется следующим образом:

$$w(x, t) = \sqrt{2} v_1(t) \sin(\pi x) + \sqrt{2} v_2(t) \sin(2\pi x). \quad (5)$$

В результате применения процедуры метода Галеркина получаем систему из двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{V\pi^2\beta}{Kl^2} + \frac{Vm}{K} \right) \ddot{v}_1(t) + \left(\frac{\pi^4\alpha}{Kl^3} + 1 \right) \dot{v}_1(t) + \left(\frac{\pi^4 R}{KVL^2} - \frac{\pi^2 N}{KV} \right) v_1(t) - \\ - \frac{8}{3} v_2(t) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} u(t) = 0, \\ \left(\frac{4V\pi^2\beta}{Kl^2} + \frac{Vm}{K} \right) \ddot{v}_2(t) + \left(\frac{16\pi^4\alpha}{Kl^3} + 1 \right) \dot{v}_2(t) + \left(\frac{16\pi^4 R}{KVL^2} - \frac{4\pi^2 N}{KV} \right) v_2(t) + \\ + \frac{8}{3} v_1(t) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия (4) при этом принимают вид:

$$v_1(0) = c_1, v_2(0) = c_2, \dot{v}_1(0) = c_3, \dot{v}_2(0) = c_4. \quad (7)$$

Система уравнений (6) с начальными условиями (7) представляет собой задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами и может быть решена методом Лапласа. Метод позволяет найти функции $v_1(t)$, $v_2(t)$ и затем явно записать функцию прогиба пластины $w(x, t)$, что значительно облегчает проверку точности решения. Вычисляя производные от функции $w(x, t)$ и подставляя их в уравнение (3), получаем невязку $E(x, t)$, по величине которой оцениваем погрешность найденного решения.

4. Исследование управляемости

Для изучения управляемости системы (6) приведем ее к нормальному виду и воспользуемся достаточным условием управляемости линейных систем. Введем новые переменные

$$y_1 = v_1(t), \quad y_2 = v_2(t), \quad y_3 = \dot{v}_1(t), \quad y_4 = \dot{v}_2(t),$$

и перепишем систему (6) в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3, \\ \dot{y}_2 &= y_4, \\ \dot{y}_3 &= \frac{Kl^2}{V(\pi^2\beta + ml^2)} \left(\frac{\pi^2(Nl^2 - \pi^2R)}{KVl^2} y_1 + \frac{8}{3} y_2 - \left(\frac{\pi^4\alpha}{Kl^3} + 1 \right) y_3 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} u(t) \right), \\ \dot{y}_4 &= \frac{Kl^2}{V(4\pi^2\beta + ml^2)} \left(-\frac{8}{3} y_1 + \frac{4\pi^2(Nl^2 - 4\pi^2R)}{KVl^2} y_2 - \left(\frac{16\pi^4\alpha}{Kl^3} + 1 \right) y_4 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}u \quad (9)$$

система (8), записанная в матричном виде, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^*$, * – знак транспонирования,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi^2(Nl^2 - \pi^2R)}{V^2(\pi^2\beta + ml^2)} & \frac{8}{3} \frac{Kl^2}{V(\pi^2\beta + ml^2)} & -\frac{\pi^4\alpha + Kl^3}{Vl(\pi^2\beta + ml^2)} & 0 \\ \frac{(-8)Kl^2}{3V(4\pi^2\beta + ml^2)} & \frac{4\pi^2(Nl^2 - 4\pi^2R)}{V^2(4\pi^2\beta + ml^2)} & 0 & -\frac{16\pi^4\alpha + Kl^3}{Vl(4\pi^2\beta + ml^2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(-2)\sqrt{2}Kl^2}{\pi V(\pi^2\beta + ml^2)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как при $l \neq 0$

$$\det\{b, Ab, A^2b, A^3b\} = \frac{(-4096) K^6 l^{12}}{9\pi^4 V^6 (\pi^2\beta + l^2m)^4 (4\pi^2\beta + l^2m)^2} \neq 0,$$

то $\text{rank}\{b, Ab, A^2b, A^3b\} = 4$ при $l \neq 0$ и линейная система (9) управляема, что также означает для линейной системы возможность построения стабилизирующего управления.

Будем в дальнейшем полагать, что постоянные в системах уравнений (6), (8), (9) заданы следующим образом

$$V = 400\text{м/с}, l = 20\text{м}, m = 117.75\text{кг}, \gamma = 420.175, R = 64086.91, N = 1000, \alpha = 0.2, \beta = 0.1.$$

При заданных значениях параметров и $u(t) = 0$ среди характеристических чисел матрицы A имеются характеристические числа с положительной действительной частью: $\lambda_{1,2} = 0.39965 \pm 0.4865722i$, следовательно решения линейной системы (9) неустойчивые. Это влечет за собой, после подстановки найденных функций $v_1(t) = y_1$, $v_2(t) = y_2$ в равенство (5) для прогиба пластины, динамическую неустойчивость уравнения (3).

5. Стабилизация нулевого прогиба пластины

Рассмотрим систему линейных уравнений (9). Будем искать управление $u(t)$ в виде сложной функции $u(\mathbf{y}(t))$, зависящей от переменных y_1, y_2, y_3, y_4 , которые в свою очередь зависят от безразмерного времени t . Тогда линейная система уравнений (9) после подстановки управления $u(\mathbf{y}) = \mathbf{e}^* \mathbf{y}$ примет вид:

$$\dot{\mathbf{y}} = (A + b\mathbf{e}^*) \mathbf{y}, \quad (10)$$

где $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)^*$ – некоторый постоянный вектор. Используя подходящий вектор \mathbf{e} , можно изменить значения характеристических чисел матрицы системы. Если в результате подстановки управления $u(\mathbf{y})$ действительные части всех характеристических чисел матрицы $(A + b\mathbf{e}^*)$ станут отрицательными, то решения линейной системы (9) будут асимптотически устойчивые, что приведет к асимптотической устойчивости нулевого решения $w(x, t) = 0$ уравнения (3).

Таким образом, задачу стабилизации нулевого прогиба пластины $w(x, t) = 0$ для полученной после преобразования Галеркина системы (9) можно переформулировать следующим образом.

Задача*. Найти для системы (9) допустимое управление $u(\mathbf{y})$, такое, что соответствующее ему решение системы $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$ будет асимптотически устойчивым.

В системе уравнений (9) сделаем замену переменных:

$$\mathbf{z} = T\mathbf{y}, \text{ где } T = \{b, Ab, A^2b, A^3b\}, \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^*.$$

Получаем:

$$\dot{\mathbf{z}} = P\mathbf{z} + d u,$$

где $P = T^{-1}AT$, $d = T^{-1}b$, $d = (1, 0, 0, 0, 0)^*$. Или более подробно:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.2263482168 \\ 1 & 0 & 0 & -0.002045010222 \\ 0 & 1 & 0 & -0.04329204038 \\ 0 & 0 & 1 & -0.3568187049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (11)$$

Стабилизирующее управление для системы (9) будем строить [5] по формуле $u(\mathbf{y}) = \mathbf{e}^* \mathbf{y}$,

$$\mathbf{e} = T^{(-1)*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_4 & p_3 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{h}), \quad (12)$$

где $\mathbf{p} = (-0.3568187049, -0.04329204038, -0.002045010222, -0.2263482168)^*$ – последний столбец матрицы P в системе (11), а \mathbf{h} – вектор коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^4 + h_1\lambda^3 + h_2\lambda^2 + h_3\lambda + h_4 = 0$$

для системы (10).

Для асимптотической устойчивости возьмем в качестве корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0i$, $\lambda_{3,4} = -0.5 \pm 0i$, тогда вектор $\mathbf{h} = (2, 1.5, 0.5, 0.0625)^*$. Вычисляя по формуле (12) получим стабилизирующее управление:

$$u(\mathbf{y}) = 7.243735419 y_1 + 2.313986880 y_2 + 10.22963563 y_3 - 3.559850802 y_4.$$

Возвращаясь к функциям $v_1(t)$, $v_2(t)$ имеем:

$$u(t) = 7.243735419 v_1(t) + 2.313986880 v_2(t) + 10.22963563 \dot{v}_1(t) - 3.559850802 \dot{v}_2(t). \quad (13)$$

Подставляя найденное управление (13) в систему (6) и решая ее методом Лапласа, находим функции $v_1(t)$, $v_2(t)$. Затем из равенств (5) и (13) получаем прогиб пластины $w(x, t)$ и управляющее воздействие $u(t)$.

На рис. 1 – рис. 3. приведены результаты численного моделирования применения построенного управления

$$u(t) = e^{-0.498159t} 10^7 \left(1.051384 \cos(0.001848t) - 1.0399297 \sin(0.001848t) \right) - e^{-0.501841t} 10^7 \left(1.051384 \cos(0.0018336t) + 1.063017 \sin(0.0018336t) \right),$$

для случая, когда в начальный момент времени $t = 0$ деформация и скорость точек пластины задаются равенствами (4) с константами

$$c_1 = 0.2, c_2 = -0.1, c_3 = 0.15, c_4 = 0.1.$$

На рис. 1 и рис. 2 изображены графики функции $w(x, t)$ при $x = l/2 = 10\text{м}$ и при $x = l/5 = 4\text{м}$ соответственно.

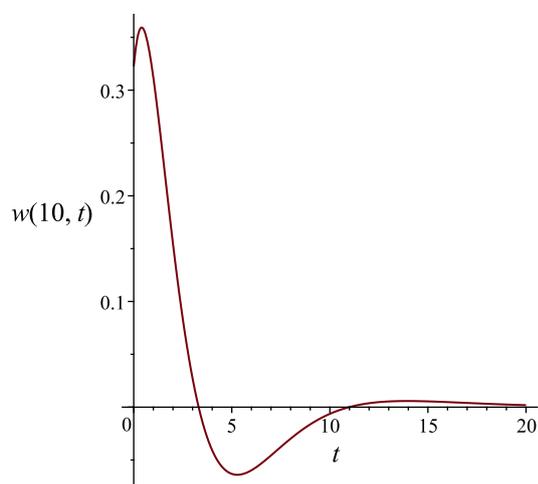


Рис. 1. Колебание точки $x = 10$.

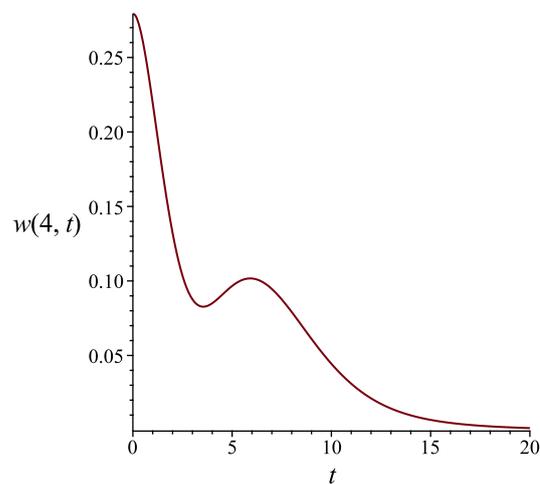
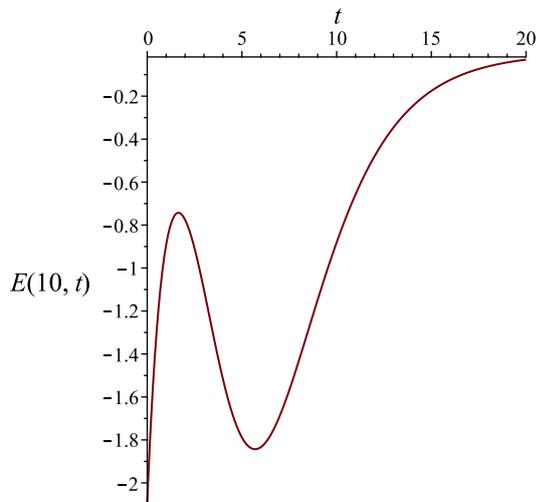
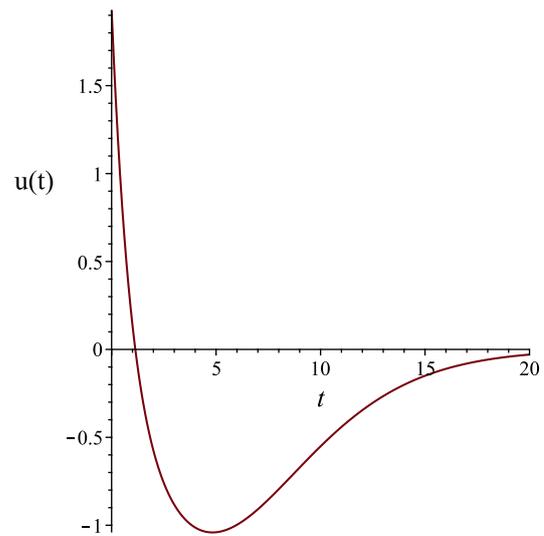


Рис. 2. Колебание точки $x = 4$.

На рис. 3 изображена невязка $E(x, t)$ при $x = 10$, которая получена путем подстановки найденной функции $w(x, t)$ в уравнение (3). График управляющего воздействия $u(t)$ представлен на рис. 4.

Таким образом, в статье показана возможность управления динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании. Предложенная методика построения стабилизирующего управления может быть использована и для других модельных уравнений, описывающих динамику деформируемого элемента. В случае нелинейной модели поиск стабилизирующего управления может быть выполнен по линейному приближению [6] при определенных условиях на нелинейные слагаемые из модельного уравнения.

Рис. 3. Погрешность для $x = 10$.Рис. 4. Управление $u(t)$.

Литература

1. Анкилов А. В, Вельмисов П. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. №3(57). Выпуск 1. С. 59–67.
2. Анкилов А. В, Вельмисов П. А, Судаков В. А. Об устойчивости решений начально-краевой задачи о динамике защитного экрана при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2013. №3(63). С. 45–52.
3. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода в случае его динамической неустойчивости // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции. (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). - Саранск: СВМО, 2017. - С. 381-390. Режим доступа: <http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper54.pdf>.
4. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 4. С. 89-97.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. – 476 с.
6. Гладун А. В. Управление и стабилизация вращательного движения спутника с помощью двух гиродинов // Механика твердого тела. 2013. № 43. С. 151–162.

MSC 74F10

On control of dynamics of a deformable structural element in supersonic flow

A.V. Gladun¹, P.A. Velmisov²

Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev¹,
Ulyanovsk State Technical University²

Abstract: The problem of constructing a stabilizing control in the case of instability of a deformable structural element in supersonic flow is considered. The initial equation, describing the dynamics of the element, is reduced to a system of linear equations with the help of the Galerkin method. The control law that provide asymptotic stability of zero solution for the obtained system is constructed. The results of numerical simulation of the behavior of the deformable structural element under the action of the constructed control with given parameters are presented.

Keywords: deformable element, supersonic flow, dynamics, controllability, stabilization, partial differential equations, Galerkin method.

References

1. Ankilov A. V, Velmisov P. A. Issledovanie dinamiki i ustojchivosti uprugogo ehlementa konstrukcii pri sverhzhukovom obtekanii [Investigation of dynamic and stability of elastic element of construction in supersonic flow] // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Vestnik Saratov State Technical University]. Saratov: SSTU, 2011. No 3(57). Issue 1. pp. 59–67.
2. Ankilov A. V, Velmisov P. A., Sudakov V. A. Ob ustojchivosti resheniy nachalno-kraevoy zadachi o dinamike zashchitnogo ehkrana pri vzaimodejstvii so sverhzhukovym potokom gaza [On the solution stability of initial value problem concerning evolution of a protective shield interacting with supersonic gas flow] // Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of the Ulyanovsk State Technical University]. Ulyanovsk: 2013. No. 3(63). pp. 45–52.
3. Velmisov P. A., Gladun A. V. Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda v sluchae ego dinamicheskoy neustojchivosti [On control of dynamic of a pipeline in the case of its dynamic instability] // Differencialnye uravneniya i ih prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferencii [Proceedings of the XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modelling"]. (Saransk, July 12-16, 2017). Saransk: Middle-Volga Mathematical Society, 2017. - pp. 381-390. Access mode: <http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper54.pdf>.
4. Velmisov P. A., Gladun A. V. Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda [About control of pipeline dynamics] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga Mathematical Society Journal]. 2016. Vol. 18. No. 4. pp. 89-97.
5. Krasovsky N. N. Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineynye sistemy [Theory of Motion Control. Linear Systems]. Moscow: Nauka, 1968. – 476 p.
6. Gladun A. V. Upravlenie i stabilizaciya vrashchatelnogo dvizheniya sputnika s pomoshchyu dvuh girodinov [Control and stabilization of the rotational motion of a satellite by means

of two gyrodins] // Механика твёрдого тела [Rigid body mechanics]. Donetsk: 2013. No 43. pp. 151–162.

УДК 517.958:51-72

Модель диффузии лекарственного вещества с учетом его связывания в органической пленке *

А.О. Сыромясов¹, А.С. Шуршина², Д.В. Галкин¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева¹, Башкирский государственный университет²

Аннотация: В статье изучается диффузия лекарственного вещества из одномерной хитозановой пленки. В отличие от более ранних моделей, развиваемый подход учитывает, что часть вещества удерживается внутри матрицы химическими связями, а свойства самой матрицы зависят от концентрации связанного вещества. Кроме того, учтено изменение свойств пленки вследствие ее набухания. Простота предлагаемых моделей связывания вещества и набухания пленки позволяет получить решение прямой задачи о диффузии в аналитическом виде. Указанный результат в дальнейшем может быть использован при решении обратной задачи диффузии – определении характеристик пленки по опытным данным.

Ключевые слова: математическое моделирование в химии, прямая задача диффузии, метод разделения переменных, хитозановая пленка, химически связанное вещество.

1. Введение

Разработка аппликационных лекарственных форм с контролируемым временем жизни и скоростью отдачи лекарственного вещества (ЛВ) – актуальная проблема современной медицины. Эти пленки могут производиться из органических полимеров, таких, как хитозан [1]; при изготовлении в пленку помещается некоторое количество лекарственного вещества, которое постепенно выделяется из нее.

Основным механизмом выделения вещества из подобных лекарственных форм является диффузия [2]. Известен ряд математических описаний этого процесса; простейшим из них служит модель Хигучи, в которой предполагается, что коэффициент диффузии вещества из матрицы постоянен [3]. Известны и более сложные модели [4, 5]. Однако и эти, и иные подходы не дают полной картины процесса диффузии ЛВ из пленки: они либо являются феноменологическими и описывают лишь внешнюю картину явления, либо основаны на простейших предположениях, которые могут существенно расходиться с практикой.

В настоящей работе предлагается математическая модель выделения ЛВ из полимерной пленки на основе хитозана, помещенной в воду. Эта модель учитывает следующие обстоятельства, играющие важную роль в процессе диффузии:

- Частичное связывание ЛВ внутри матрицы и зависимость свойств матрицы от концентрации связанного ЛВ.
- Набухание и возможное растворение пленки в воде, что приводит к необходимости изучать явную зависимость ее свойств от времени.

В статье получено аналитическое выражение для зависимости концентрации ЛВ в матрице от времени и пространственной координаты.

* Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-31-00119 мол_а).

2. Постановка прямой задачи диффузии частично связанного вещества

С достаточной точностью пленку можно считать одномерной, поскольку ее высота и ширина в обсуждаемой серии экспериментов [1] в 50 раз превосходят толщину. В простейшем случае эффект перехода от одномерного описания к трехмерному анализировался в [6]. В этой статье было показано, что учет выделения ЛВ через торцы пленки ведет к изменению скорости диффузии в среднем всего на 5%, поэтому в первом приближении данным эффектом для простоты можно пренебречь. Итак, пусть матрица имеет толщину $2l$ и занимает область $-l \leq x \leq l$.

Искомой величиной в прямой задаче служит концентрация лекарственного вещества c , которая зависит от времени t и от координаты x .

Предполагается, что часть молекул лекарственного вещества связана с матрицей, а часть находится в свободном состоянии. Их концентрации обозначим через b и f , соответственно. Сумма этих величин и равна общей концентрации ЛВ:

$$c = b + f. \quad (1)$$

В начальный момент времени в пленке имеются как свободные, так и связанные молекулы вещества. Суммарная начальная концентрация ЛВ c_0 известна (она задается при изготовлении лекарственной формы):

$$b_0 + f_0 = c_0.$$

С течением времени концентрация связанного вещества падает за счет отрыва его молекул от матрицы и перехода их в свободное состояние. Опыты показывают, что часть вещества остается в пленке: при большой длительности эксперимента наблюдаемая средняя концентрация вещества внутри нее перестает изменяться:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b = b_\infty. \quad (2)$$

Возможным объяснением этого феномена служит то, что в силу слабости химических связей пленка не может удерживать слишком большое количество молекул ЛВ, так что они отделяются от матрицы, пока концентрация ЛВ не упадет до "приемлемой" величины.

Будем считать, что молекулы связанного вещества распределены по толщине матрицы равномерно, так что b не зависит от x . Кроме того, далее предполагается, что скорость отрыва связанных молекул пропорциональна концентрации той части связанного ЛВ, которое слабо удерживается матрицей:

$$\frac{db}{dt} = -\beta(b - b_\infty), \quad \beta = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Выделение свободного вещества в окружающую среду происходит только через поверхность пленки, поэтому необходимо учитывать зависимость его концентрации и от времени, и от координаты. Динамика изменения величины f описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{db}{dt}, \quad (4)$$

где D – коэффициент диффузии; дополнительные гипотезы относительно него излагаются в следующем разделе. Данное соотношение учитывает как диффузию свободного ЛВ (первое слагаемое в правой части), так и переход связанного ЛВ в свободное состояние (второе слагаемое). Знак "–" перед производной b по времени показывает, что когда b падает (молекулы отрываются от пленки), f растет.

Начальные условия для уравнений (3) и (4) задаются равенствами

$$b(0) = b_0; \quad f(0, x) = f_0, \quad -l < x < l, \quad (5)$$

где b_0 и f_0 уже были упомянуты ранее.

Концентрация ЛВ в окружающей среде (например, в воде, куда в опытах помещается пленка) считается равной нулю. На этом основании в качестве граничных для уравнения (4) выбраны условия первого рода:

$$f(t, \pm l) = 0, \quad t > 0. \quad (6)$$

Итак, требуется решить уравнения (3) и (4) с начальными условиями (5) и граничными условиями (6). Тогда будет найдена и искомая величина (1).

3. Гипотезы относительно свойств пленки

Как уже было отмечено, характеристикой матрицы, непосредственно влияющей на процесс выделения лекарственного вещества, является коэффициент диффузии D . На его значение влияют два фактора. Во-первых, с течением времени пленка может набухать, а значит, D увеличивается с ростом t . Во-вторых, на свойства пленки влияют связанные с ней молекулы ЛВ, причем при их высвобождении (уменьшении b) коэффициент диффузии также должен расти.

Чтобы разделить эти два эффекта, представим D в виде произведения

$$D(t, b) = D_T(t)D_B(b) \quad (7)$$

и предварительно обозначим

$$D_T(0) = D_0. \quad (8)$$

Далее опишем каждую из функций D_T и D_B в отдельности.

Поведение D_T критически зависит от того, подвергалась ли пленка предварительной термообработке (отжигу). Если такой обработки не было, то за некоторое время t_0 матрица растворится, а коэффициент диффузии примет бесконечное значение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} D_T(t) = \infty. \quad (9)$$

Простейшая возрастающая функция, удовлетворяющая (8) и (9), имеет вид

$$D_T(t) = \frac{D_0}{1 - t/t_0}.$$

Если предварительная термообработка имела место, то пленка не растворяется, но набухает, а коэффициент диффузии увеличивается до некоторого предельного значения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_T(t) = D_\infty > D_0. \quad (10)$$

Наиболее простой функцией, для которой выполнены условие возрастания, а также соотношения (8) и (10), является

$$D_T(t) = D_\infty + (D_0 - D_\infty)e^{-t/t_0},$$

где в данном случае t_0 – некоторое время релаксации.

Функция $D_B(b)$ есть поправочный множитель, учитывающий наличие связанного ЛВ. Если в матрице остались лишь те молекулы лекарства, которые не могут ее покинуть, то поправка не должна играть роли, а значит, $D_B(b_\infty) = 1$. При $b > b_\infty$ величина D_B должна

быть меньше 1, однако она не может падать до нуля. Простейшей функцией, убывающей по b и удовлетворяющей перечисленным требованиям, является

$$D_B(b) = \frac{1}{1 + \alpha(b - b_\infty)}, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Разумеется, предположения о виде функций D_T и D_B не являются единственно возможными. Они представляют собой гипотезы, которые впоследствии должны быть подтверждены или опровергнуты с помощью экспериментов.

4. Решение прямой задачи диффузии методом разделения переменных

Из (2), (3), (5) легко получить, что

$$b(t) = b_\infty + (b_0 - b_\infty)e^{-\beta t}. \quad (11)$$

Подстановка этого результата в (7) показывает, что коэффициент диффузии не зависит от координаты x . Следовательно, неизвестная функция $f(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D(t, b(t)) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{db}{dt} \quad (12)$$

с начальными данными (5) и граничными условиями (6). Решение этой начально-краевой задачи методом разделения переменных следует хорошо известной процедуре, описанной, например, в [7].

Решениями соответствующей задачи Штурма – Лиувилля служат функции

$$X_n(x) = \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (13)$$

Разложим f и db/dt в ряд по системе $\{X_n\}$:

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad \frac{db}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X_n(x),$$

где

$$u_n = \frac{2 \cdot (-1)^n}{\lambda_n l}.$$

Подставив эти выражения в (12), получим

$$\frac{dT_n}{dt} + \lambda_n^2 D(t, b(t)) T_n = -u_n \frac{db}{dt}.$$

Отсюда, а также из (5) вытекает, что

$$T_n(t) = u_n e^{-\lambda_n^2 I_D(t)} \left[f_0 - \int_0^t \frac{db(s)}{ds} e^{\lambda_n^2 I_D(s)} ds \right]. \quad (14)$$

Здесь введено обозначение

$$I_D(s) = \int_0^s D(q, b(q)) dq.$$

Окончательно, концентрация ЛВ в произвольной точке пленки и в произвольный момент времени задается выражением (1), в котором b вычисляется согласно (11), а f представляется в виде ряда

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

В свою очередь, функции, фигурирующие в последней формуле, определяются равенствами (13) и (14). Указанное решение справедливо вне зависимости от того, подвергалась ли пленка термообработке и, соответственно, от того, какой вид имеет зависимость $D(t, b(t))$.

5. Заключение

Итак, в работе предложена подробная математическая модель выделения лекарственного вещества из полимерной пленки. Она включает в себя уравнение в частных производных, описывающее диффузию "свободного" вещества, обыкновенное дифференциальное уравнение, задающее динамику концентрации связанного в матрице ЛВ, а также гипотезы о поведении коэффициента диффузии.

Указанные уравнения удалось решить аналитически. Далее этот результат может быть использован для вычисления средней концентрации вещества в матрице, а также для решения обратной задачи – определения параметров пленки (таких, как α , β , D_0 и т.д.) по результатам измерений средней концентрации ЛВ в различные моменты времени. В связи со сложностью полученных выражений, включающих в себя суммы бесконечного числа слагаемых, при решении перечисленных задач предполагается использовать параллельные вычисления.

Литература

1. Кулиш, Е. И. Особенности транспортных свойств лекарственных хитозановых пленок / Е. И. Кулиш, А. С. Шуршина, С. В. Колесов // Высокомолекулярные соединения. Серия А. – 2014. – Т. 56, N 3. – С. 282–288.
2. Shah, S. S. Polyglycolic acid-co-d(-lactic acid): diffusion or degradation controlled drug delivery / S. S. Shah, Y. Cha, C. G. Pitt // J. Control. Release. — 1992. — V. 18. — P. 261–270.
3. Higuchi, T. Mechanism of sustained action medication theoretical analysis of rate of release of solid drugs dispersed in solid matrices / T. Higuchi // J. Pharm. Sci. — 1963. — Vol. 52. — P. 1145–1149.
4. Ritger, P. L. A simple equation for description of solute release. I. Fickian and Non-Fickian release from non-swallowable devices in the form of slabs, spheres, cylinders or discs / P. L. Ritger, N. A. Peppas // J. Control. Release. — 1987. — V. 5. — P. 23–26.
5. Ritger, P. L. A simple equation for description of solute release. II. Fickian and anomalous release from swellable devices / P. L. Ritger, N. A. Peppas // J. Control. Release. — 1987. — V. 5. — P. 37–42.
6. Сыромясов, А. О. Расчет коэффициента диффузии лекарственного вещества из трехмерной пленки хитозана / А. О. Сыромясов, А. С. Шуршина // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, N 4. – С. 98–106.
7. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский; изд. 4, стер. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1972. – 736 с.

MSC 35K20, 35Q92, 92C45, 92C50

Model of diffusion of medicine that is bonded inside an organic film

A.O. Syromyasov¹, A.S. Shurshina², D.V. Galkin¹

National Research Ogarev Mordovia State University¹, Bashkir State University²

Abstract: The paper deals with diffusion of medicine out of one-dimensional chitosan film. In contrast with earlier models, the proposed method takes into account the facts that part of the medicine is kept inside organic matrix by chemical bonds and that the matrix properties depend on the concentration of bonded matter. Besides that, change in film's properties due to its swelling is considered. Simplicity of proposed models of medicine bonding and of matrix swelling makes it possible to solve the direct problem of diffusion analytically. This analytical result later may be used in solution of inverse diffusion problem, i.e. determination of film characteristics basing on experimental data.

Keywords: mathematical modeling in chemistry, direct problem of diffusion, variable separation method, chitosan film, chemically bonded matter.

References

1. Kulish, E. I. Specific transport properties of medicinal chitosan films / E. I. Kulish, A. S. Shurshina, S. V. Kolesov // Polymer Science Series A. – 2014. – V. 56, N 3. – P. 289–295.
2. Shah, S. S. Polyglycolic acid-co-d(-lactic acid): diffusion or degradation controlled drug delivery / S. S. Shah, Y. Cha, C. G. Pitt // J. Control. Release. — 1992. — V. 18. — P. 261–270.
3. Higuchi, T. Mechanism of sustained action medication theoretical analysis of rate of release of solid drugs dispersed in solid matrices / T. Higuchi // J. Pharm. Sci. — 1963. — Vol. 52. — P. 1145–1149.
4. Ritger, P. L. A simple equation for description of solute release. I. Fickian and Non-Fickian release from non-swelling devices in the form of slabs, spheres, cylinders or discs / P. L. Ritger, N. A. Peppas // J. Control. Release. — 1987. — V. 5. — P. 23–26.
5. Ritger, P. L. A simple equation for description of solute release. II. Fickian and anomalous release from swelling devices / P. L. Ritger, N. A. Peppas // J. Control. Release. — 1987. — V. 5. — P. 37–42.
6. Syromyasov, A. O. Rasschet koefficienta diffuzii lekarstvennogo veshchestva iz trehmernoj hitozanovoi plenki [Calculation of medicine diffusion coefficient out of three-dimensional chitosan film] / A. O. Syromyasov, A. S. Shurshina // Zhurnal Srenevolskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle-Volga mathematical society]. – 2016. – T. 18, N 4. – C. 98–106.
7. Tikhonov, A. N. Tikhonov. Equations of Mathematical Physics / A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii. – Dover Publications, 2011. – 800 p.

Научное электронное издание

VIII Международная научная молодежная
школа-семинар «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»
имени Е.В. Воскресенского

МАТЕРИАЛЫ ДОКЛАДОВ

Саранск
16 – 20 июля 2018 г.

Печатается в авторской редакции

Формат 60×84 1/16

Усл. печ. л. 9,07

Тираж 110 экз.

Подписано в печать 01.07.2018

Средне-Волжское математическое общество
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
430005, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

